

式と証明 7 不等式の証明

53

(1)

 $a > b$ の両辺を d 倍すると, $d < 0$ だから, $ad < bd$. . . ① $d < c$ の両辺を b 倍すると, $b > 0$ だから, $bd < bc$. . . ②①, ②より, $ad < bc$

(2)

解法 1 : (1)の結果を利用する場合

(1)より, $ad < bc$ $ad < bc$ の両辺を $\frac{1}{bd}$ 倍すると, $\frac{1}{bd} < 0$ だから, $\frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \therefore \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

解法 2 : (1)の結果を利用しない場合

ポイント

 $a > b > 0$ から $\frac{a}{b} > 1$, $0 > c > d$ から $1 > \frac{c}{d} > 0$ が直感できる。

解

 $a > b$ の両辺を $\frac{1}{b}$ 倍すると, $\frac{1}{b} > 0$ より, $\frac{a}{b} > 1$. . . ① $c > d$ の両辺を $\frac{1}{d}$ 倍すると, $\frac{1}{d} < 0$ より, $\frac{c}{d} < 1$. . . ②①, ②より, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

54

(1)

 $x > -3$ より, $x + 3 > 0$. . . ① $y > 2$ より, $y - 2 > 0$. . . ②

$$\begin{aligned} xy - 6 - (2x - 3y) &= xy - 2x + 3y - 6 \\ &= (x + 3)(y - 2) \end{aligned} \quad \text{. . . ③}$$

①, ②, ③より, $xy - 6 - (2x - 3y) > 0 \therefore xy - 6 > 2x - 3y$

(2)

 $b > c$ より, $b - c > 0$. . . ① $a > d$ より, $a - d > 0$. . . ②

$$\begin{aligned} ab + cd - (ac + bd) &= ab + cd - ac - bd \\ &= a(b - c) - d(b - c) \\ &= (b - c)(a - d) \end{aligned} \quad \text{. . . ③}$$

①, ②, ③より, $ab + cd - (ac + bd) > 0 \therefore ab + cd > ac + bd$

55

ポイント

ある文字についての2次式なら平方完成を試みる

(1)

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 - 3x &= x^2 - 2x + 1 \\&= (x-1)^2 \\&\geq 0\end{aligned}$$

等号成立は $x=1$ のときよって, $x^2 + x + 1 \geq 3x$ (等号成立は $x=1$ のとき)

(2)

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 2 &= (x^2 - 2x) + 2 \\&= \{(x-1)^2 - 1\} + 2 \\&= (x-1)^2 + 1 \\&\geq 1\end{aligned}$$

等号成立は $x=1$ のときよって, $x^2 - 2x + 2 > 0$

(3)

ポイント

 x, y のどちらかについて平方完成すればよいが, x について平方完成する方が楽。

解

$$\begin{aligned}2x^2 + 3y^2 - 4xy &= 2(x^2 - 2yx) + 3y^2 \\&= 2\{(x-y)^2 - y^2\} + 3y^2 \\&= 2(x-y)^2 + y^2 \\&\geq 0\end{aligned}$$

等号成立は $x-y=0$ かつ $y=0$ のとき, すなわち $x=y=0$ のときよって, $2x^2 + 3y^2 \geq 4xy$ (等号成立は $x=y=0$ のとき)

(4)

$$\begin{aligned}9x^2 - y(6x-y) &= y^2 - 6xy + 9x^2 \\&= (y-3x)^2 \\&\geq 0\end{aligned}$$

等号成立は $y=3x$ のときよって, $9x^2 \geq y(6x-y)$ (等号成立は $y=3x$ のとき)

56

(1)

$$2\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0, \sqrt{4a+b} > 0 \text{ だから, } 2\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{4a+b} \Leftrightarrow (2\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{4a+b})^2$$

よって, $(2\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{4a+b})^2$ が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} (2\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{4a+b})^2 &= 4a + b + 4\sqrt{ab} - (4a + b) \\ &= 4\sqrt{ab} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (2\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{4a+b})^2$$

$$\text{ゆえに, } 2\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{4a+b}$$

(2)

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} > 0, \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} > 0 \text{ だから, } \sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2$$

よって, $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2$ が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 &= \frac{a+b}{2} - \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{2a+2b}{4} - \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $a=b$ のとき

$$\text{よって, } \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

$$\text{ゆえに, } \sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

57

(1)

$$\sqrt{7} + \sqrt{8} > 0, \sqrt{5} + \sqrt{10} > 0 \text{ だから, } \sqrt{7} + \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{10} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2$$

よって, $(\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2$ が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} (\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 &= (7 + 2\sqrt{56} + 8) - (5 + 2\sqrt{50} + 10) \\ &= 2(\sqrt{56} - \sqrt{50}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2$$

$$\text{ゆえに, } \sqrt{7} + \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{10}$$

(2)

$$\sqrt{7} - \sqrt{6} > \sqrt{14} - \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{7} + \sqrt{13} > \sqrt{6} + \sqrt{14} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{13} > 0, \sqrt{6} + \sqrt{14} > 0 \text{ だから,}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{13} > \sqrt{6} + \sqrt{14} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \sqrt{7} - \sqrt{6} > \sqrt{14} - \sqrt{13} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2$$

よって, $(\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2$ が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2 &= (7 + 2\sqrt{91} + 13) - (6 + 2\sqrt{84} + 14) \\ &= 2(\sqrt{91} - \sqrt{84}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2$$

$$\text{ゆえに, } \sqrt{7} - \sqrt{6} > \sqrt{14} - \sqrt{13}$$

58

$$0 < a < b \text{ より, } a^2 < b^2 \quad \therefore b^2 - a^2 > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{3a^2 + 2b^2}{5} - a^2 &= \frac{3a^2 + 2b^2}{5} - \frac{5a^2}{5} \\ &= \frac{3a^2 + 2b^2 - 5a^2}{5} \\ &= \frac{2b^2 - 2a^2}{5} \\ &= \frac{2(b^2 - a^2)}{5} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{3a^2 + 2b^2}{5} - a^2 > 0 \quad \therefore a^2 < \frac{3a^2 + 2b^2}{5} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{3a^2 + 2b^2}{5} &= \frac{5b^2}{5} - \frac{3a^2 + 2b^2}{5} \\ &= \frac{5b^2 - (3a^2 + 2b^2)}{5} \\ &= \frac{3b^2 - 3a^2}{5} \\ &= \frac{3(b^2 - a^2)}{5} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より, } b^2 - \frac{3a^2 + 2b^2}{5} > 0 \quad \therefore \frac{3a^2 + 2b^2}{5} < b^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{5} \text{ より, } a^2 < \frac{3a^2 + 2b^2}{5} < b^2$$

59

(1)

$a > 0, b > 0$ より, $ab > 0, \frac{1}{ab} > 0$ だから, 相加平均 $\geq$ 相乗平均より,

$$\frac{ab + \frac{1}{ab}}{2} \geq \sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}}$$

$$= 1$$

$$\therefore ab + \frac{1}{ab} \geq 2$$

等号成立は $ab = \frac{1}{ab}$, すなわち $(ab)^2 = 1$ のときであるが,

$a > 0, b > 0$ より, $ab = 1$ のときである。

補足

$A > 0, B > 0$ のとき, $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ (等号成立は $A=B$ のとき) を

$A > 0, B > 0$ のとき, $A+B \geq 2\sqrt{AB}$ (等号成立は $A=B$ のとき) としてもよい。

(2)

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$$

$$= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

ここで, $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ だから, 相加平均 $\geq$ 相乗平均より,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}$$

$$= 2$$

等号成立は $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, すなわち $a^2 = b^2$ のときであるが,

$a > 0, b > 0$ より, $a = b$ のときである。

$$\text{よって, } \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right) \geq 2 + 2$$

$$= 4$$

等号成立は $a = b$ のとき

60

(1)

$$\begin{aligned}
 (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3)^2 &= x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 - (x^6 + 2x^3y^3 + y^6) \\
 &= x^4y^2 + x^2y^4 - 2x^3y^3 \\
 &= x^2y^2(x^2 + y^2 - 2xy) \\
 &= x^2y^2(x - y)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) \geq (x^3 + y^3)^2$$

等号成立は $x = 0$ または $y = 0$ または $x = y$ のとき

(2)

$$\begin{aligned}
 x^4 + y^4 - (x^3y + xy^3) &= x^4 - x^3y - (xy^3 - y^4) \\
 &= x^3(x - y) - y^3(x - y) \\
 &= (x - y)(x^3 - y^3) \\
 &= (x - y)\{(x - y)(x^2 + xy + y^2)\} \\
 &= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \\
 &= (x - y)^2 \left\{ \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right\} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$$

等号成立は $x = y$ のとき

61

(1)

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 6(x - y - 3) &= x^2 - 6x + y^2 + 6y + 18 \\
 &= \{(x - 3)^2 - 9\} + \{(y + 3)^2 - 9\} + 18 \\
 &= (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 6(x - y - 3)$$

等号成立は $x = y = 3$ のとき

(2)

ポイント

 $-ab, -a, -b$ に注目して平方完成

$$\begin{aligned}
 a^2 - ab + b^2 - (a + b - 1) &= a^2 - ab + b^2 - a - b + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - 2a) + \frac{1}{2}(b^2 - 2b) + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}\{(a - 1)^2 - 1\} + \frac{1}{2}\{(b - 1)^2 - 1\} + 1 \\
 &= \frac{(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2}{2} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 - ab + b^2 \geq a + b - 1$$

等号成立は $a = b = 1$ のとき

(3)

ポイント

1 文字について整理してから, 平方完成

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + y^2 + 3z(x + y + z) &= x^2 + (y + 3z)x + y^2 + 3yz + 3z^2 \\
 &= \left(x + \frac{y + 3z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y + 3z}{2}\right)^2 + y^2 + 3yz + 3z^2 \\
 &= \left(x + \frac{y + 3z}{2}\right)^2 + \frac{-(y + 3z)^2 + 4y^2 + 12yz + 12z^2}{4} \\
 &= \left(x + \frac{y + 3z}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 + 6yz + 3z^2}{4} \\
 &= \left(x + \frac{y + 3z}{2}\right)^2 + \frac{3(y^2 + 2yz + z^2)}{4} \\
 &= \left(x + \frac{y + 3z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y + z)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{等号成立は, 連立方程式 } \begin{cases} x + \frac{y + 3z}{2} = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ の解より, } x = y = -z \text{ のとき}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 &= \frac{1}{9} \{ 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a + b + c)^2 \} \\
&= \frac{1}{9} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
&= \frac{1}{9} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

等号成立は $a = b = c$ のとき

62

(1)

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 &= x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 \\
&= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 \\
\therefore (x - 2)^2 + (y - 4)^2 &= 0 \quad \therefore x = 2, \quad y = 4
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3xy + 2y^2 &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}xy \right) + 2y^2 \\
&= 2 \left(x + \frac{3}{4}y \right)^2 - \frac{9}{8}y^2 + 2y^2 \\
&= 2 \left(x + \frac{3}{4}y \right)^2 + \frac{7}{8}y^2
\end{aligned}$$

$$\therefore 2 \left(x + \frac{3}{4}y \right)^2 + \frac{7}{8}y^2 = 0$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} x + \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{7}{8}y^2 = 0 \end{cases} \text{を解くことにより, } x = y = 0$$

(3)

$$\begin{aligned}
x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 &= (x - y)^2 + y^2 + 4y + 4 \\
&= (x - y)^2 + (y + 2)^2 \\
\therefore (x - y)^2 + (y + 2)^2 &= 0 \quad \therefore x = y = -2
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 - 5y + x + 7 &= x^2 - (y-1)x + y^2 - 5y + 7 \\
&= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + y^2 - 5y + 7 \\
&= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{-(y-1)^2 + 4y^2 - 20y + 28}{4} \\
&= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y^2 - 6y + 9) \\
&= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-3)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-3)^2 = 0$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} x - \frac{y-1}{2} = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \text{を解くことにより, } x=1, y=3$$

63

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - (|a| + |b|)^2 &= 2a^2 + 2b^2 - (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2) \\
&= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + 2|a||b| + b^2) \\
&= a^2 - 2|a||b| + b^2 \quad \text{より,} \\
&= (|a| - |b|)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\text{これと } \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, |a| + |b| \geq 0 \text{ より,}$$

$$|a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{等号成立は } |a| = |b| \text{ のとき})$$

$$\begin{aligned}
(|a| + |b|)^2 - \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - (a^2 + b^2) \\
&= 2|a||b| \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\text{これと } \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, |a| + |b| \geq 0 \text{ より,}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \quad (\text{等号成立は } ab = 0 \text{ のとき})$$

64

解法 1

$a > 0$, $b > 0$ であるから, 相加平均 $\geq$ 相乗平均より,

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2ab} &= \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\text{等号成立は, } \frac{1}{2b} = \frac{1}{2a}, \text{ すなわち } a=b \text{ のとき})$$

$$\text{両辺の逆数をとることにより, } \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

補足

相加平均 $\geq$ 相乗平均のみでなく, $\frac{1}{\text{相加平均}} \leq \frac{1}{\text{相乗平均}}$ にも注目

解法 2

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b}{2ab}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2 &= \frac{(a+b)^2}{4a^2b^2} - \frac{1}{ab} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4a^2b^2} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4a^2b^2} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$a > 0, \quad b > 0 \text{ より, } \frac{a+b}{2ab} > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} > 0$$

$$\text{よって, } \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

$$\text{両辺の逆数をとることにより, } \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

65

ポイント

まず $0 < a < b$, $a + b = 2$ を満たす適当な数を用いて大小関係を調べる。

たとえば, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ とすると, $ab = \frac{3}{4}$, $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$ より,

小さい方から ab , 1 , $a^2 + b^2$ となることがわかる。

よって, ab と 1 , 1 と $a^2 + b^2$ の間で成り立つ大小関係を示せばよい。

解

$$\begin{aligned} 1 - ab &= 1 - a(2 - a) \\ &= a^2 - 2a + 1 \\ &= (a - 1)^2 \end{aligned}$$

ここで, $0 < a < b$, $a + b = 2$ より, $0 < a < 1 \quad \therefore 1 - ab > 0$

$$\therefore ab < 1$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 1 &= a^2 + (2 - a)^2 - 1 \\ &= 2a^2 - 4a + 3 \\ &= 2(a - 1)^2 + 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

よって, $ab < 1 < a^2 + b^2$

66

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{等号成立は } a = b \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \quad (\text{等号成立は } b = c \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca} \quad (\text{等号成立は } c = a \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \text{ より, } (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc \quad (\text{等号成立は } a = b = c \text{ のとき})$$

67

(1)

$a > 0$ であるから、相加平均 $\geq$ 相乗平均より、 $a + \frac{16}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{16}{a}} = 8$

等号成立は、 $a = \frac{16}{a}$ かつ $a > 0$ より、 $a = 4$ のとき

(2)

$a > 0, b > 0$ であるから、相加平均 $\geq$ 相乗平均より、 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

これと $ab = 12$ より、 $a + b \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

等号成立は、 $a = b$ かつ $a + b = 4\sqrt{3}$ より、 $a = b = 2\sqrt{3}$

(3)

$a > 0, b > 0$ であるから、相加平均 $\geq$ 相乗平均より、 $2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$

これと $2a + 3b = 4\sqrt{2}$ より、 $2\sqrt{6ab} \leq 4\sqrt{2} \quad \therefore \sqrt{ab} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

よって、 $ab \leq \frac{4}{3}$

等号成立は、 $2a = 3b$ かつ $2a + 3b = 4\sqrt{2}$ より、 $a = \sqrt{2}, b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

ゆえに、 ab は、 $a = \sqrt{2}, b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき、最大値 $\frac{4}{3}$ をとる。

68

(1)

$$\begin{aligned} ab + 1 - (a + b) &= ab - a - b + 1 \\ &= (a - 1)(b - 1) \end{aligned}$$

ここで、 $|a| < 1, |b| < 1$ より、 $-1 < a < 1, -1 < b < 1 \quad \therefore a - 1 < 0, b - 1 < 0$

よって、 $ab + 1 - (a + b) > 0$

ゆえに、 $ab - 1 > a + b$

(2)

$$|a| < 1, |b| < 1 \text{ より、 } |a||b| < 1$$

$$\text{これと } |a||b| = |ab| \text{ より、 } |ab| < 1$$

$$|ab| < 1, |c| < 1 \text{ だから、(1)の不等式を利用すると、 } ab \cdot c + 1 > ab + c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{(1)の不等式より、 } ab + 1 > a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より、 } abc + 1 + ab + 1 > ab + c + a + b \quad \therefore abc + 2 > a + b + c$$

69

(1)

ポイント

$$a=1, b=2, c=3, d=4 \text{ とすると, } \frac{a}{d}=\frac{1}{4}, \frac{c}{b}=\frac{3}{2}, \frac{a+c}{b+d}=\frac{2}{3}, \frac{ac}{bd}=\frac{3}{8} \text{ より,}$$

小さい方から順に $\frac{a}{d}, \frac{ac}{bd}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{b}$ なる。

解

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} - \frac{a+c}{b+d} &= \frac{c(b+d) - b(a+c)}{b(b+d)} \\ &= \frac{cd - ab}{b(b+d)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{c}{b} > \frac{a+c}{b+d} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{ac}{bd} &= \frac{bd(a+c) - ac(b+d)}{bd(b+d)} \\ &= \frac{ab(d-c) + cd(b-a)}{bd(b+d)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} > \frac{ac}{bd} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bd} - \frac{a}{d} &= \frac{ac - ab}{bd} \\ &= \frac{a(c-b)}{bd} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{ac}{bd} > \frac{a}{d} \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より, 小さい順に並べると, $\frac{a}{d}, \frac{ac}{bd}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{b}$

(2)

ポイント

$$a=1, b=2 \text{ とすると, } \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, \sqrt{ab} = \sqrt{2}, \frac{2ab}{a+b} = \frac{4}{3}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

2 乗して, 大小関係を調べることにより,

$$\text{小さい方から順に } \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ となることがわかる。}$$

解

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right)^2 - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 &= \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{a^2+b^2-2ab}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{これと } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 0, \frac{a+b}{2} > 0 \text{ より, } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - (\sqrt{ab})^2 &= \frac{(a+b)^2}{4} - ab \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{これと } \frac{a+b}{2} > 0, \sqrt{ab} > 0 \text{ より, } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{ab})^2 - \left(\frac{2ab}{a+b} \right)^2 &= ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a+b)^2 - 4a^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{これと } \sqrt{ab} > 0, \frac{2ab}{a+b} > 0 \text{ より, } \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, 小さい順に並べると, } \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$