

式と証明 演習問題

1

展開式の一般項は

$$\begin{aligned}\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^q c^r &= \frac{6!}{p!q!r!} x^{2p} 2^q x^q c^r \\ &= \frac{6!}{p!q!r!} 2^q c^r x^{2p+q} \\ &= \frac{6!}{p!q!r!} 2^q c^r x^{2p+q}\end{aligned}$$

$0 \leq p \leq 6, 0 \leq q \leq 6, 0 \leq r \leq 6, p+q+r=6, 2p+q=7$ より,
 $(p, q, r) = (1, 5, 0), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$

よって, x^7 の項の係数を c を用いて表すと,

$$\frac{6!}{1!5!0!} \cdot 2^5 c^0 + \frac{6!}{2!3!1!} \cdot 2^3 \cdot c^1 + \frac{6!}{3!1!2!} \cdot 2^1 \cdot c^2 = 192 + 480c + 120c^2$$

これと x^7 の項の係数が -288 であることから,

$$192 + 480c + 120c^2 = -288 \quad \therefore 120(c+2)^2 = 0$$

よって, 定数 c の値は -2

2

整式 $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ の x^4 の項の係数は 1 だから, ある 2 次式の x^2 の係数は 1 である。

そこで, ある 2 次式を $x^2 + px + q$ とおくと,

$$\begin{aligned}(x^2 + px + q)^2 &= x^4 + p^2 x^2 + q^2 + 2px^3 + 2pqx + 2qx^2 \\ &= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2\end{aligned}$$

$x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ と $x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$ は恒等式だから,
 各項の係数が等しい。

よって,

$$1 = 2p \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-1 = p^2 + 2q \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a = 2pq \quad \dots \textcircled{3}$$

$$b = q^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } p = \frac{1}{2}, q = -\frac{5}{8}$$

$$\text{これらを } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ に代入することにより, } a = -\frac{5}{8}, b = \frac{25}{64}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
 &= a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \\
 &= (ay - bx)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

よって, $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (等号成立は $ay = bx$ のとき)

補足: コーシー・シュワルツの不等式

$a_1, a_2, a_3, \dots$ と $x_1, x_2, x_3, \dots$ との間に次の不等式が成り立つ。

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots) \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots)^2$$

等号成立は $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \dots$ のとき

コーシー・シュワルツの不等式は不等式処理を楽にする手段だからマスターすべき。

(2)

$$3x + 2y = 1 \text{ より, } y = \frac{-3x + 1}{2}$$

これを $x^2 + y^2$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
 x^2 + \left(\frac{-3x + 1}{2}\right)^2 &= x^2 + \frac{9x^2 - 6x + 1}{4} \\
 &= \frac{1}{4}(13x^2 - 6x + 1) \\
 &= \frac{13}{4}\left(x^2 - \frac{6}{13}x + \frac{1}{13}\right) \\
 &= \frac{13}{4}\left\{\left(x - \frac{3}{13}\right)^2 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \frac{1}{13}\right\} \\
 &= \frac{13}{4}\left\{\left(x - \frac{3}{13}\right)^2 - \frac{3^2}{13^2} + \frac{13}{13^2}\right\} \\
 &= \frac{13}{4}\left\{\left(x - \frac{3}{13}\right)^2 + \frac{4}{13^2}\right\} \\
 &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{3}{13}\right)^2 + \frac{13}{4} \cdot \frac{4}{13^2} \\
 &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{3}{13}\right)^2 + \frac{1}{13}
 \end{aligned}$$

よって, $x = \frac{3}{13}$, $y = \frac{-3 \cdot \frac{3}{13} + 1}{2} = \frac{2}{13}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{13}$ をとる。

(3)

解法 1: (1) 補足のコーシー・シュワルツの不等式で解く

コーシー・シュワルツの不等式より, $(2x+3y)^2 \leq (2^2+3^2)(x^2+y^2)$ これと $x^2+y^2=1$ より, $(2x+3y)^2 \leq 13 \quad \therefore -\sqrt{13} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13}$ 等号成立は $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ かつ $x^2+y^2=1$ より, $x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}, y = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$ のときである。よって, $2x+3y$ は, $x = \frac{2}{\sqrt{13}}, y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき, 最大値 $\sqrt{13}$ をとる。

解法 2: 実数条件から解く

 $2x+3y=k$ (k は実数) とすると, $y = \frac{k-2x}{3}$ これと $x^2+y^2=1$ より, $x^2 + \left(\frac{k-2x}{3}\right)^2 = 1$ よって, $13x^2 - 4kx + k^2 - 9 = 0$ これを x についての 2 次方程式と見ると, x は実数だから,判別式を D とすると, $\frac{D}{4} = 4k^2 - 13(k^2 - 9) = -9k^2 + 13 \cdot 9 \geq 0 \quad \therefore -\sqrt{13} \leq k \leq \sqrt{13}$ よって, k の最大値は $\sqrt{13}$ であり,このとき $13x^2 - 4\sqrt{13}x + 4 = 0$ より, $(\sqrt{13}x - 2)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ また, $y = \frac{\sqrt{13} - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

ゆえに,

 $x = \frac{2}{\sqrt{13}}, y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき, $2x+3y$ は最大値 $\sqrt{13}$ をとる。

4

$$\begin{aligned}
 \left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{3}{a}\right) &= ab + 3 + 2 + \frac{6}{ab} \\
 &= 5 + ab + \frac{6}{ab} \\
 &\geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{6}{ab}} \quad (\because ab > 0) \\
 &= 5 + 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

等号成立は $ab = \frac{6}{ab}$ ($ab > 0$) のとき, すなわち $ab = \sqrt{6}$ のとき

5

Q を $2x^2 + 5$ で割った商を H とすると,

$$\text{条件より, } Q = (2x^2 + 5)H + 7x - 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

H を $3x^2 + 5x + 2$ で割った商を I とすると,

$$\text{条件より, } H = (3x^2 + 5x + 2)I + 3x + 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②を①に代入し, 右边を整理していくと,

$$\begin{aligned} Q &= (2x^2 + 5)\{(3x^2 + 5x + 2)I + 3x + 8\} + 7x - 4 \\ &= (2x^2 + 5)(3x^2 + 5x + 2)I + (2x^2 + 5)(3x + 8) + 7x - 4 \\ &= (2x^2 + 5)(3x^2 + 5x + 2)I + 6x^3 + 16x^2 + 22x + 36 \\ &= (2x^2 + 5)(3x^2 + 5x + 2)I + 2x(3x^2 + 5x + 2) + 6x^2 + 18x + 36 \\ &= (2x^2 + 5)(3x^2 + 5x + 2)I + 2x(3x^2 + 5x + 2) + 2(3x^2 + 5x + 2) + 8x + 32 \\ &= (3x^2 + 5x + 2)\{(2x^2 + 5)I + 2x + 2\} + 8x + 32 \end{aligned}$$

よって, Q を $3x^2 + 5x + 2$ で割った余りは $8x + 32$

6

$$x + y + z = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + y - z = -15 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } 4x + 2y = -10 \quad \therefore y = -2x - 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入し, 整理すると, } z = x + 10 \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④を $ax^2 + by^2 + cz^2 = 5^2$ に代入し, 左辺を x について整理することにより,
 x についての恒等式 $(a + 4b + c)x^2 + 20(b + c)x + 25(b + 4c) = 25$ が得られる。

各項の係数が等しいから,

$$a + 4b + c = 0, \quad b + c = 0, \quad b + 4c = 1$$

$$\text{これを解くことにより, } a = 1, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}$$

7

(1)

$$c^2 - (a^2 + b^2) = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$$

$$\text{ここで, } a, b \text{ は正の数だから, } ab > 0 \quad \therefore c^2 - (a^2 + b^2) > 0$$

$$\text{ゆえに, } a^2 + b^2 < c^2$$

(2)

ポイント

(1)では, $a + b = c$ は 1 次式, $a^2 + b^2 < c^2$ は 2 次式

したがって, $a + b = c$ の両辺を 2 乗し, 2 次式にすれば

$a^2 + b^2 < c^2$ に代入することができた。

(2)では, $a^2 + b^2 = c^2$ は 2 次式, $a^3 + b^3 < c^3$ は 3 次式だから,

$a^2 + b^2 = c^2$ の両辺を 3 乗, $a^3 + b^3 < c^3$ を 2 乗すればよい。

a, b, c は正の数だから, $a^3 + b^3 < c^3 \Leftrightarrow (a^3 + b^3)^2 < (c^3)^2$

よって, $(a^3 + b^3)^2 < (c^3)^2$ を示せばよい。

解

$$\begin{aligned}(c^3)^2 - (a^3 + b^3)^2 &= (c^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \\&= (a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \\&= a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) - (a^6 + 2a^3b^3 + b^6) \\&= 3a^2b^2(a^2 + b^2) - 2a^3b^3 \\&= a^2b^2(3a^2 + 3b^2 - 2ab) \\&= a^2b^2\{(a-b)^2 + 2(a^2 + b^2)\} \\&> 0\end{aligned}$$

$$\therefore (a^3 + b^3)^2 < (c^3)^2$$

a, b, c は正の数だから, $a^3 + b^3 > 0$, $c^3 > 0$

よって, $a^3 + b^3 < c^3$