複素数と方程式 1　複素数

76

ポイント

計算を始める前に虚数を虚数単位 $\boldsymbol{i}$ で表すこと

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left(\sqrt{3}+i\right)\left(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}\right) \\
&= \left(\sqrt{3}+i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right) \\
&= \sqrt{3}-3i+i-\sqrt{3}i^2 \\
&= \sqrt{3}-2i-\sqrt{3}\cdot(-1) \\
&= \sqrt{3}-2i+\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}-2i
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left(1-\sqrt{2}\sqrt{-1}\right)^2 \\
&= \left(1-\sqrt{2}i\right)^2 \\
&= 1^2-2\sqrt{2}i+\left(-\sqrt{2}i\right)^2 \\
&= 1-2\sqrt{2}i+\left(-\sqrt{2}\right)^2 i^2 \\
&= 1-2\sqrt{2}i+2\cdot(-1) \\
&= 1-2\sqrt{2}i-2 \\
&= -1-2\sqrt{2}i
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{2-\sqrt{5}\sqrt{-1}}{2+\sqrt{5}\sqrt{-1}} \\
&= \frac{2-\sqrt{5}i}{2+\sqrt{5}i} \\
&= \frac{2-\sqrt{5}i}{2+\sqrt{5}i}\cdot\frac{2-\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i} \\
&= \frac{\left(2-\sqrt{5}i\right)^2}{\left(2+\sqrt{5}i\right)\left(2-\sqrt{5}i\right)} \\
&= \frac{2^2-2\cdot 2\sqrt{5}i+\left(-\sqrt{5}i\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{5}i\right)^2} \\
&= \frac{4-4\sqrt{5}i+(-5)}{4-(-5)} \\
&= -\frac{1}{9}-\frac{4\sqrt{5}}{9}i
\end{aligned}
$$

77

ポイント

i^n の値

i，$i^2=-1$，$i^3=i^2\cdot i=-i$，$i^4=i^3\cdot i=1$，$i^5=i^4\cdot i=i$，…

より，i^n（n は自然数）は，i，-1，$-i$，1 が繰り返される。

したがって，

n が 4 で割り切れるとき，$i^n=1$

n を 4 で割った余りが 1 のとき，$i^n=i$

n を 4 で割った余りが 2 のとき，$i^n=-1$

n を 4 で割った余りが 3 のとき，$i^n=-i$

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\left(\frac{3-2i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}\right)^2\\
&=\left\{\frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}\right\}^2\\
&=\left(\frac{6-9i-4i-6}{4+9}\right)^2\\
&=(-i)^2\\
&=(-1)^2i^2\\
&=-1
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\\
&=\frac{(-1)^3+\left(\sqrt{3}i\right)^3+3(-1)\sqrt{3}i\cdot\{(-1)+\sqrt{3}i\}}{8}\\
&=\frac{-1+\left(\sqrt{3}i\right)^2\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{8}\\
&=\frac{-1-3\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i+9}{8}\\
&=1
\end{aligned}
$$

補足

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(3)

$2+i=a$，$2-i=b$ とおくと，

与式 $=a^3+b^3$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

ここで，$a+b=4$，$ab=5$ だから，

与式 $=4^3-3\cdot5\cdot4$

$=4$

(4)

与式 $=\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\left(\dfrac{2}{i}+i\right)i^3$

$=\left(\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{i}{i}-i\right)\left(\dfrac{2}{i}\cdot\dfrac{i}{i}+i\right)i^3$

$=-2i\cdot-i\cdot i^3$

$=2i^5$

$=2i$

与式 $=\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\left(\dfrac{2}{i}+i\right)i^3$

$=\left\{\left(\dfrac{1}{i}-i\right)\cdot i\right\}\left\{\left(\dfrac{2}{i}+i\right)\cdot i\right\}\cdot i$

$=\left(1-i^2\right)\left(2+i^2\right)\cdot i$

$=(1+1)(2-1)\cdot i$

$=2i$

など

(5)

与式 $=\dfrac{2+3i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}+\dfrac{2i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}$

$=\dfrac{8-i}{5}+\dfrac{-2+6i}{10}$

$=\dfrac{8-i}{5}+\dfrac{-1+3i}{5}$

$=\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{5}i$

(6)

与式 $=\dfrac{2+3i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}\cdot\dfrac{3-2i}{3-2i}$

$=\dfrac{13i}{13}+\dfrac{-13i}{13}$

$=0$

(7)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}+1-i-1-(-i)+1 \\
&= -i+1-i-1+i+1 \\
&= 1-i
\end{aligned}
$$

78

(1)

$x+y=-1$

(2)

$xy=\dfrac{3}{2}$

(3), (4)は(1), (2)の結果を利用して解く。

(3)

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\
&= 1-3 \\
&= -2
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+x^2y+xy^2 &= \left(x^3+y^3\right)+xy(x+y) \\
&= \left\{(x+y)^3-3xy(x+y)\right\}+xy(x+y) \\
&= (x+y)^3-2xy(x+y) \\
&= -1+3 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

79

(1)

$(3x+2y)+(2x-3y)i=5-i$ より, $3x+2y=5$, $2x-3y=-1$ $\therefore x=1$, $y=1$

(2)

$(x+2y)+(-2x+y)i=2+6i$ より, $x+2y=2$, $-2x+y=6$ $\therefore x=-2$, $y=2$

(3)

$4xi=0$ より, $x=0$

(4)

$$\left(\frac{1}{2+i}+\frac{1}{x+yi}\right)(2+i)(x+yi)=\frac{1}{2}(2+i)(x+yi)$$

$$\therefore (x+yi)+(2+i)=\frac{1}{2}\{(2x-y)+(x+2y)i\}$$

$\therefore 2(x+2)+2(y+1)i=(2x-y)+(x+2y)i$

$\therefore 2x+4=2x-y$, $2y+2=x+2y$ $\therefore x=2$, $y=-4$

80

$a+bi+2-3i=a+2+(b-3)i$

条件より，$a+2=0$，$b-3\neq 0$　$\therefore a=-2$，$b\neq 3$　・・・①

$(a+bi)(2-3i)=2a+3b+(-3a+2b)i$

条件より，$-3a+2b=0$　・・・②

①かつ②より，$a=-2$，$b=-3$

81

$\alpha=a+bi$（$b\neq 0$），$\beta=p+qi$（$q\neq 0$）とすると，

$\alpha+\beta=a+p+(b+q)i$

$\alpha\beta=ap-bq+(aq+bp)i$

したがって，条件より，

$b+q=0$　・・・①

$aq+bp=0$　・・・②

①より，$b=-q$

これを②に代入して整理すると，$q(a-p)=0$　$\therefore a=p$（$\because q\neq 0$）

よって，$a+bi=p-qi$

ゆえに，α と β は互いに共役である。

82

(1)

$$\begin{aligned}\left(\frac{7+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}\right)^{10}&=\left(\frac{29-29i}{29}\right)^{10}\\&=(1-i)^{10}\\&=\left\{(1-i)^2\right\}^5\\&=(-2i)^5\\&=(-2)^5 i^5\\&=-32i\end{aligned}$$

(2)

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

$$\begin{aligned}i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{50}&=i+i^2+i^3+i^4+i^4\left(i+i^2+i^3+i^4\right)+\cdots+i^{44}\left(i+i^2+i^3+i^4\right)+i^{49}+i^{50}\\&=i^{49}+i^{50}\\&=i^{48}\left(i+i^2\right)\\&=1\cdot(i-1)\\&=i-1\\&=-1+i\end{aligned}$$

i^n の値（周期性に注目）

i， $i^2=-1$， $i^3=i^2\cdot i=-i$， $i^4=i^3\cdot i=1$， $i^5=i^4\cdot i=i$， $\cdots$

より， i^n （n は自然数）は， i， -1， $-i$， 1 が繰り返される。

したがって，

n が 4 で割り切れるとき， $i^n=1$

n を 4 で割った余りが 1 のとき， $i^n=i$

n を 4 で割った余りが 2 のとき， $i^n=-1$

n を 4 で割った余りが 3 のとき， $i^n=-i$