

複素数と方程式 2 2次方程式の解と判別式

89

ポイント

共通部分に注目

(1)

$$x+1=t \text{ とおくと, } 3t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \therefore (t-1)(3t+1)=0$$

$$\text{これより, } x(3x+4)=0 \quad \therefore x=0, -\frac{4}{3}$$

(2)

$$x-1=t \text{ とおくと, } 2t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \therefore 2(t-1)^2 = -1$$

$$\text{よって, } t = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{これと } x=1+t \text{ より, } x = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(3)

解の公式を使うことにより,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2}-1)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6-2\sqrt{8}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pm |2-\sqrt{2}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pm (2-\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } x=1, \sqrt{2}-1$$

(4)

解の公式を使うことにより,

$$\begin{aligned}
 x &= 1 \pm \sqrt{1^2 - (9 + 2\sqrt{15})} \\
 &= 1 \pm \sqrt{-8 - 2\sqrt{15}} \\
 &= 1 \pm \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \sqrt{-1} \\
 &= 1 \pm \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} i \\
 &= 1 \pm \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} i \\
 &= 1 \pm (\sqrt{5} + \sqrt{3}) i
 \end{aligned}$$

90

(1)

 $k=0$ のとき

$$-3x + 1 = 0 \text{ より, } x = \frac{1}{3}$$

よって, 1 つの実数解をもつ

 $k \neq 0$ のとき判別式を D とすると, $D = 9 - 4k$ $D > 0$, すなわち $0 < k < \frac{9}{4}, k < 0$ のとき

異なる 2 実数解をもつ

 $D = 0$, すなわち $k = \frac{9}{4}$ のとき

重解 (2 つの同じ実数解) をもつ

 $D < 0$, すなわち $k > \frac{9}{4}$ のとき,

異なる 2 虚数解をもつ

以上より,

 $0 < k < \frac{9}{4}, k < 0$ のとき, 異なる 2 実数解をもつ $k = 0$ のとき, 重解をもつ $k = 0$ のとき, 1 つの実数解をもつ $k > \frac{9}{4}$ のとき, 異なる 2 虚数解をもつ

(2)

$$(k-1)(k+1)x^2 + 2(k-1)x + 2 = 0 \text{ より,}$$

 $k=1$ のとき

$$0x^2 + 0x + 2 = 0 \text{ を満たす解は存在しない}$$

 $k=-1$ のとき

$$-4x + 2 = 0 \text{ より, } x = \frac{1}{2}$$

よって, 1 つの実数解をもつ

 $k \neq \pm 1$ のとき $(k-1)(k+1)x^2 + 2(k-1)x + 2 = 0$ は 2 次方程式であり, その判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (k-1)^2 - 2(k-1)(k+1) \\ &= -(k-1)(k+3) \end{aligned}$$

 $D > 0$, すなわち $-3 < k < -1$, $-1 < k < 1$ のとき

異なる 2 実数解をもつ

 $D = 0$, すなわち $k = -3$ のとき

重解をもつ

 $D < 0$ のとき, すなわち $k < -3$, $1 < k$ のとき

異なる 2 虚数解をもつ

以上より,

 $-3 < k < -1$, $-1 < k < 1$ のとき, 異なる 2 実数解をもつ $k = -3$ のとき, 重解をもつ $k = -1$ のとき, 1 つの実数解をもつ $k < -3$, $1 < k$ のとき, 2 つの異なる虚数解をもつ $k = 1$ のとき, 解なし

91

 $k=2$ のとき

$$-8x-2=0 \text{ より, } x=\frac{1}{4}$$

よって, 実数解をもつ

 $k=-2$ のとき $0x^2+0x-2=0$ を満たす解は存在しない。 $k \neq \pm 2$ のとき $(k^2-4)x^2-2(k+2)x-2=0$ は 2 次方程式であり, その判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (k+2)^2 + 2(k^2-4) \\ &= (k+2)(3k-4) \end{aligned}$$

実数解をもつのは $D \geq 0$ のときだから, $(k+2)(3k-4) \geq 0$ より, $k < -2$, $\frac{4}{3} \leq k$ 以上より, 与式が実数解をもつときの定数 k の範囲は, $k < -2$, $\frac{4}{3} \leq k$

92

判別式がいずれも負の場合だから, $m^2-4m < 0$ かつ $m^2-4 < 0$ これを解くことにより, $0 < m < 2$

93

(1)

ポイント

「A, B の少なくとも1つが p 」 $\equiv$ 「A が p または B が p 」

解

2つの判別式の少なくとも一方が負でなければよいから,

$$4m^2+8m \geq 0 \text{ または } (m-1)^2-4m^2 \geq 0 \text{ であればよい。}$$

$$4m^2+8m=4m(m+2) \text{ より, } 4m^2+8m \geq 0 \text{ の解は, } m \leq -2, \ 0 \leq m \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(m-1)^2-4m^2=\{(m-1)-2m\}\{(m-1)+2m\}=-(m+1)(3m-1) \text{ より,}$$

$$(m-1)^2-4m^2 \geq 0 \text{ の解は, } -1 \leq m \leq \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①または②より, $m \leq -2$, $-1 \leq m$

(2)

ポイント

「A, B のどちらか一方」とは, 「 $A \cap (\overline{A \cap B})$ または $B \cap (\overline{A \cap B})$ 」 のことである。

解

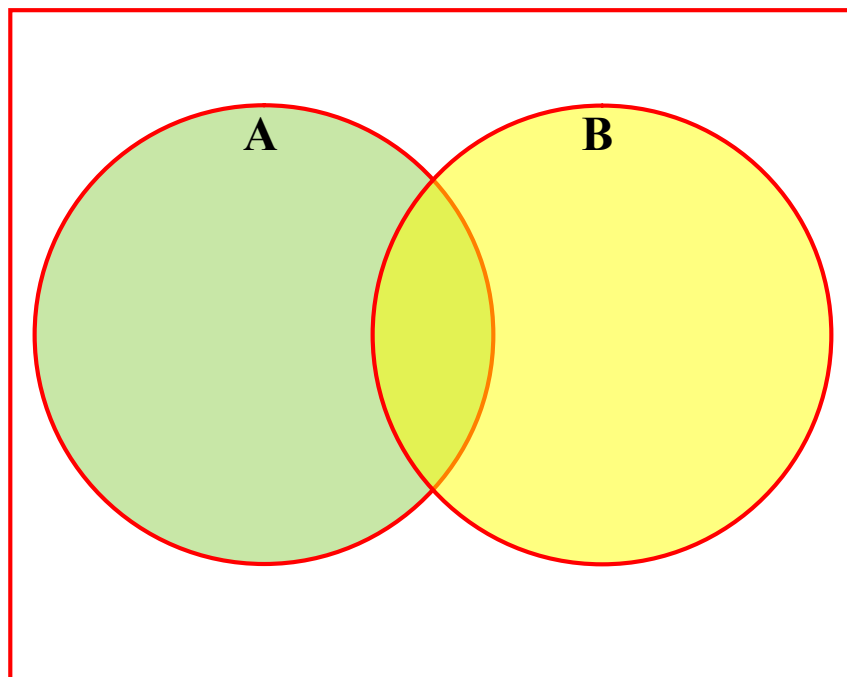
両方とも実数解をもつのは, (1)において, ①かつ②の場合であるから, $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$ のとき

よって, その否定は, つまり両方とも実数解をもたないか一方だけ実数解をもつのは,

$$m < 0, \quad \frac{1}{3} < m \quad \cdots \textcircled{3}$$

一方だけ実数解をもつのは, (①かつ③) または (②かつ③) のときであるから,

$$m \leq -2, \quad -1 \leq m < 0, \quad \frac{1}{3} < m$$



$x^2 + 2mx - 2m = 0$ が実数解をもつときの m の集合を A,

$x^2 + (m-1)x + m^2 = 0$ が実数解をもつときの m の集合を B とすると,

$x^2 + 2mx - 2m = 0$, $x^2 + (m-1)x + m^2 = 0$ の一方だけが実数解をもつ集合は,

$A \cap (\overline{A \cap B})$ または $B \cap (\overline{A \cap B})$ である。

94

略解

(1)

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (a + c)^2 - 4ac \\ &= a^2 - 2ac + c^2 \\ &= (a - c)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(2)

$ax^2 + bx + c = 0$ は 2 次方程式だから, $a \neq 0$
よって,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= b^2 - 4a \cdot (-a) \\ &= b^2 + 4a^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

(3)

$ac < 0$ より,
 $b^2 - 4ac > 0$

95

判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2a - 3b)^2 - 13(a^2 + b^2) \\ &= (4a^2 - 12ab + 9b^2) - 13a^2 - 13b^2 \\ &= -9a^2 - 12ab - 4b^2 \\ &= -(3a + 2b)^2 \end{aligned}$$

よって,

$3a + 2b = 0$ のとき $D = 0$ となり, 重解をもつ

$3a + 2b \neq 0$ のとき $D < 0$ となり, 異なる 2 虚数解をもつ

96

判別式を D とし, これを k について整理していくと,

$$\begin{aligned}
 D &= (k+a)^2 - 4(k^2+a) \\
 &= -3k^2 + 2ak + a^2 - 4a \\
 &= -3\left(k^2 - \frac{2}{3}ak\right) + a^2 - 4a \\
 &= -3\left\{\left(k - \frac{1}{3}a\right)^2 - \frac{1}{9}a^2\right\} + a^2 - 4a \\
 &= -3\left(k - \frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{4}{3}a^2 - 4a \\
 &= -3\left(k - \frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{4}{3}a(a-3)
 \end{aligned}$$

よって, D の最大値は $\frac{4}{3}a(a-3)$

これが負であるとき, どのような k の値に対しても虚数解をもつから,
求める a の範囲は $0 < a < 3$

97

注意ポイント

判別式が使えるのは実数係数の方程式に限る。

解

実数解を α とすると, $\alpha^2 + (k+2i)\alpha + (3+6i) = 0$

これを実部と虚部に分けて整理すると, $(\alpha^2 + 3k\alpha + 1) + (2\alpha + 3)i = 0$

よって, $\alpha^2 + 3k\alpha + 1 = 0$ かつ $2\alpha + 3 = 0$

これを解くと, 実数解 $\alpha = -\frac{3}{2}$, $k = \frac{13}{18}$

98

方程式を実部と虚部に分けて整理すると, $(3x^2 + 8x - 3) + (2x^2 + 5x - 3)i = 0$

これと $3x^2 + 8x - 3 = (3x-1)(x+3)$, $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$ より,

$(3x-1)(x+3) + (2x-1)(x+3)i = 0$

よって, $(3x-1)(x+3) = 0$ かつ $(2x-1)(x+3) = 0 \quad \therefore x = -3$

99

与式の判別式を D とすると $D = p^2 - 8p = p(p-8)$

解は虚数だから $D < 0 \quad \therefore 0 < p < 8 \quad \cdots \textcircled{1}$

虚数解を α とすると $\alpha^2 - p\alpha + 2p = 0$ より, $\alpha^2 = p\alpha - 2p$

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= p\alpha^2 - 2p\alpha \\ &= p(p\alpha - 2p) - 2p\alpha \\ &= (p^2 - 2p)\alpha - 2p^2 \\ &= p(p-2)\alpha - 2p^2\end{aligned}$$

ここで, $\alpha = a + bi$ とすると,

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= p(p-2)(a+bi) - 2p^2 \\ &= p(p-2)a - 2p^3 + p(p-2)i\end{aligned}$$

α^3 は実数だから, $p(p-2) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①かつ②より, $p = 2$

補足

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を α とすると,

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha = 0$$

$$a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 = 0$$

$\vdots$

$$a\alpha^{n+1} + b\alpha^n + c\alpha^{n-1} = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

次数下げ等に役立つ