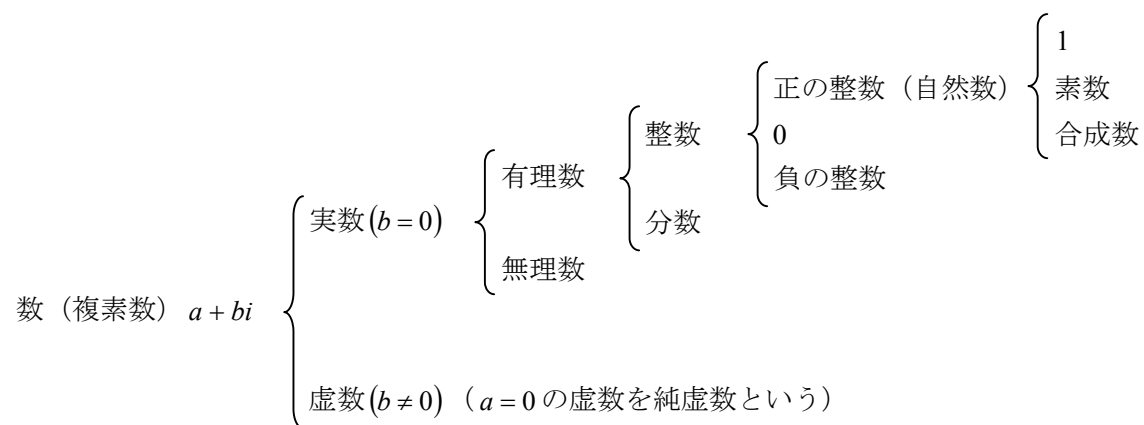


複素数と方程式 3 解と係数の関係

数の分類



自然数の世界：加・乗が常に可能

整数の世界：加・減・乗が常に可能

有理数の世界：加・減・乗・除（0 で割ることを除く）が常に可能

任意の 2 つの有理数の差を限りなく小さくとっても、その間に無数の有理数がある。

これを有理数の稠密性という。

無理数の世界：有理数ならば分数で表せる。よって、分数で表せないなら有理数ではない。

分数で表せない数を無理数という。

実数の世界：有理数と無理数をあわせて実数という。

有理数と無理数により、数直線上の数の隙間がなくなる。

これを実数の連続性という。

虚数の世界：実数ならば、負の実数の平方根は存在しないが、

虚数の世界では、負の実数の平方根が存在する。

数（複素数）の世界：実数と虚数をまとめて数（複素数）という。

106

(1)

他の解を α とおくと、解と係数の関係より、

$$\frac{1}{2} + \alpha = -\frac{10}{2} \quad \therefore \alpha = -\frac{11}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{p}{2} \quad \therefore p = \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \quad p = -\frac{11}{2}$$

(2)

他の解を α とおくと、解と係数の関係より、

$$1 + \sqrt{3}i + \alpha = -p \quad \therefore p = -1 - \sqrt{3}i - \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)\alpha = 4$$

$$\therefore \alpha = \frac{4}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{4}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3}$$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3}i)}{4}$$

$$= 1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{よって}, \quad \alpha = 1 - \sqrt{3}i$$

これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} p &= -1 - \sqrt{3}i - (1 - \sqrt{3}i) \\ &= -2 \end{aligned}$$

補足

2 次以上の方程式 $f(x)=0$ が $a+bi$ ($b \neq 0$) を解にもつならば,
その共役複素数 $a-bi$ も $f(x)=0$ の解である。

解説

これを理解するには、以下の複素数の性質について知っておく必要がある。

複素数 z の共役複素数は $\bar{z}$ で表すという約束がある。

したがって、 $\alpha = a+bi$ ならば $\bar{\alpha} = a-bi$, $\beta = p+qi$ ならば $\bar{\beta} = p-qi$ となる。

性質 1

x が実数とすると $x = \bar{x}$

証明

$\alpha = a+bi$, $\bar{\alpha} = a-bi$ において、 $b=0$ のとき、 $\alpha = \bar{\alpha} = a$

性質 2

$$\overline{m\alpha} = m\bar{\alpha}$$

証明

$$\begin{aligned}\overline{m\alpha} &= \overline{m(a+bi)} \\ &= \overline{ma + mbi} \\ &= ma - mbi \\ &= m(a-bi) \\ &= m\bar{\alpha}\end{aligned}$$

性質 3

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$$

証明

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a+p) \pm (b+q)i \text{ より,} \\ \overline{\alpha \pm \beta} &= \overline{(a+p) \pm (b+q)i} \\ &= (a-bi) \pm (p-qi) \\ &= \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}\end{aligned}$$

性質 4

$$\begin{aligned}\overline{\alpha^2} &= \overline{(a+bi)^2} \\ &= \overline{(a^2 - b^2) + 2abi} \\ &= (a^2 - b^2) - 2abi\end{aligned}$$

$$\text{一方, } (\bar{\alpha})^2 = (a-bi)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi$$

$$\text{よって, } \overline{\alpha^2} = (\bar{\alpha})^2$$

たとえば、方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が虚数解 α をもつならば $\bar{\alpha}$ も解であるが、これを性質 1 から 4 を使って示すと、

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \text{ より, } \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \bar{0}$$

$$\text{性質 1 より } \bar{0} = 0 \text{ だから, } \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = 0$$

左辺を、性質 2 と性質 3 を使って変形すると、

$$\begin{aligned} \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} &= \overline{a\alpha^3} + \overline{b\alpha^2} + \overline{c\alpha} + \bar{d} \\ &= \overline{a\alpha^3} + \overline{b\alpha^2} + c\bar{\alpha} + d \end{aligned}$$

$$\text{さらに、性質 4 を使って変形すると、} \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = a(\bar{\alpha})^3 + b(\bar{\alpha})^2 + c\bar{\alpha} + d$$

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = 0 \text{ だから, } a(\bar{\alpha})^3 + b(\bar{\alpha})^2 + c\bar{\alpha} + d = 0$$

これは、3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が $\bar{\alpha}$ を解にもつことを示している。

よって、虚数 α が 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解ならば $\bar{\alpha}$ も解である。

では、 n 次方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ($n=2,3,\dots$) が虚数 α を解にもつならば $\bar{\alpha}$ も解であることを自分で確認しよう。

107

$2+3i$ とその共役複素数 $2-3i$ が解だから、解と係数の関係より、

$$2+3i + (2-3i) = -a \quad \therefore a = 4$$

$$(2+3i)(2-3i) = b \quad \therefore b = 13$$

108

(1)

解法 1：解と係数の関係を利用する方法

与式について、解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 7$

$\alpha + 2 = A$, $\beta + 2 = B$ とおくと、求める方程式は A , B を解にもつ 2 次方程式だから、

その 1 つは $x^2 - (A+B)x + AB = 0$ と表せる。

これと $A+B = \alpha + \beta + 4 = 6$, $AB = (\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = 15$ より、

求める方程式は $x^2 - 6x + 15 = 0$

解法 2：解と係数の関係を利用しない方法（発展的）

$\alpha + 2 = A$ とおくと $\alpha = A - 2$

これと $\alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0$ より、 $(A-2)^2 - 2(A-2) + 7 = 0 \quad \therefore A^2 - 6A + 15 = 0$

$\beta + 2 = B$ において、同様に処理すると、 $B^2 - 6B + 15 = 0$

これは、2 次方程式 $x^2 - 6x + 15 = 0$ の解が A と B , すなわち $\alpha + 2$ と $\beta + 2$ であることを示している。 よって、求める 2 次方程式は $x^2 - 6x + 15 = 0$

(2)

解法 1 : 解と係数の関係を利用する方法

与式について、解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 7$

$-2\alpha = A$, $-2\beta = B$ とおくと、求める方程式は A , B を解にもつ 2 次方程式だから、

その 1 つは $x^2 - (A+B)x + AB = 0$ と表せる。

これと $A+B = -2\alpha + (-2\beta) = -2(\alpha + \beta) = -4$, $AB = -2\alpha \cdot (-2\beta) = 4\alpha\beta = 28$ より、

求める方程式は $x^2 + 4x + 28 = 0$

解法 2 : 解と係数の関係を利用しない方法 (発展的)

$$-2\alpha = A \text{ とおくと } \alpha = -\frac{A}{2}$$

$$\text{これと } \alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0 \text{ より, } \left(-\frac{A}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{A}{2}\right) + 7 = 0 \quad \therefore \frac{1}{4}(A^2 + 4A + 28) = 0$$

$$-2\beta = B \text{ において, 同様に処理すると, } \frac{1}{4}(B^2 + 4B + 28) = 0$$

これは、2 次方程式 $x^2 + 4x + 28 = 0$ の解が A と B , すなわち -2α と -2β であることを示している。

よって、求める 2 次方程式は $x^2 - 6x + 15 = 0$

(3)

解法 1 : 解と係数の関係を利用する方法

与式について、解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 7$

$\alpha^2 = A$, $\beta^2 = B$ とおくと、求める方程式は A , B を解にもつ 2 次方程式だから、

その 1 つは $x^2 - (A+B)x + AB = 0$ と表せる。

これと $A+B = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -10$, $AB = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 49$ より、

求める方程式は $x^2 + 10x + 49 = 0$

解法 2 : 解と係数の関係を利用しない方法 (発展的)

$$\alpha^2 = A \text{ とおくと } \alpha = \pm\sqrt{A}$$

$$\text{これと } \alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0 \text{ より, } A \pm 2\sqrt{A} + 7 = 0$$

$$\text{よって, } A + 7 = \pm 2\sqrt{A} \Rightarrow (A + 7)^2 = (\pm 2\sqrt{A})^2 \Leftrightarrow A^2 + 14A + 49 = 4A \Leftrightarrow A^2 + 10A + 49 = 0$$

$$\beta^2 = B \text{ において, 同様に処理すると, } B^2 + 10B + 49 = 0$$

これは、2 次方程式 $x^2 + 10x + 49 = 0$ の解が A と B , すなわち α^2 と β^2 であることを示している。

よって、求める 2 次方程式は $x^2 + 10x + 49 = 0$

109

$x^2 - 5x + 5 = 0$ の解は、解の公式より、 $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

$\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ の小数部分について

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow 5 + 2 < 5 + \sqrt{5} < 5 + 3$$

$$\Leftrightarrow 7 \times \frac{1}{2} < (5 + \sqrt{5}) \times \frac{1}{2} < 8 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3.5 < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} < 4$$

よって、 $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ の整数部分は 3

これより、 $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ の小数部分は $\frac{5 + \sqrt{5}}{2} - 3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ の小数部分について

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow -3 < \sqrt{5} < -2$$

$$\Leftrightarrow 5 + (-3) < 5 + (-\sqrt{5}) < 5 + (-2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2} < (5 - \sqrt{5}) \times \frac{1}{2} < 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < 1.5$$

よって、 $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ の整数部分は 1

これより、 $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ の小数部分は $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

したがって、 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ と $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ を解とする 2 次方程式を作ればよい。

たとえば、 $\left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0$ は $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ と $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ を解にもつ。

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)x + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + \sqrt{5} - 2 = 0 \end{aligned}$$

よって、 $x^2 - x + \sqrt{5} - 2 = 0$

110

$x^2 + ax + b = 0$ の解を α , β とすると, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = -a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = b \quad \cdots \textcircled{2}$$

$x^2 + bx + a - 6 = 0$ は $\alpha + 1$ と $\beta + 1$ を解にもつから, 解と係数の関係より,

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = -b \quad \therefore \alpha + \beta + 2 = -b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = a - 6 \quad \therefore \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = a - 6 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{を}\textcircled{3} \text{に代入し, 整理すると, } a - b = 2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を}\textcircled{4} \text{に代入し, 整理すると, } 2a - b = 6 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{を解くことにより, } a = 4, b = 2$$

別解

$\alpha + 1$, $\beta + 1$ を解にもつ x^2 の係数が 1 の 2 次方程式 $\Leftrightarrow x^2 + bx + a - 6 = 0$

より, 108 に示した方法で, $\alpha + 1$ と $\beta + 1$ を解にもつ x^2 の係数が 1 の 2 次方程式を作り,

$x^2 + bx + a - 6 = 0$ と係数比較すればよい。

111

$x^2 - px + 2 = 0$ の解を α , β とすると, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = p \quad \cdots \textcircled{1} \quad \alpha\beta = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$x^2 - 5x + q = 0$ は $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を解にもつから, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$(\alpha + \beta)\alpha\beta = q \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を}\textcircled{3} \text{に代入し, 整理すると, } p = 3 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を}\textcircled{4} \text{に代入し, 整理すると, } 2p = q \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{を解くことにより, } p = 3, q = 6$$

112

もとの正しい 2 次方程式の解を α と β とすると, その 2 次方程式は $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ を, すなわち $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$ を満たす。

A 君が $x^2 - px + q = 0$ を満たす方程式を解いたとすると,

1 次の項は正しく読んだから $p = \alpha + \beta$

これと, A 君が解いた方程式の解と係数の関係より, $p = -3 + \sqrt{14} + (-3 - \sqrt{14}) = -6$

$$\text{よって, } \alpha + \beta = -6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

B 君が $x^2 - rx + s = 0$ を満たす方程式を解いたとすると,

定数項は正しく読んだから $q = \alpha\beta$

これと, B 君が解いた方程式の解と係数の関係より, $q = 1 \cdot 5 = 5$

$$\text{よって, } \alpha\beta = 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より, もとの正しい 2 次方程式は } x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \therefore x = -5, -1$$

113

(1)

$$\begin{aligned}
 x^4 - 3x^2 + 2 &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) \\
 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 - 2) \quad (\text{ア}) \\
 &= (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \quad (\text{イ}) \quad (\text{ウ})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 6x^4 - 7x^2 - 3 &= (2x^2 - 3)(3x^2 + 1) \quad (\text{ア}) \\
 &= (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(3x^2 + 1) \quad (\text{イ}) \\
 &= (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x - i)(\sqrt{3}x + i) \quad (\text{ウ})
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4 &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \quad (\text{ア}) \quad (\text{イ}) \\
 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)
 \end{aligned}$$

続いて $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ を複素数の範囲で因数分解する。

方法 1: $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ とすると, } x^2 - 2x + 2 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ の解は, 解の公式により, } x = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

$$\text{よって, } x^2 - 2x + 2 = \{x - (1 + i)\}\{x - (1 - i)\} = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

$$\text{同様にして, } x^2 + 2x + 2 = \{x - (-1 + i)\}\{x - (-1 - i)\} = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

$$\text{ゆえに, } (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

方法 2: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) &= \{(x - 1)^2 + 1\}\{(x + 1)^2 + 1\} \\
 &= \{(x - 1) - i\}\{(x - 1) + i\}\{(x + 1) - i\}\{(x + 1) + i\} \\
 &= (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)
 \end{aligned}$$

方法 1 または 2 により,

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i) \quad (\text{ウ})$$

114

(1)～(3)共通

判別式を D とすると,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (m-3)^2 - 4m \\ &= m^2 - 10m + 9 \\ &= (m-1)(m-9)\end{aligned}$$

解と係数の関係より, $\alpha + \beta = 2(m-3)$, $\alpha\beta = 4m$

(1)

$$D > 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad \alpha\beta > 0$$

$$D > 0 \text{ より, } m < 1, \quad m > 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta > 0 \text{ より, } m > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta > 0 \text{ より, } m > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\text{かつ}\textcircled{2}\text{かつ}\textcircled{3} \text{ より, } m > 9$$

(2)

$$D > 0, \quad \alpha + \beta < 0, \quad \alpha\beta > 0$$

$$D > 0 \text{ より, } m < 1, \quad m > 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta < 0 \text{ より, } m < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta > 0 \text{ より, } m > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\text{かつ}\textcircled{2}\text{かつ}\textcircled{3} \text{ より, } 0 < m < 1$$

(3)

$$D > 0, \quad \alpha\beta < 0$$

$$D > 0 \text{ より, } m < 1, \quad m > 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ より, } m < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\text{かつ}\textcircled{2} \text{ より, } m < 0$$

115

(1)~(3)共通

判別式を D とすると,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= m^2 - 2m^2 + 5 \\ &= -m^2 + 5\end{aligned}$$

解と係数の関係より, $\alpha + \beta = -2m$, $\alpha\beta = 2m^2 - 5$

(1)

$$D > 0, (\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0, (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

$$D > 0 \text{ より, } -m^2 + \sqrt{5} > 0 \quad \therefore -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0$$

$$\text{これと } (\alpha - 1) + (\beta - 1) = \alpha + \beta - 2 = -2m - 2 \text{ より, } -2m - 2 > 0 \quad \therefore m < -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

これと

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 2m^2 - 5 + 2m + 1 \\ &= 2m^2 + 2m - 4 \\ &= 2(m^2 + m - 2) \\ &= 2(m - 1)(m + 2)\end{aligned}$$

$$\text{より, } (m - 1)(m + 2) > 0 \quad \therefore m < -2, \quad m > 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{かつ} \textcircled{3} \text{より, } -\sqrt{5} < m < -2$$

(2)

$$D > 0, (\alpha - 1) + (\beta - 1) < 0, (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

$$D > 0 \text{ より, } -m^2 + \sqrt{5} > 0 \quad \therefore -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) < 0$$

$$\text{これと } (\alpha - 1) + (\beta - 1) = -2m - 2 \text{ より, } -2m - 2 > 0 \quad \therefore m > -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

$$\text{これと } (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2(m - 1)(m + 2) \text{ より, } (m - 1)(m + 2) > 0 \quad \therefore m < -2, \quad m > 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{かつ} \textcircled{3} \text{より, } 1 < m < \sqrt{5}$$

(3)

$$D > 0, (\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$$

$$D > 0 \text{ より, } -m^2 + \sqrt{5} > 0 \quad \therefore -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$$

$$\text{これと } (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2(m - 1)(m + 2) \text{ より, } (m - 1)(m + 2) < 0 \quad \therefore -2 < m < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より, } -2 < m < 1$$

116

与式の x^2 の係数が 3 であることから、条件より、

$$(x+1)(x-1) + (x-1)(x-2) + (x-2)(x+1) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$x=2 \text{ を代入すると, } 3 = 3(2-\alpha)(2-\beta) \text{ より, } (2-\alpha)(2-\beta) = 1$$

$$(2-\alpha)(2-\beta) = (\alpha-2)(\beta-2) \text{ だから, } (\alpha-2)(\beta-2) = 1 \quad \therefore \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x=1 \text{ を代入すると, } -2 = 3(1-\alpha)(1-\beta) \text{ より, } (1-\alpha)(1-\beta) = -\frac{2}{3}$$

$$(1-\alpha)(1-\beta) = (\alpha-1)(\beta-1) \text{ だから, } (\alpha-1)(\beta-1) = -\frac{2}{3} \quad \therefore \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} = -\frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x=-1 \text{ を代入すると, } 6 = 3(-1-\alpha)(-1-\beta) \text{ より, } (-1-\alpha)(-1-\beta) = 2$$

$$(-1-\alpha)(-1-\beta) = (\alpha+1)(\beta+1) \text{ だから, } (\alpha+1)(\beta+1) = 2 \quad \therefore \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ より, } \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = 0$$

117

(1)

$$x^2 - xy - x + 2y - 2 = 0 \text{ とおき, } x \text{ について整理すると,}$$

$$x^2 - (y+1)x + 2y - 2 = 0$$

解の公式より,

$$x = \frac{y+1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(2y-2)}}{2}$$

$$= \frac{y+1 \pm \sqrt{y^2 - 6y + 9}}{2}$$

$$= \frac{y+1 \pm \sqrt{(y-3)^2}}{2}$$

$$= \frac{y+1 \pm |y-3|}{2}$$

$$= \frac{y+1 \pm (y-3)}{2}$$

$$\therefore x = y-1, 2$$

$$\text{よって, } x^2 - (y+1)x + 2y - 2 = 0 \text{ は } (x-2)\{x-(y-1)\} = 0 \text{ と表せる。}$$

$$\text{ゆえに, } x^2 - (y+1)x + 2y - 2 = (x-2)(x-y+1)$$

(2)

 $2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y - 1 = 0$ とおき, x について整理すると,

$$2x^2 - (5y-1)x + 2y^2 + y - 1 = 0$$

解の公式より,

$$\begin{aligned} x &= \frac{5y-1 \pm \sqrt{(5y-1)^2 - 8(2y^2 + y - 1)}}{4} \\ &= \frac{5y-1 \pm \sqrt{9y^2 - 18y + 9}}{4} \\ &= \frac{5y-1 \pm \sqrt{9(y^2 - 2y + 1)}}{4} \\ &= \frac{5y-1 \pm \sqrt{9(y-1)^2}}{4} \\ &= \frac{5y-1 \pm 3\sqrt{(y-1)^2}}{4} \\ &= \frac{5y-1 \pm 3|y-1|}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2y - 1, \quad \frac{y+1}{2}$$

よって, $2x^2 - (5y-1)x + 2y^2 + y - 1 = 0$ は $2\{x - (2y-1)\}\left(x - \frac{y+1}{2}\right) = 0$ と表せる。

$$\text{ゆえに, } 2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y - 1 = (x - 2y + 1)(2x - y - 1)$$

118

(1)

 $x + y = 3$ ……① を $x + y + xy = -7$ に代入すると,

$$3 + xy = -7 \quad \therefore xy = -10 \quad \dots\dots ②$$

ここで, x, y を解とする t についての方程式は $(t-x)(t-y) = 0$ と表せる。これを展開すると $t^2 - (x+y)t + xy = 0$ となり, これと①, ②より, x, y を解とする t についての方程式 $t^2 - 3t - 10 = 0$ が得られる。

$$\text{これと } t^2 - 3t - 10 = (t+2)(t-5) \text{ より, } (t+2)(t-5) = 0 \quad \therefore t = -2, 5$$

$$\text{よって, } (x, y) = (-2, 5), (5, -2)$$

補足

上記の方法を理解することができた後は,

$$x + y = 3 \quad \dots\dots ① \text{ を } x + y + xy = -7 \text{ に代入すると, } 3 + xy = -7 \quad \therefore xy = -10 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より, x, y を解とする t についての方程式は $t^2 - 3t - 10 = 0$ と表せる。

$$\text{これと } t^2 - 3t - 10 = (t+2)(t-5) \text{ より, } (t+2)(t-5) = 0 \quad \therefore t = -2, 5$$

よって, $(x, y) = (-2, 5), (5, -2)$ と解けばよい。

別解

$$x+y=3 \text{ より, } y=-x+3$$

$$\text{これを } x+y+xy=-7 \text{ に代入すると, } x+(-x+3)+x(-x+3)=-7 \quad \therefore x^2-3x-10=0$$

$$\text{これと } x^2-3x-10=(x+2)(x-5) \text{ より, } (x+2)(x-5)=0 \quad \therefore x=-2, 5$$

$$\text{これと } y=-x+3 \text{ より, } (x,y)=(-2,5), (5,-2)$$

(2)

$$x^2+y^2=13 \text{ より, } (x+y)^2-2xy=13 \quad \therefore x+y=\pm\sqrt{2xy+13}$$

$$\text{これと } xy=6 \quad \cdots \text{ ① より,}$$

$$x+y=\pm 5 \quad \cdots \text{ ②}$$

①, ②より, x, y を解とする t についての方程式は

$$t^2-5t+6=0 \text{ または } t^2+5t+6=0 \text{ と表せる。}$$

$$\text{これと } t^2-5t+6=(t-2)(t-3), \quad t^2+5t+6=(t+2)(t+3) \text{ より,}$$

$$(t-2)(t-3)=0 \text{ または } (t+2)(t+3)=0$$

$$\text{よって, } (x,y)=(2,3), (3,2), (-2,-3), (-3,-2)$$

119

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+k=0 \text{ とおき, } x \text{ について整理すると,}$$

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0$$

解の公式より,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 4(-6y^2+7y+k)}}{2} \\ &= \frac{-y+1 \pm \sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0 \text{ は}$$

$$\left(x - \frac{-y+1-\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2} \right) \left(x - \frac{-y+1+\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2} \right) = 0 \text{ と表せる。}$$

したがって,

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+k \text{ を因数分解すると}$$

$$\left(x - \frac{-y+1-\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2} \right) \left(x - \frac{-y+1+\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2} \right)$$

となる。

これが x, y の 1 次式の積となるには,

$25y^2 - 30y - 4k + 1$ が完全平方式であればよい。

$$\begin{aligned} 25y^2 - 30y - 4k + 1 &= (25y^2 - 30y) - 4k + 1 \\ &= \{(5y - 3)^2 - 9\} - 4k + 1 \\ &= (5y - 3)^2 - 4k - 8 \end{aligned}$$

より,

$$-4k - 8 = 0 \text{ のとき, すなわち } k = -2 \text{ のとき, } 25y^2 - 30y - 4 \cdot (-2) + 1 = (5y - 3)^2$$

よって, $k = -2$ のとき

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{-y+1-\sqrt{(5y-3)^2}}{2} \right) \left(x - \frac{-y+1+\sqrt{(5y-3)^2}}{2} \right) &= \left(x - \frac{-y+1-|5y-3|}{2} \right) \left(x - \frac{-y+1+|5y-3|}{2} \right) \\ &= \left(x - \frac{-y+1 \mp (5y-3)}{2} \right) \left(x - \frac{-y+1 \pm (5y-3)}{2} \right) \end{aligned}$$

ゆえに, $k = -2$ のとき、与式は $(x + 3y - 2)(x - 2y + 1)$ に因数分解できる。

補足：赤色枠の別解

$25y^2 - 30y - 4k + 1$ は完全平方式であるためには,

$25y^2 - 30y - 4k + 1 = 0$ が重解をもてばよい。

たとえば, 重解を α とすると, $25y^2 - 30y - 4k + 1 = 0$ は $(y - \alpha)(y - \alpha) = 0$

すなわち $(y - \alpha)^2 = 0$ と表せるからである。

重解条件は, 判別式を D とすると, $D = 0$

$$\text{これと } \frac{D}{4} = 15^2 - 25(-4k + 1) = 100(k + 2) \text{ より, } 100(k + 2) = 0 \quad \therefore k = -2$$

このとき, $25y^2 - 30y - 4 \cdot (-2) + 1 = (5y - 3)^2$