複素数と方程式 5 高次方程式

138

(1)

$$P(x) = 4x^3 + 3x - 2 \text{ とし,}$$

$$P(x) \text{ に } \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}} \text{ を代入すると値が } 0 \text{ になるものを調べると } P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

よって、 $P(x)$ は $2x - 1$ を因数にもつ

$$\text{この因数で } P(x) \text{ を割ると、商は } 2x^2 + x + 2 \text{ だから、} P(x) = (2x - 1)(2x^2 + x + 2)$$

$$\text{求める解は } P(x) = 0 \text{ の解だから、} 2x - 1 = 0 \text{ または } 2x^2 + x + 2 = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

(2)

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2 \text{ とし,}$$

$$P(x) \text{ に } \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}} \text{ を代入すると値が } 0 \text{ になるものを調べると } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

よって、 $P(x)$ は $2x + 1$ を因数にもつ

$$\text{この因数で } P(x) \text{ を割ると商は } x^2 - 4x + 2 \text{ だから、} P(x) = (2x + 1)(x^2 - 4x + 2)$$

$$\text{求める解は } P(x) = 0 \text{ の解だから、} 2x + 1 = 0 \text{ または } x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{2}$$

(3)

$$P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 1 \text{ とし,}$$

$$P(x) \text{ に } \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}} \text{ を代入すると値が } 0 \text{ になるものを調べると } P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

よって、 $P(x)$ は $3x - 1$ を因数にもつ

$$\text{この因数で } P(x) \text{ を割ると商は } x^2 - 3x - 1 \text{ だから、} P(x) = (3x - 1)(x^2 - 3x - 1)$$

$$\text{求める解は } P(x) = 0 \text{ の解だから、} 3x - 1 = 0 \text{ または } x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}, 2 \pm \sqrt{2}$$

(4)

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) - 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ とおくと、} P(5) = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x - 5$ を因数にもつ

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) - 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 30 \end{aligned}$$

$$\text{より、} P(x) \text{ を } x - 5 \text{ で割った商は } x^2 - x + 6 \quad \therefore P(x) = (x - 5)(x^2 - x + 6)$$

$$\text{求める解は } P(x) = 0 \text{ の解だから、} x - 5 = 0 \text{ または } x^2 - x + 6 = 0 \quad \therefore x = 5, \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

別解

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ とおくと, } P(5) = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-5$ を因数にもつ

ここで $x-5 = t$ とおくと, $x = t+5$ より,

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x-3) - 4 \cdot 3 \cdot 2 &= (t+4)(t+3)(t+2) - 24 \\ &= t^3 + 9t^2 + 26t \\ &= t(t^2 + 9t + 26) \end{aligned}$$

$$t \text{ を } x-5 \text{ に戻すことにより, } P(x) = (x-5)(x^2 - x + 6)$$

$$\text{求める解は } P(x) = 0 \text{ の解だから, } x-5=0 \text{ または } x^2 - x + 6 = 0 \quad \therefore x = 5, \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

(5)

$$P(x) = (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 6 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \{(x^2 - 2x) - 3\} \{(x^2 - 2x) + 2\} \\ &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 2) \\ &= (x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

求める解は $P(x) = 0$ の解だから, $x+1=0$ または $x-3=0$ または $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\therefore x = -1, 3, 1 \pm i$$

(6)

$$P(x) = x^4 + x^2 + 1 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= \{(x^2 + 1) - x\} \{(x^2 + 1) + x\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

求める解は $P(x) = 0$ の解だから, $x^2 - x + 1 = 0$ または $x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(7)

$$P(x) = (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 5x + 9) + 15 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \{(x^2 - 5x) + 1\} \{(x^2 - 5x) + 9\} + 15 \\ &= (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 \\ &= \{(x^2 - 5x) + 4\} \{(x^2 - 5x) + 6\} \\ &= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

求める解は $P(x) = 0$ の解だから, $x-1=0$ または $x-2=0$ または $x-3=0$ または $x-4=0$

$$\therefore x = 1, 2, 3, 4$$

139

ω は $x^3 = 1$ の解だから, $\omega^3 = 1$

また, $x^3 = 1$ より, $x^3 - 1 = 0$

これと $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ より, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

よって, $x-1=0$ または $x^2 + x + 1 = 0$

このうち $x^2 + x + 1 = 0$ の解は $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ すなわち虚数である。

よって, ω は $x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。すなわち $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

以上より, 1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものを ω とすると,

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

(1)

$$\omega^6 + \omega^3 + 1 = (\omega^3)^2 + \omega^3 + 1$$

$$\text{これと } \omega^3 = 1 \text{ より, } \omega^6 + \omega^3 + 1 = 3$$

(2)

$$\begin{aligned} \omega^8 + \omega^4 + 1 &= \omega^6 \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega + 1 \\ &= (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega + 1 \end{aligned}$$

ここで $\omega^3 = 1$ より,

$$\therefore \omega^8 + \omega^4 + 1 = \omega^2 + \omega + 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ より, } \omega^8 + \omega^4 + 1 = 0$$

(3)

$$\begin{aligned} \omega^{200} + \omega^{100} &= \omega^{3 \cdot 66} \cdot \omega^2 + \omega^{3 \cdot 33} \cdot \omega \\ &= (\omega^3)^{66} \cdot \omega^2 + (\omega^3)^{33} \cdot \omega \end{aligned}$$

ここで $\omega^3 = 1$ より,

$$\omega^{200} + \omega^{100} = \omega^2 + \omega$$

これと $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より,

$$\omega^{200} + \omega^{100} = -1$$

140

$x=1$, 2 は $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ を満たすから,

$$1^4 - 3 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4 = 0 \quad \therefore a + b = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2^4 - 3 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 0 \quad \therefore 3a + b = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①かつ②を解くことにより, $a=0$, $b=6$

よって, 解くべき方程式は $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$ であり,

これが 1 と 2 を解にもつことから, 因数定理より,

$x^4 - 3x^3 + 6x - 4$ は $(x-1)(x-2)$ を因数にもつ。

これと $x^4 - 3x^3 + 6x - 4$ を $(x-1)(x-2)$ すなわち $x^2 - 3x + 2$ で割った商が $x^2 - 2$ より,

$$x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = (x-1)(x-2)(x^2 - 2)$$

よって, $(x-1)(x-2)(x^2 - 2) = 0$ の解で 1 と 2 以外の解を求めればよい。

ゆえに, $\pm\sqrt{2}$

141

ポイント 1

$a+bi$ が解ならばその共役複素数 $a-bi$ も解である。

解と係数の関係 3~4 ページ参照 <http://www.toitemita.sakura.ne.jp/4step/n4step2-2-3.pdf>

ポイント 2

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解を α, β, γ とすると,

因数定理より, $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ と $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ は恒等式であり,

これと $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma$ より,

$b = -a(\alpha + \beta + \gamma)$, $c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$, $d = -a\alpha\beta\gamma$

よって, $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

解

$3+2i$ が解だから, その共役複素数 $3-2i$ も解である。

もう 1 つの解を α とおくと,

解と係数の関係より,

$$(3+2i) + (3-2i) + \alpha = 5 \quad \therefore \alpha = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(3+2i)(3-2i) + \alpha(3+2i) + \alpha(3-2i) = a \quad \therefore 13 + 6\alpha = a \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha(3+2i)(3-2i) = -b \quad \therefore 13\alpha = -b \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

$a=7$, $b=13$, 他の解は -1 , $3-2i$

別解 1

$x = 3 + 2i$ を解にもつ 2 次方程式は、 $(x-3)^2 = (2i)^2$ より、 $x^2 - 6x + 13 = 0$
 $x^3 - 5x^2 + ax + b$ を $x^2 - 6x + 13$ で割ると、商と余りは $x+1, (a-7)x + b - 13$ となるから、
 $x^3 - 5x^2 + ax + b = (x^2 - 6x + 13)(x+1) + (a-7)x + b - 13 \quad \dots \textcircled{1}$
 $x = 3 + 2i$ は $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ と $x^2 - 6x + 13 = 0$ の解だから、
 $x = 3 + 2i$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、 $(a-7)(3+2i) + b - 13 = 0 \quad \therefore a = 7, b = 13$
これを $\textcircled{1}$ に代入すると、 $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = (x^2 - 6x + 13)(x+1)$
よって、他の解は $x+1=0$ の解、すなわち $x = -1$

別解 2

$3 + 2i$ は $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ を満たすから、
 $(3 + 2i)^3 - 5(3 + 2i)^2 + a(3 + 2i) + b = 0$
 $(3 + 2i)^3 - 5(3 + 2i)^2 + a(3 + 2i) + b = \{3^3 + (2i)^3 + 3 \cdot 6i(3 + 2i)\} - 5\{3^2 + 12i + (2i)^2\} + 3a + 2ai + b$
 $= (27 - 8i + 54i - 36) - 5(9 + 12i - 4) + 3a + b + 2ai$
 $= 3a + b - 34 + (2a - 14)i$
より、 $3a + b - 34 + (2a - 14)i = 0$
よって、 $3a + b - 34 = 0$ かつ $2a - 14 = 0 \quad \therefore a = 7, b = 13 \quad \dots \textcircled{\text{答}}$
これより $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ であり、 $x = -1$ はこれを満たすから、
 $x^3 - 5x^2 + 7x + 13$ は $x+1$ を因数にもつ。
これと $x^3 - 5x^2 + 7x + 13$ を $x+1$ で割ると商が $x^2 - 6x + 13$ であることから、
 $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = (x+1)(x^2 - 6x + 13)$
よって、 $(x+1)(x^2 - 6x + 13) = 0 \quad \therefore x = -1, 3 \pm 2i$
ゆえに、他の解は $-1, 3 - 2i \quad \dots \textcircled{\text{答}}$

142

他の解を α とおくと、解と係数の関係より、
 $\alpha + 2 + 2 = -a \quad \therefore \alpha = -a - 4 \quad \dots \textcircled{1}$
 $2\alpha + 2 \cdot 2 + 2\alpha = b \quad \therefore b = 4\alpha + 4 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\alpha \cdot 2 \cdot 2 = -(3a + 20) \quad \therefore 4\alpha = -3a - 20 \quad \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ より、 $a = 4, b = -28$, 他の解 $\alpha = -8$

別解

他の解を α とおくと、 $x^3 + ax^2 + bx + 3a + 20$ は $(x-2)^2$ と $x - \alpha$ を因数にもつ。
よって、 $x^3 + ax^2 + bx + 3a + 20 = (x-2)^2(x-\alpha)$
 $x^3 + ax^2 + bx + 3a + 20$ と $(x-2)^2(x-\alpha)$ は恒等式であり、
 $(x-2)^2(x-\alpha) = (x^2 - 4x + 4)(x-\alpha)$
 $= x^3 + (-\alpha - 4)x^2 + (4\alpha + 4)x - 4\alpha$
より、 $a = -\alpha - 4, b = 4\alpha + 4, 3a + 20 = -4\alpha$
これを解くことにより、 $a = 4, b = -28$, 他の解 $\alpha = -8$

143

解法 1 : 例題 13 の解法

$x^3 + 3x^2 + (a-4)x - a$ は x の 3 次式, a の 1 次式である。

因数分解は次数の低い文字について整理するのが鉄則であるから,

$x^3 + 3x^2 + (a-4)x - a$ を a について整理し, 因数分解を試みると,

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + (a-4)x - a &= a(x-1) + x^3 + 3x^2 - 4x \\ &= a(x-1) + x(x^2 + 3x - 4) \\ &= a(x-1) + x(x-1)(x+4) \\ &= (x-1)\{a + x(x+4)\} \\ &= (x-1)(x^2 + 4x + a) \end{aligned}$$

よって, 方程式は $(x-1)(x^2 + 4x + a) = 0$

【1】1 以外の重解をもつとき

$x^2 + 4x + a = 0$ が 1 以外の重解をもつことである。

判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 4 - a$

これと重解条件 $D = 0$ より, $4 - a = 0 \quad \therefore a = 4$

また, 重解を α とすると, 解と係数の関係より, $\alpha + \alpha = -\frac{4}{1}$

これと α は実数であることから, 重解 α は -2

よって, 適する。

補足

虚数解が重解をもつ 2 次方程式は $(x + a + bi)(x + a + bi) = 0$ の形となり,

$(x + a + bi)(x + a + bi) = x^2 + 2(a + bi)x + (a + bi)^2$ より, 実係数の方程式とならない。

【2】1 が重解のとき

$(x-1)(x^2 + 4x + a) = 0$ より, $x-1=0$ の解は 1 だから,

$x^2 + 4x + a = 0$ の 1 つの解が 1 で他の解が 1 でなければよい。

まず $x=1$ が $x^2 + 4x + a = 0$ を満たすことが必要であるから,

$$1^2 + 4 \cdot 1 + a = 0 \quad \therefore a = -5$$

このとき, $x^2 + 4x + a = 0$ は $x^2 + 4x - 5 = 0$ となり,

これと $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ より, $(x-1)(x+5) = 0$

よって, 解は 1 と -5 となり, 適する。

【1】, 【2】 から, $a = 4, -5$

解法 2 : 解と係数の関係を利用

重解を α , 他の解を β とおくと,

解と係数の関係より,

$$\alpha + \alpha + \beta = -3 \quad \therefore \beta = -2\alpha - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha = a - 4 \quad \therefore \alpha^2 + 2\alpha\beta = a - 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha \cdot \alpha \cdot \beta = a \quad \therefore \alpha^2\beta = a \quad \dots \textcircled{3}$$

①を③に代入すると,

$$\alpha^2(-2\alpha - 3) = a \quad \therefore a = -2\alpha^3 - 3\alpha^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

①, ④を②に代入すると,

$$\alpha^2 + 2\alpha(-2\alpha - 3) = -2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 \quad \therefore 2(\alpha^3 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\text{これと } \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \text{ より, } (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0 \quad \therefore \alpha = -2, 1$$

$$\text{これと①, ③より, } (\alpha, \beta, a) = (-2, 1, 4), (1, -5, -5)$$

これは条件を満たす。

ゆえに, $a = 4, -5$

144

求める長さ, すなわち立方体の1辺の長さを x cm とすると,

$$\text{条件より, } (x+1)(x-1)(x+2) = 1.5x^3 \quad (x > 0) \quad \therefore 2(x+1)(x-1)(x+2) = 3x^3 \quad (x > 0)$$

$$\text{これを } x \text{ について整理すると, } x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (x > 0)$$

$$\therefore (x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \quad (x > 0)$$

よって, x は $x - 2 = 0$ または $x^2 - 2x - 2$ を満たす正の数

$$\therefore x = 2, 1 + \sqrt{3}$$

ゆえに, 2cm または $1 + \sqrt{3}$ cm

145

求める複素数を $a + bi$ とすると, 条件より, $(a + bi)^2 = 8 + 6i$

$$\text{左辺を展開すると, } a^2 - b^2 + 2abi = 8 + 6i$$

よって,

$$a^2 - b^2 = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2ab = 6 \quad \therefore b = \frac{3}{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{を①に代入すると, } a^2 - \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 8 \quad \therefore \frac{a^4 - 8a^2 - 9}{a^2} = 0$$

$$\text{これと } a^4 - 8a^2 - 9 = (a^2 + 1)(a^2 - 9) \text{ より, } (a^2 + 1)(a^2 - 9) = 0$$

a は実数だから, $a = -3, 3$

$$\text{これと②より, } (a, b) = (-3, -1), (3, 1)$$

ゆえに, $-3 - i, 3 + i$

146

解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \quad \alpha\beta\gamma = -7$$

(1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{-7} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 3^2 - 2 \cdot (-2) \\ &= 13 \end{aligned}$$

(3)

解法 1: α, β, γ が $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$ であることを利用して次数下げ条件より,

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 - 2\beta + 7 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\gamma^3 - 3\gamma^2 - 2\gamma + 7 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

①+②+③より,

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + 21 = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha + \beta + \gamma) - 21 \\ &= 3 \cdot 13 + 2 \cdot 3 - 21 \\ &= 24 \end{aligned}$$

解法 2: 因数分解の公式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ を利用

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 3 \cdot \{13 - (-2)\} + 3 \cdot (-7) \\ &= 24 \end{aligned}$$

(4)

解法 1: $x - \alpha, x - \beta, x - \gamma$ が $x^3 - 3x^2 - 2x + 7$ の因数であることを利用

条件より, $x - \alpha, x - \beta, x - \gamma$ は $x^3 - 3x^2 - 2x + 7$ の因数だから,

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$x \text{ に } 1 \text{ を代入することにより, } 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

$$\text{よって, } (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 3$$

解法 2 : $(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)=t^3-t^2(\alpha+\beta+\gamma)+t(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma$ を利用

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) &= 1^3 - 1^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) + 1 \cdot (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 3 + (-2) - (-7) \\ &= 3\end{aligned}$$

解法 3 : 展開して整理

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) &= (1-\alpha)\{1-(\beta+\gamma)+\beta\gamma\} \\ &= 1 - (\beta+\gamma) + \beta\gamma - \alpha + \alpha(\beta+\gamma) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - (\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 3 + (-2) - (-7) \\ &= 3\end{aligned}$$

(5)

解法 1 : $\alpha + \beta + \gamma = 3$ と $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ を利用

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \text{ より, } (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (3 - \gamma)(3 - \alpha)(3 - \beta) \quad \dots \textcircled{1}$$

$x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の x に 3 を代入すると,

$$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 7 = (3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma)$$

$$(3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = 1$$

解法 2 : $\alpha + \beta + \gamma = 3$ と $(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)=t^3-t^2(\alpha+\beta+\gamma)+t(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma$ を利用

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) &= (3 - \gamma)(3 - \alpha)(3 - \beta) \\ &= 3^3 - 3^2(\alpha + \beta + \gamma) + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 27 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) - (-7) \\ &= 1\end{aligned}$$