複素数と方程式　演習問題

8

$z=a+bi$ （a,b は実数，$b>0$）とおき，条件式に代入すると，

$$i\cdot(a+bi)^2+2i\cdot(a+bi)+\frac{1}{2}+i=0$$

これと

$$\begin{aligned}i\cdot(a+bi)^2+2i\cdot(a+bi)+\frac{1}{2}+i&=i\cdot\left(a^2-b^2+2abi\right)+2ai-2b+\frac{1}{2}+i\\&=-2ab-2b+\frac{1}{2}+\left(a^2-b^2+2a+1\right)\cdot i\\&=-2b(a+1)+\frac{1}{2}+\left\{(a+1)^2-b^2\right\}\cdot i\end{aligned}$$

より，

$$-2b(a+1)+\frac{1}{2}+\left\{(a+1)^2-b^2\right\}\cdot i=0$$

よって，

$-2b(a+1)+\frac{1}{2}=0$ $\quad\therefore a+1=\frac{1}{4b}$ ・・・①（$\because b\neq 0$）

$(a+1)^2-b^2=0$ ・・・②

①を②に代入して整理すると，$\frac{1-16b^4}{16b^2}=0$ $\quad\therefore 1-16b^4=0$

これと $1-16b^4=\left(1+4b^2\right)(1-2b)(1+2b)$ より，$\left(1+4b^2\right)(1-2b)(1+2b)=0$

よって，$b>0$ より，$b=\frac{1}{2}$

このとき，①より，$a=\frac{1}{4b}-1=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

以上より，

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

9

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

また，$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$

(1)

解法 1：解と係数の関係

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}^2-2(\alpha\beta)^2\\&=\left\{1^2-2\cdot(-1)\right\}^2-2\cdot(-1)^2\\&=7\end{aligned}$$

解法 2：次数下げと解と係数の関係

$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$ より，$\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$

よって，

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2\\&=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2\\&=\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}+2(\alpha+\beta)+2\\&=\left\{1^2-2\cdot(-1)\right\}+2\cdot1+2\\&=7\end{aligned}$$

(2)

解法 1

$\alpha^2-\alpha-1=0$ と $\beta^2-\beta-1=0$ の両辺にそれぞれ α^3 と β^3 をかけると，

$\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3=0$，$\beta^5-\beta^4-\beta^3=0$

$\therefore\alpha^5=\alpha^4+\alpha^3$，$\beta^5=\beta^4+\beta^3$

よって，

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=\alpha^4+\alpha^3+\beta^4+\beta^3\\&=\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3\\&=7+(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=7+1^3-3\cdot(-1)\cdot1\\&=11\end{aligned}$$

解法 2

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=\left(\alpha^4+\beta^4\right)(\alpha+\beta)-\alpha\beta^4-\alpha^4\beta\\&=7\cdot1-\alpha\beta\left(\alpha^3+\beta^3\right)\\&=7-\alpha\beta\left\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right\}\\&=7-(-1)\cdot\left\{1^3-3\cdot(-1)\cdot1\right\}\\&=11\end{aligned}$$

(3)

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{1^2-4\cdot(-1)}$$
$$=\sqrt{5}$$

10

(1)

$3x^3-(a+3)x^2+a$ を a について整理し，因数分解すると，

$$3x^3-(a+3)x^2+a=-(x^2-1)a+3x^2(x-1)$$
$$=-(x-1)(x+1)a+3x^2(x-1)$$
$$=(x-1)\{3x^2-a(x+1)\}$$
$$=(x-1)(3x^2-ax-a)$$

より，

$(x-1)(3x^2-ax-a)=0$

よって， $x-1=0$ または $3x^2-ax-a=0$

したがって，条件より， $3x^2-ax-a=0$ が 1 でない異なる 2 つの実数解をもてばよい。

$3x^2-ax-a=0$ について，解が 1 でないから， $x=1$ は $3x^2-ax-a=0$ を満たさない。

すなわち $3\cdot1^2-a\cdot1-a\neq0 \quad \therefore a\neq\dfrac{3}{2}$ ・・・①

また，判別式を D とすると， $D=a^2-4\cdot3\cdot(-a)=a(a+12)$

これと $D>0$ より， $a(a+12)>0$ ・・・②

①かつ②より， $a<-12$， $0<a<\dfrac{3}{2}$， $\dfrac{3}{2}<a$

(2)

【1】3 重解をもつとき（「同じ 3 つの実数解」と解釈できるので不要かも？）

$3x^2-ax-a=0$ が重解 1 をもつから，

解と係数の関係より $1+1=-\dfrac{-a}{3} \quad \therefore a=6$ ・・・①

判別式を D とすると， $D=a^2-4\cdot3\cdot(-a)=a(a+12)$

これと $D=0$ より， $a=0$， -12 ・・・②

①と②を同時に満たす a は存在しない。

【2】1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつとき

実数解は 1 であり， $3x^2-ax-a=0$ は虚数解をもつから， $D<0 \quad \therefore -12<a<0$

【1】,【2】より， $-12<a<0$，実数解は 1

11

判別式をDとすると，$D=a^2-4b$

これと$D>0$より，$a^2-4b>0$　・・・①

$f(x)=0$の解がα,βであることから,

解と係数の関係は,

$\alpha+\beta=-a$　・・・②

$\alpha\beta=b$　・・・③

$f(x)=0$の解がα^2,β^2であることから,

解と係数の関係は,

$\alpha^2+\beta^2=-a$　$\therefore(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-a$ ・・・④

$\alpha^2\beta^2=b$　・・・⑤

②，④より，

$(-a)^2-2\alpha\beta=-a$　$\therefore a^2+a-2\alpha\beta=0$　・・・⑥

③，⑤より，$b^2=b$　$\therefore b(b-1)=0$

よって，bの値は0，1

【1】$b=0$のとき

$\alpha\beta=b=0$と⑥より，$a^2+a=0$　$\therefore a(a+1)=0$

$\therefore(a,b)=(0,0)$，$(-1,0)$

このうち①を満たすのは$(a,b)=(-1,0)$

【2】$b=1$のとき

$\alpha\beta=b=1$と⑥より，$a^2+a-2=0$　$\therefore(a-1)(a+2)=0$

$\therefore(a,b)=(1,1)$，$(-2,1)$

いずれも①を満たさない。

よって，【1】,【2】より，$a=-1$，$b=0$

12　相反方程式

(1)

$x=0$ のとき左辺＝1，右辺＝0

よって，$x=0$ は解ではない。すなわち $x\neq 0$

そこで，両辺を x^2 で割ると，$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$\begin{aligned}x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\\&=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}\right\}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\end{aligned}$$

より，

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

ここで $x+\frac{1}{x}=t$ おくことにより，

$$t^2-4t+3=0$$

(2)

$t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$ より，$(t-1)(t-3)=0$　$\therefore t=1,\ 3$

【1】$t=1$ のとき

$x+\frac{1}{x}=1$　$\therefore x+\frac{1}{x}-1=0$

これと $x+\frac{1}{x}-1=\frac{x^2+1-x}{x}$ より，$x^2-x+1=0$　$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

【2】$t=3$ のとき

$x+\frac{1}{x}=3$　$\therefore x+\frac{1}{x}-3=0$

これと $x+\frac{1}{x}-3=\frac{x^2+1-3x}{x}$ より，$x^2-3x+1=0$　$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

【1】,【2】より，解は $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

相反方程式とその解き方

相反方程式

整式の方程式を降べきの順あるいは昇べきの順に整理したとき，
係数が左右対称となる方程式
逆数方程式ともいう。

相反方程式の分類

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\quad(a\neq 0)$ ・・・①（偶数次の相反方程式）
$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0\quad(a\neq 0)$ ・・・②（奇数次の相反方程式）
解き方は，方程式が偶数次（①）と奇数次（②）で異なる。

相反方程式の解き方

注意
$x=0$ が相反方程式の解でないことを示してから，
偶数次あるいは奇数次の相反方程式を解く作業に入ること。

1．偶数次の相反方程式（①）の解き方

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

↓ 両辺を $x^2\ (x\neq 0)$ で割る。

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

↓ 係数について整理する。

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$a\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

↓ $x+\dfrac{1}{x}=y$ とおき，y についての 2 次方程式にする。

$$a\left(y^2-2\right)+by+c=0$$
$$ay^2+by-2a+c=0$$

↓

解 y と $y=x+\dfrac{1}{x}$ から解 x を求める。

2. 奇数次の相反方程式（②）の解き方

解き方のポイント：因数分解し，偶数次の相反方程式をつくる。

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ に $x=-1$ を代入すると，

$-a+b-c+c-b+a=0$ となるから，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は $x=-1$ を解にもつ。

すなわち，$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ は $x+1$ で割り切れる。

よって，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}$

ゆえに，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は，

$(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}=0$

と変形できる。

よって，

$x=-1$ 以外の解は，

偶数次の相反方程式：$ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a=0$

を解いて求めればよい。

重要

$x+\dfrac{1}{x}$ には，$x>0$ の条件が付けられていることがよくあるので注意しなければならない。

たとえば，

$y=x+\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ のとき，$ay^2+by-2a+c\ (a>0)$ の最小値を求めよ。

といった問題では，

相加平均≧相乗平均より，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ だから，

$y\geq 2$ の範囲で最小値を求めなければならない。

ともかく，

正の数が出てきたら，条件反射的に「相加平均≧相乗平均」を意識しよう。

13

解法 1

$A=\dfrac{1}{\alpha}$， $B=\dfrac{1}{\beta}$， $C=\dfrac{1}{\gamma}$ とおくと， $\alpha=\dfrac{1}{A}$， $\beta=\dfrac{1}{B}$， $\gamma=\dfrac{1}{C}$

これと α,β,γ が $x^3+x+10=0$ を満たすことから，

$\dfrac{1}{A^3}+\dfrac{1}{A}+10=0$

両辺に A^3 をかけ，整理すると $10A^3+A^2+1=0$

同様にして， $10B^3+B^2+1=0$， $10C^3+C^2+1=0$

これは方程式 $k\left(10x^3+x^2+1\right)=0$ （k は 0 でない実数）の解が A,B,C

すなわち $\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\gamma}$ であることを示している。

したがって，たとえば $k=1$ とすると，方程式 $10x^3+x^2+1=0$ ができる。

解法 2

解と係数の関係より， $\alpha+\beta+\gamma=0$， $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$， $\alpha\beta\gamma=-10$

$\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\gamma}$ を解とする方程式は $k\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta}\right)\left(x-\dfrac{1}{\gamma}\right)=0$（$k$ は 0 でない実数）と表せる。

これと

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\gamma}\right)&=x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\\&=x^3-\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}x^2+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\\&=x^3-\frac{1}{-10}x^2+0-\frac{1}{-10}\\&=x^3+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

より，

$\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\gamma}$ を解とする方程式は $k\left(x^3+\dfrac{1}{10}x^2+\dfrac{1}{10}\right)=0$

したがって，たとえば $k=10$ とすると，方程式 $10x^3+x^2+1=0$ ができる。