図形と方程式 2　平面上の点

159

$C(x, y)$とすると，3 辺の長さが等しいから AB＝BC＝CA

よって，AB^2＝BC^2＝CA^2 より，

$\{2-(-2)\}^2+(-2-2)^2=\{x-(-2)\}^2+(y-2)^2=(2-x)^2+\{-2-y\}^2$

$\therefore 32=x^2+4x+y^2-4y+8=x^2-4x+y^2+4y+8$

すなわち$\begin{cases} x^2+4x+y^2-4y+8=x^2-4x+y^2+4y+8 \\ x^2+4x+y^2-4y+8=32 \end{cases}$

$x^2+4x+y^2-4y+8=x^2-4x+y^2+4y+8$ より，$y=x$　・・・①

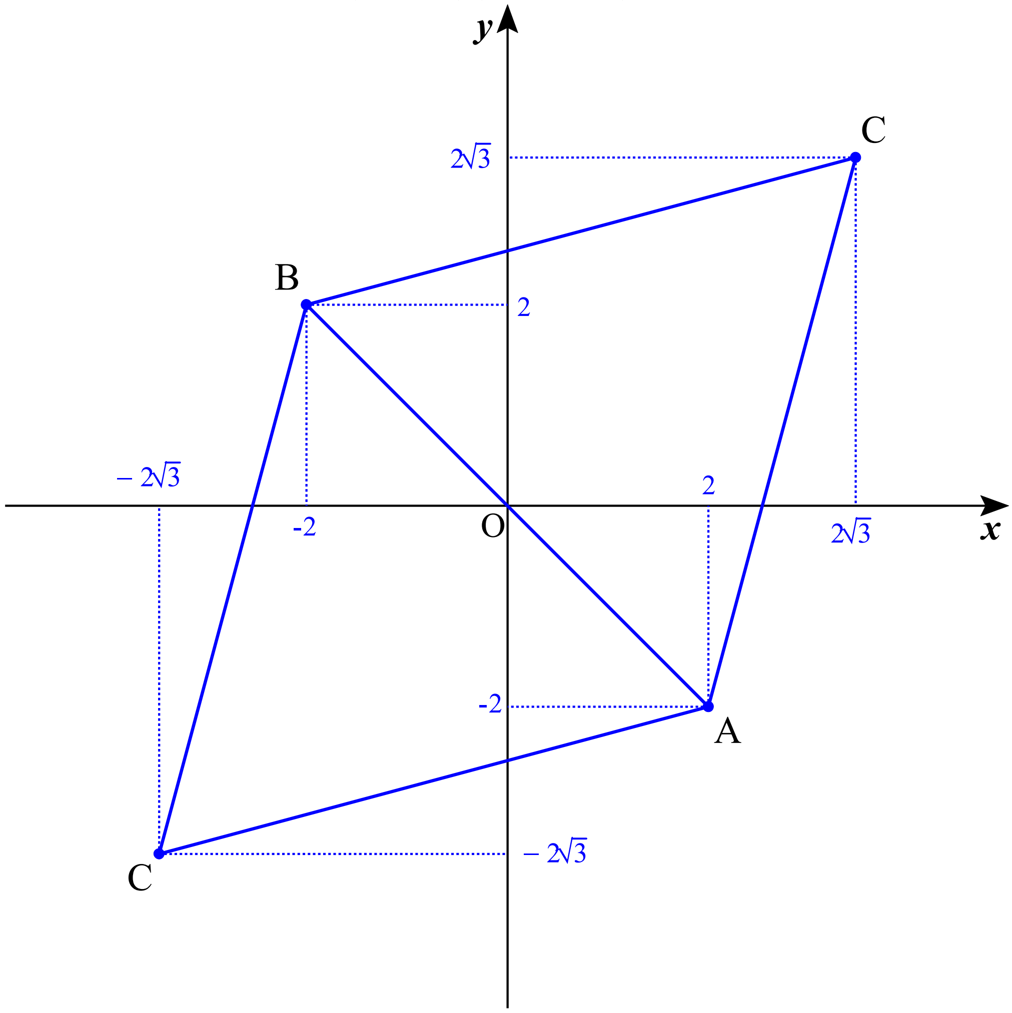
$x^2+4x+y^2-4y+8=32$ より，$x^2+4x+y^2-4y=24$　・・・②

①を②に代入すると，$x^2+4x+x^2-4x=24$　$\therefore 2x^2=24$

よって，$x=\pm 2\sqrt{3}$

これと①より，$y=\pm 2\sqrt{3}$

ゆえに，点 C の座標は，$(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), (-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$



160

$A(3,5)$，$B(2,-2)$，$C(-6,2)$，求める点を $P(x,y)$ とすると，

条件より，AP＝BP＝CP

よって，AP^2＝BP^2＝CP^2 より，

$(x-3)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+\{y-(-2)\}^2=\{x-(-6)\}^2+(y-2)^2$

$\therefore x^2-6x+y^2-10y+34=x^2-4x+y^2+4y+8=x^2+12x+y^2-4y+40$

すなわち $\begin{cases} x^2-6x+y^2-10y+34=x^2-4x+y^2+4y+8 \\ x^2-6x+y^2-10y+34=x^2+12x+y^2-4y+40 \end{cases}$

$x^2-6x+y^2-10y+34=x^2-4x+y^2+4y+8$ より，$x+7y=13$ ・・・①

$x^2-6x+y^2-10y+34=x^2+12x+y^2-4y+40$ より，$3x+y=-1$ ・・・②

②－3×①より，$-20y=-40$ $\therefore y=2$

これを①に代入して x を求めると，$x=-1$

よって，$P(-1,2)$

161

平行四辺形の対角線は，それぞれの対角線の中点で交わるから，

対角線 AC の中点と対角線 BD の中点が一致する。

よって，点 D の座標を $D(x,y)$ とすると，

対角線 AC の中点の座標は $\left(\dfrac{-2+3}{2},\dfrac{3+(-1)}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

対角線 BD の中点の座標は $\left(\dfrac{5+x}{2},\dfrac{4+y}{2}\right)$

より，

$\dfrac{5+x}{2}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=-4$

$\dfrac{4+y}{2}=1$ $\therefore y=-2$

よって，対角線の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$D(-4,-2)$

162

3 つの頂点を $\mathrm{A}(x_a, y_a)$，$\mathrm{B}(x_b, y_b)$，$\mathrm{C}(x_c, y_c)$

辺 AB，辺 BC，辺 CA の中点の座標をそれぞれ$(-1,-1)$，$(0,1)$，$(2,-2)$とすると，

$\left(\dfrac{x_a+x_b}{2}, \dfrac{y_a+y_b}{2}\right)=(-1,-1)$ $\therefore x_a+x_b=-2$ ・・・①，$y_a+y_b=-2$ ・・・②

$\left(\dfrac{x_b+x_c}{2}, \dfrac{y_b+y_c}{2}\right)=(0,1)$ $\therefore x_b+x_c=0$ ・・・③，$y_b+y_c=2$ ・・・④

$\left(\dfrac{x_a+x_c}{2}, \dfrac{y_a+y_c}{2}\right)=(2,-2)$ $\therefore x_a+x_c=4$ ・・・⑤，$y_a+y_c=-4$ ・・・⑥

①＋③＋⑤より

$2x_a+2x_b+2x_c=2$ $\therefore x_a+x_b+x_c=1$

これと①より $x_c=3$

よって，③より $x_b=-3$，⑤より $x_a=1$

②＋④＋⑥より

$2y_a+2y_b+2y_c=-4$ $\therefore y_a+y_b+y_c=-2$

これと②より $y_c=0$

よって，④より $y_b=2$，⑥より $y_a=-4$

以上より，3 頂点の座標は，$(1,-4)$，$(-3,2)$，$(3,0)$

163

$\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(a,0)$，$\mathrm{C}(b,c)$（a,b,c は任意の実数）とすると，

△ABC は任意の三角形を表し，その重心 G の座標は$\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$である。

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=a^2+b^2+c^2$

$$\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2=\left(\frac{-2a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2+\left(\frac{a-2b}{3}\right)^2+\left(-\frac{2c}{3}\right)^2+4\left\{\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right\}$$

$$=a^2+b^2+c^2$$

164

△ABC 頂点の座標を $\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(5a,0)$，$\mathrm{C}(5b,5c)$（a,b,c は任意の実数）とすると，

△ABC は任意の三角形を表し，

その重心の座標は$\left(\dfrac{0+5a+5b}{3},\dfrac{0+0+5c}{3}\right)=\left(\dfrac{5a+5b}{3},\dfrac{5c}{3}\right)$ ・・・①

また，$\mathrm{D}\left(\dfrac{2\cdot 0+3\cdot 5a}{3+2},0\right)=(3a,0)$，$\mathrm{E}\left(\dfrac{2\cdot 5a+3\cdot 5b}{3+2},\dfrac{2\cdot 0+3\cdot 5c}{3+2}\right)=(2a+3b,3c)$，

$\mathrm{F}\left(\dfrac{2\cdot 5b+3\cdot 0}{3+2},\dfrac{2\cdot 5c+3\cdot 0}{3+2}\right)=(2b,2c)$ より，

△DEF の重心の座標は$\left(\dfrac{3a+(2a+3b)+2b}{3},\dfrac{0+3c+2c}{3}\right)=\left(\dfrac{5a+5b}{3},\dfrac{5c}{3}\right)$ ・・・②

①，②より，△ABC と△DEF の重心は一致する。