図形と方程式 4　2 直線の関係

174

線分 AB の中点を通りかつ線分 AB に垂直な直線の方程式を求めればよい。

線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{-1+3}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(1,3)$

線分 AB の傾きは $\frac{2-4}{3-(-1)}=-\frac{1}{2}$ だから，線分 AB に垂直な直線の傾きは 2

よって，求める直線の方程式は $y=2(x-1)+3$ より， $y=2x+1$

175

(1)

辺 AB の垂直二等分線の方程式は，174 と同様にして，

$y=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)+2 \quad \therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{8}$　・・・①

辺 BC の垂直二等分線は x 軸に垂直だから，その方程式は $x=\frac{5}{2}$　・・・②

辺 CA の垂直二等分線の方程式は，174 と同様にして，

$y=\frac{1}{2}(x-4)+2 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x$　・・・③

②と③の交点の座標は $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$ であり，

これは①を満たす。

よって，3 直線は 1 点 $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$ で交わる。

(2)

頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の方程式

点 $A(3,4)$ を通り直線 BC（x 軸）に垂直な直線の方程式だから， $x=3$

頂点 B から辺 CA に下ろした垂線の方程式

点 $B(0,0)$ を通り直線 CA（傾き –2 ）に垂直な直線の方程式だから， $y=\frac{1}{2}x$

頂点 C から辺 AB に下ろした垂線の方程式

点 $C(5,0)$ を通り直線 AB（傾き $\frac{4}{3}$）に垂直な直線の方程式だから， $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

$x=3$ と $y=\frac{1}{2}x$ の交点は $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ であり，これは $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ を満たす。

よって，3 直線は 1 点 $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ で交わる。

176

(1)

係数の比が等しいから，$1：a＝a：a+2$　$\therefore a^2=a+2$　$\therefore a=-1,2$

(2)

係数の積の和（数学 B ベクトルで学習する「内積」の考え）が 0 だから，

$1\cdot a+a(a+2)=0$　$\therefore a^2+3a=0$　$\therefore a=0,-3$

177

3 直線が三角形を作らない場合には，

「3 直線が 1 点で交わる」「少なくとも 2 直線が平行」の場合がある。

3 直線が 1 点で交わる場合

$x+3y=2$ と $x+y=0$ の交点は $(-1,1)$ であり，

これが方程式 $ax-2y=-4$ を満たせばよいから，$-a-2=-4$　$\therefore a=2$

少なくとも 2 直線が平行

$x+3y=2$ と $x+y=0$ は平行でないから，

$ax-2y=-4$ が $x+3y=2$ または $x+y=0$ と平行であればよい。

$ax-2y=-4$ が $x+3y=2$ と平行ならば $a\cdot 3-(-2)\cdot 1=0$ より，$a=-\dfrac{2}{3}$

$ax-2y=-4$ が $x+y=0$ と平行ならば $a\cdot 1-(-2)\cdot 1=0$ より，$a=-2$

以上より，$a=-2,-\dfrac{2}{3},2$

178

(1)

ポイント

点 A と点 B の中点は $y=2x$ 上の点である。

直線 AB と $y=2x$ は直交する。

解

点 B の座標を (a,b) とすると，点 A と点 B の中点の座標は $\left(\dfrac{5+a}{2},\dfrac{0+b}{2}\right)=\left(\dfrac{a+5}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

この点は，条件より，$y=2x$ 上にあるから，$\dfrac{b}{2}=2\cdot\dfrac{a+5}{2}$　$\therefore 2a-b=-10$　・・・①

また，直線 AB と $y=2x$ が直交するから，直線 AB の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{b-0}{a-5}=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore a+2b=5$　・・・②

①かつ②より，$a=-3$，$b=4$　$\therefore \mathrm{B}(-3,4)$

(2)

ポイント

求める直線を m とすると，

$3x+y=15$ 上の任意の点と $y=2x$ に関して対称な点は m 上にある。

したがって，$3x+y=15$ 上の任意の 2 点と $y=2x$ に関してそれぞれ対称な点を通る直線が直線 m である。

$3x+y=15$ 上の任意の 2 点のうち 1 点は取り方については，

$3x+y=15$ と $y=2x$ の交点は直線 m 上の点でもあるから，

1 つの点は $3x+y=15$ と $y=2x$ の交点にすれば楽。

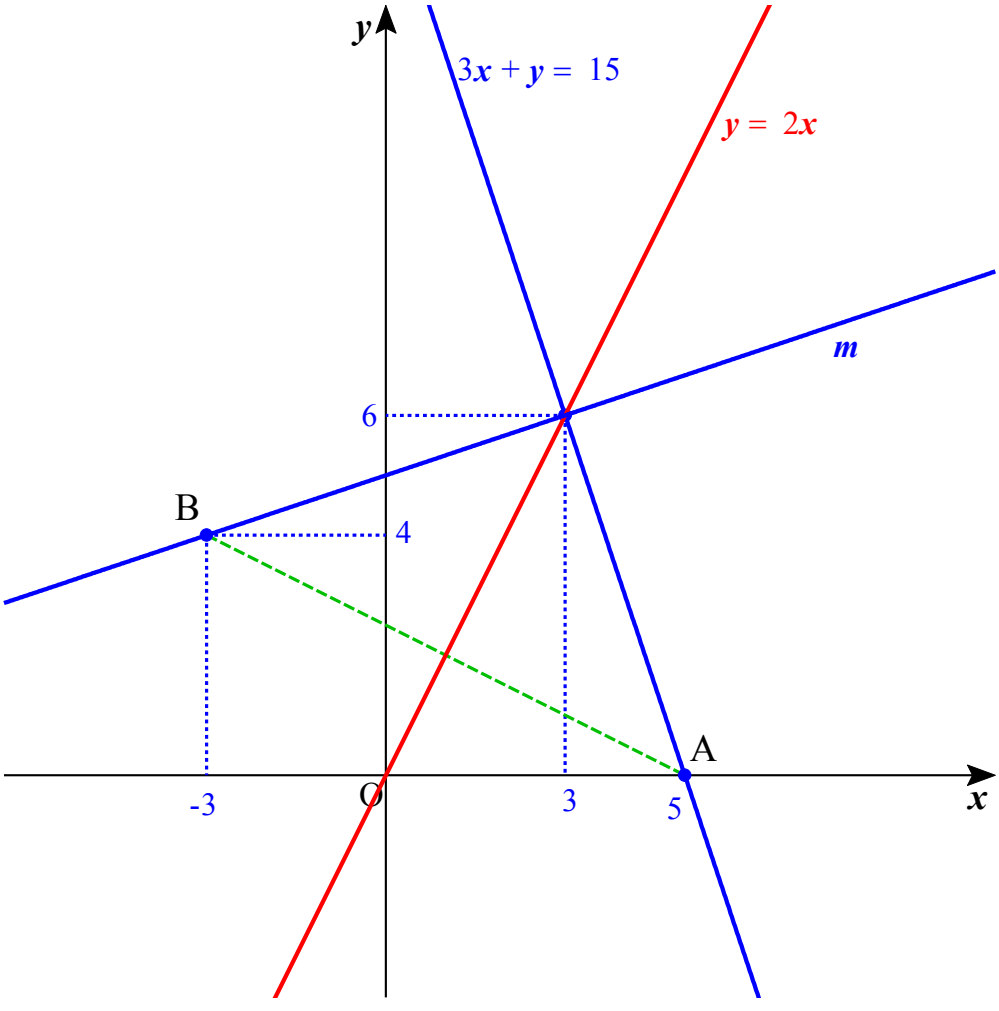
解

求める直線を m とすると，直線 m は $3x+y=15$ と $y=2x$ の交点 $(3,6)$ を通る。

また，幸いに，(1)の点 $\mathrm{A}(5,0)$ は $3x+y=15$ 上の点であり，これと対称な点は $\mathrm{B}(-3,4)$

よって，直線 m は，2 点 $(3,6)$，$(-3,4)$ を通る。

$\therefore y=\dfrac{4-6}{-3-3}(x-3)+6$　$\therefore x-3y=-15$



179

与式の左辺を k について整理すると，$(x+2y)k+2x-3y=5k-4$

この等式は，任意の k の値について成り立つから，k の恒等式である。

よって，$x+2y=5$，$2x-3y=-4$

これを解くと，$x=1, y=2$

ゆえに，定点の座標は $(1,2)$

180

ポイント

$$\begin{cases}8x+7y-19=0\\3x-5y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+7y-19=0\\p(8x+7y-19)+q(3x-5y+6)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-5y+6=0\\p(8x+7y-19)+q(3x-5y+6)=0\end{cases}$$

解

交点を求めるための連立方程式の解 $\begin{cases}8x+7y-19=0\\3x-5y+6=0\end{cases}$ は，

$8x+7y-19+k(3x-5y+6)=0$ （k は実数）を満たすから，

$8x+7y-19=0$ と $3x-5y+6=0$ の交点を通る直線の方程式は，

一般に，$8x+7y-19+k(3x-5y+6)=0$ （k は実数）と表すことができる。

とくに，$8x+7y-19+k(3x-5y+6)=0$ が点 $(-4,1)$ を通る場合，

$8\cdot(-4)+7\cdot1-19+k\{3\cdot(-4)-5\cdot1+6\}=0$ より，$k=-4$

よって，その直線の方程式は $8x+7y-19-4(3x-5y+6)=0$　$\therefore 4x-27y+43=0$

181

180 と同じ考えで，2 直線の交点を通る直線の方程式は一般に，実数 k を用いて，

$x-y+1+k(3x+2y-12)=0$ と表せる。

これを x, y について整理すると，$(3k+1)x+(2k-1)y-12k+1=0$

(1)

$3k+1:5=2k-1:-6$ より，$5(2k-1)=-6(3k+1)$　$\therefore k=-\dfrac{1}{28}$

$(3k+1)x+(2k-1)y-12k+1=0$ に $k=-\dfrac{1}{28}$ を代入し，整理することにより，

求める直線の方程式は $5x-6y+8=0$ とわかる。

(2)

$5\cdot(3k+1)+(-6)\cdot(2k-1)=0$ より，$k=-\dfrac{11}{3}$

これを $(3k+1)x+(2k-1)y-12k+1=0$ に代入し，整理すると $6x+5y-27=0$

182

直線 $x-y=1$ と直線 $2x-3y=1$ の交点の座標は，

連立方程式 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ を解くことにより $(2,1)$

よって，条件より $ax+by=1$ は点 $(2,1)$ を通るから， $2a+b=1$ ・・・①

一方，2 点 $(1,-1)$， $(2,-3)$ を通る直線の方程式は

$y=\dfrac{-3-(-1)}{2-1}(x-1)-1$ より， $y=-2x+1$ $\therefore 2x+y=1$ ・・・②

①，②より， (a,b) は $2x+y=1$ 上の点である。

ゆえに，与えられた 3 点は一直線上にある。

183

(1)

ポイント

3 点の任意の 2 点を選び，その 2 点間の距離（三角形の底辺の長さ）とその 2 点を通る直線の方程式を求める。

たとえば，3 点を A,B,C とし，選んだ 2 点を A,B とすると，

AB（底辺）の長さと直線 AB の式を求める。

残りの点と直線の距離（三角形の高さ）を求める。

点 C と直線 AB の距離（高さ）を求める。

得られた底辺の長さと高さから面積を求める。

解

$(-2,1)$ と $(2,-1)$ の距離は， $\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$

また，両点を通る直線の方程式は， $y=\dfrac{-1-1}{2-(-2)}(x-2)-1$ より， $y=-\dfrac{1}{2}x$ $\therefore x+2y=0$

$x+2y=0$ と $(0,4)$ の距離は $\dfrac{|0+2\cdot 4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

よって，底辺の長さが $2\sqrt{5}$，高さが $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ の三角形の面積を求めればよい。

ゆえに， $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{8}{\sqrt{5}}=8$

(2)

ポイント

三角形の 3 頂点の座標は各 2 直線の交点の座標を求めることにより得られる。

後の処理は，(1)と同じ。

184

ポイント

線分 AB（底辺）の長さと直線 AB の方程式を求める。

点 $\mathrm{P}\left(t, t^2+4t+11\right)$ と直線 AB の距離（高さ）を求める。

解

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$$

直線 AB の式は $y=\dfrac{3-1}{2-1}(x-1)+1$ より，$2x-y-1=0$

よって，放物線 $y=x^2+4x+11$ 上の点 P の座標を $\left(t, t^2+4t+11\right)$ とおくと，

点 P と直線 AB の距離は

$$\frac{\left|2t-\left(t^2+4t+11\right)-1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-t^2-2t-12\right|}{\sqrt{5}}$$

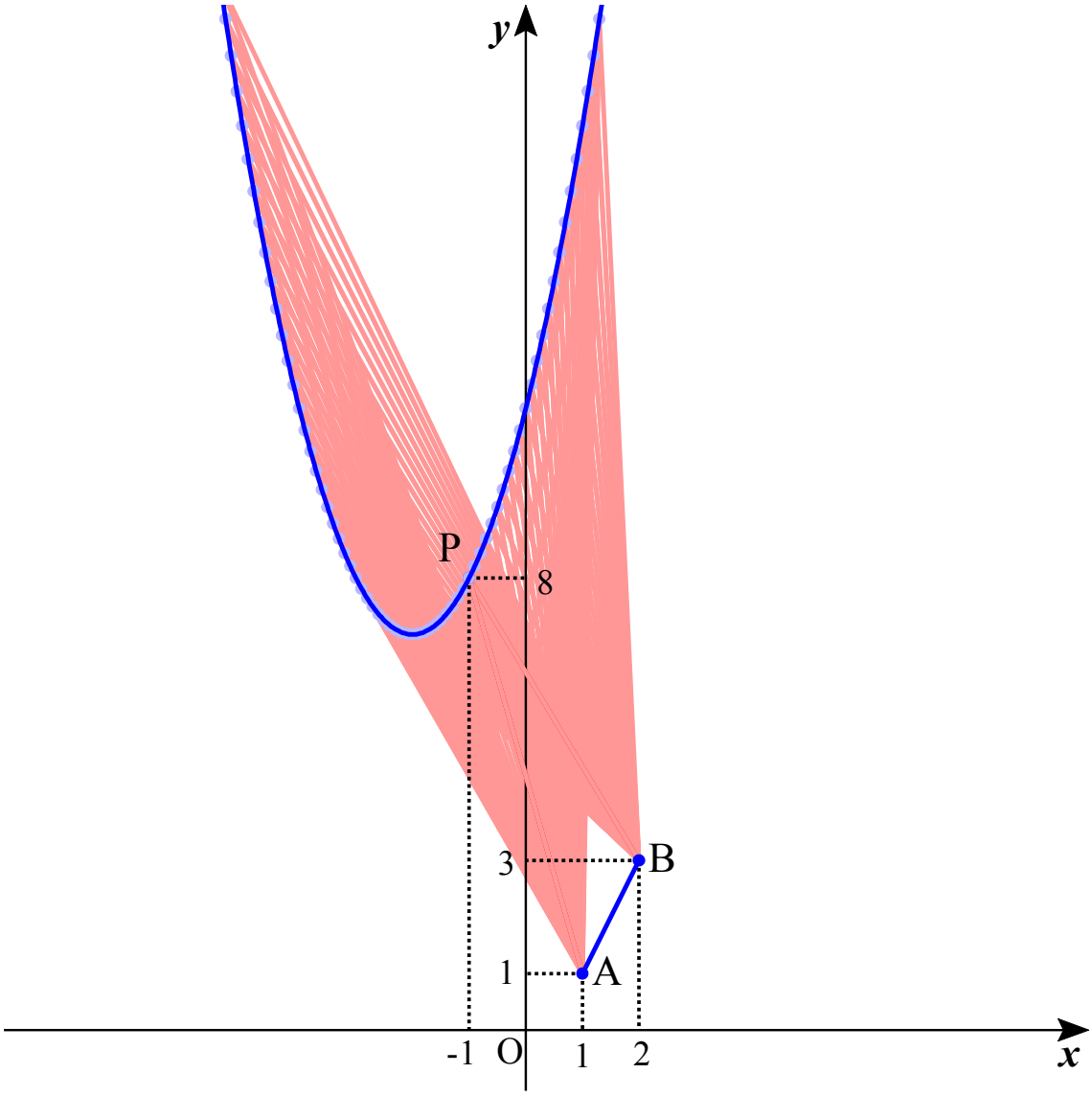
$$=\frac{\left|t^2+2t+12\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|(t+1)^2+11\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(t+1)^2+11}{\sqrt{5}}$$

よって，△PAB の面積は，t を用いて，$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{(t+1)^2+11}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2+\dfrac{11}{2}$ と表される。

ゆえに，$t=-1$ すなわち $\mathrm{P}(-1,8)$ のとき，△PAB の面積は最小値 $\dfrac{11}{2}$ をとる。


y
P
8
3
B
1
A
-1
O
1
2
x