図形と方程式 5　円の方程式

188

(1)

解法 1

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$ より，求める円の中心の座標は $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

これより，その円の半径を r とすると，$r^2=\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left\{2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}^2=\frac{41}{2}$

よって，その方程式は $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{41}{2}$

解法 2

中心が同じだから，求める円の方程式を $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ とすると，

点 $(1,\ 2)$ を通ることから，$1^2+2^2-3\cdot 1+5\cdot 2+a=0$　$\therefore a=-12$

ゆえに，$x^2+y^2-3x+5y-12=0$

(2)

条件より，

求める円の半径は，$x^2+y^2=1$ の半径と等しいから，1

その円の中心の座標を $(a,\ b)$ とすると，$(a,\ b)$ と $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ の中点が $(1,\ -3)$

だから，$\left(\frac{a+0}{2},\ \frac{b+0}{2}\right)=(1,\ -3)$　$\therefore (a,\ b)=(2,\ -6)$

よって，$(x-2)^2+(y+6)^2=1$

(3)

中心の座標を $(a,\ 0)$，半径を r とすると，

$r^2=(a-3)^2+5^2$　・・・①

$r^2=(a+3)^2+7^2$　・・・②

①，②より，$(a-3)^2+5^2=(a+3)^2+7^2$　$\therefore a=-2$

これを①に代入すると，$r^2=50$

よって，$(x+2)^2+y^2=50$

(4)

条件より，中心の座標を $(a,\ a)$ とすると，$(a-1)^2+(a-2)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$　$\therefore 2(a+1)(a-4)=0$

よって，

$(x+1)^2+(y+1)^2=13$

$(x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)

条件より，円の中心は $y=x$ （$y>0,\ x>0$）上にあるから，

その座標を $(a,\ a)$（$a>0$）とおくと，円の半径は a または $\sqrt{(a-1)^2+(a-2)^2}$ と表せる。

よって，$a^2=(a-1)^2+(a-2)^2$（$a>0$）　$\therefore a=1,\ 5$

ゆえに，

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(6)

解法 1

$x-y=-1$ と $x+y=3$ の交点の座標は $(1,\ 2)$　・・・①

$x-y=-1$ と $x+2y=-1$ の交点の座標は $(-1,\ 0)$　・・・②

$x+y=3$ と $x+2y=-1$ の交点の座標は $(7,\ -4)$　・・・③

外接円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とすると，

この方程式の解は①，②，③を満たすから，

$1^2+2^2+a\cdot 1+b\cdot 2+c=0$　$\therefore a+2b+c=-5$　・・・⑦

$(-1)^2+0^2+a\cdot(-1)+b\cdot 0+c=0$　$\therefore a-c=1$　・・・⑧

$7^2+(-4)^2+a\cdot 7+b\cdot(-4)+c=0$　$\therefore 7a-4b+c=-65$　・・・⑨

⑦，⑧，⑨より，

$a=-6,\ b=4,\ c=-7$

よって，$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

解法 2

$x-y=-1$ と $x+y=3$ の交点を A とすると，$\mathrm{A}(1,\ 2)$

$x-y=-1$ と $x+2y=-1$ の交点を B とすると，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$

$x+y=3$ と $x+2y=-1$ の交点を C とすると，$\mathrm{C}(7,\ -4)$

$x-y=-1$ と $x+y=3$ の傾きの積は -1 だから，この 2 直線のなす角，すなわち $\angle\mathrm{A}=90°$

したがって，辺 BC は△ABC の外接円の直径である。

よって，外接円の中心を D とすると，D は BC の中点だから，$\mathrm{D}\left(\dfrac{-1+7}{2},\ \dfrac{0+(-4)}{2}\right)=(3,\ -2)$

また，その半径を r とすると，$r^2=\mathrm{BD}^2=(-1-3)^2+\{0-(-2)\}^2=20$

ゆえに，外接円の方程式は $(x-3)^2+(y+2)^2=20$

189

略解

(1)

与式を変形すると，$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a+3}{2}\right)^2=-\frac{8a^2-6a-9}{4}$

$-\frac{8a^2-6a-9}{4}>0$ より，$8a^2-6a-9<0$

これと $8a^2-6a-9=(2a-3)(4a+3)$ より，$-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{2}$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{半径}&=\sqrt{-\frac{8a^2-6a-9}{4}}\\
&=\frac{\sqrt{-8a^2+6a+9}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{-8\left(a^2-\frac{3}{4}a\right)+9}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{-8\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{81}{8}}}{2}
\end{aligned}
$$

より，$a=\frac{3}{8}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{\frac{81}{8}}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$