図形と方程式 6　円と直線

192

解法 1

共有点をもつときの k の値の範囲

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $3x-y+k=0$ の距離が円の半径 5 以下であればよいから，

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \leq 5 \quad \therefore |k| \leq 5\sqrt{10}$$

ゆえに，$-5\sqrt{10} \leq k \leq 5\sqrt{10}$

接するときの k の値と接点の座標

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=5$ より，$k=\pm 5\sqrt{10}$

したがって，接線の方程式は $3x-y+5\sqrt{10}=0$ と $3x-y-5\sqrt{10}=0$

円の中心を O，$3x-y+5\sqrt{10}=0$ と円との接点を P とすると，

OP は $3x-y-5\sqrt{10}=0$ と垂直だから，直線 OP は原点を通る傾き $-\dfrac{1}{3}$ の直線である。

よって，その式は $y=-\dfrac{1}{3}x$

ゆえに，接点 P の座標は連立方程式 $\begin{cases} 3x-y-5\sqrt{10}=0 \\ y=-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ を解くことにより，$\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$3x-y-5\sqrt{10}=0$ と円との接点を Q とすると，

接点 Q の座標も同様にして求めることにより，$Q\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

補足

接点の座標を求めるだけでよいならば，$3x-y\pm 5\sqrt{10}=0$ と $y=-\dfrac{1}{3}x$ の交点より，

接点の x 座標は $3x-\left(-\dfrac{1}{3}x\right)\pm 5\sqrt{10}=0 \quad \therefore x=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

これを $y=-\dfrac{1}{3}x$ に代入することにより，接点の y 座標は $y=\mp\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

ゆえに，接点の座標は $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

解法 2

共有点をもつときの k の値の範囲

共有点の座標は連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=3x+k \end{cases}$の解である。

共有点の x 座標は $y=3x+k$ を $x^2+y^2=25$ に代入して得られる x についての 2 次方程式 $x^2+(3x+k)^2=25$ を解くことにより求められる。

ここで，$x^2+(3x+k)^2=25$ を整理すると，$10x^2+6kx+k^2-25=0$

この判別式を D とすると，方程式は実数解をもつから，実数解条件より，

$$\frac{D}{4}=9k^2-10(k^2-25)=-k^2+250\geq 0 \qquad \therefore -5\sqrt{10}\leq k\leq 5\sqrt{10}$$

また，このとき y も実数解をもつ。

よって，$-5\sqrt{10}\leq k\leq 5\sqrt{10}$

接するときの k の値と接点の座標

$D=0$ のとき接するから，$k=\pm 5\sqrt{10}$

$10x^2+6kx+k^2-25=0$ の重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=-\dfrac{6k}{10}$

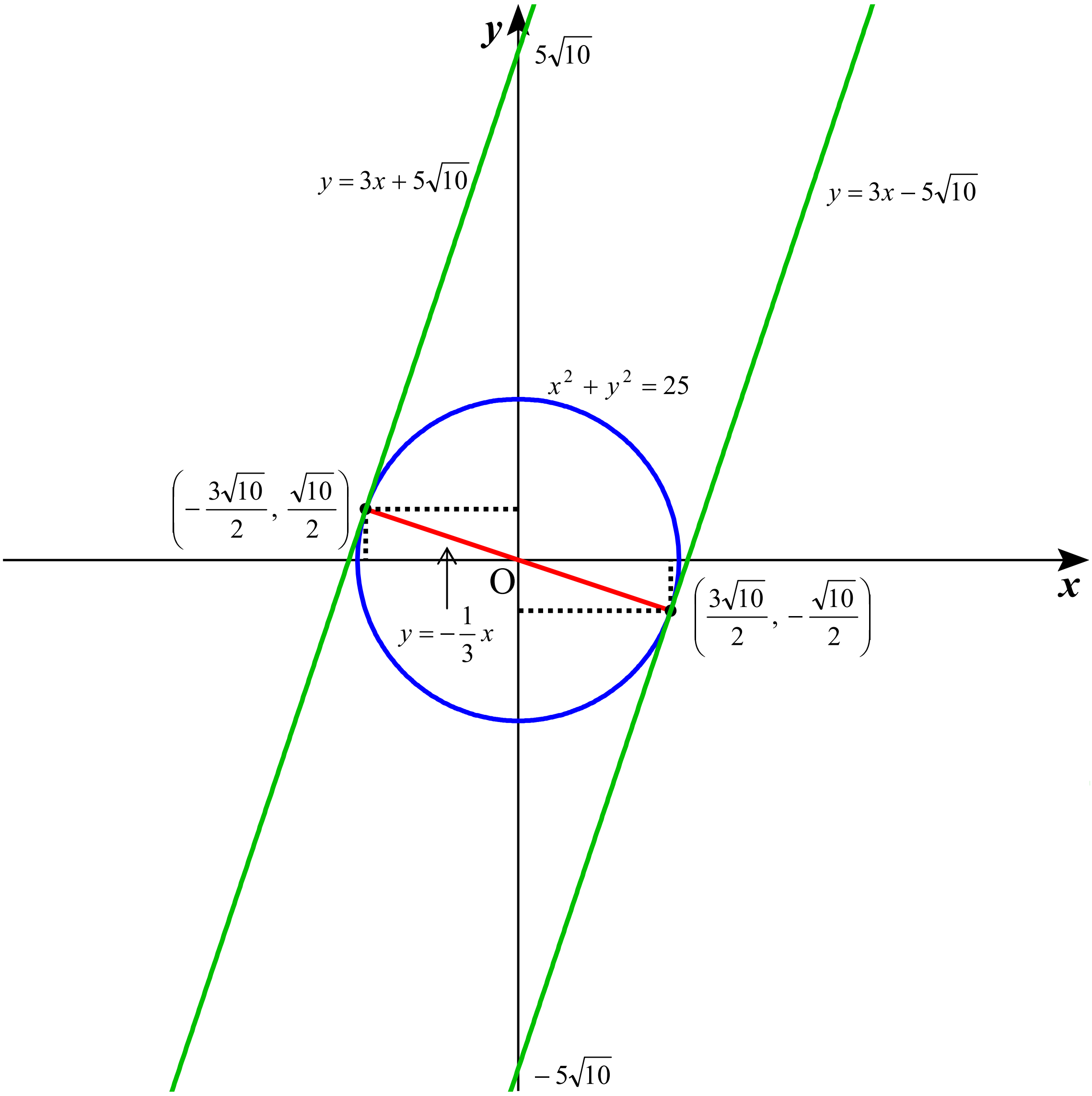
よって，

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3}{10}k \\ &= \mp\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} y &= 3\alpha+k \\ &= 3\cdot\left(\mp\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)\pm 5\sqrt{10} \\ &= \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

ゆえに，接点の座標は$\left(\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{2}, \mp\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$


y
$5\sqrt{10}$
$y = 3x + 5\sqrt{10}$
$y = 3x - 5\sqrt{10}$
$x^2 + y^2 = 25$
$\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
O
x
$y = -\frac{1}{3}x$
$\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$-5\sqrt{10}$

193

(1)

解法 1：円の中心と直線の距離と円の半径から解く

$x^2+y^2=1$，$-x-y+k=0$ より，

円の中心と直線の距離は $\dfrac{|k|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$，円の半径は 1

よって，

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>1$，すなわち $k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき共有点の数は 0

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$，すなわち $k=\pm\sqrt{2}$ のとき共有点の数は 1

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<1$，すなわち $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2},$ のとき共有点の数は 2

解法 2：判別式の利用

$y=-x+k$ を $x^2+y^2=1$ に代入して整理すると，$2x^2-2kx+k^2-1=0$

共有点の数は x の実数解の数で決まるから，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=-k^2+2$ より，

$-k^2+2<0$ のとき，すなわち $k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき共有点の数は 0

$-k^2+2=0$ のとき，すなわち $k=\pm\sqrt{2}$ のとき共有点の数は 1

$-k^2+2>0$ のとき，すなわち $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2},$ のとき共有点の数は 2

(2)

解法 1：円の中心と直線の距離と円の半径から解く

$x^2+(y+2)^2=4$，$kx-y+2=0$ より，

円の中心と直線の距離は $\dfrac{|k\cdot 0-(-2)+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{k^2+1}}$，円の半径は 2

よって，

$\dfrac{4}{\sqrt{k^2+1}}>2$，すなわち $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3},$ のとき共有点の数は 0

$\dfrac{4}{\sqrt{k^2+1}}=2$，すなわち $k=\pm\sqrt{3}$ のとき共有点の数は 1

$\dfrac{4}{\sqrt{k^2+1}}<2$，すなわち $k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき共有点の数は 2

解法 **2**：判別式の利用

$y=kx+2$ を $x^2+y^2+4y=0$ に代入して整理すると，$(k^2+1)x^2+8kx+12=0$

共有点の数は x の実数解の数で決まるから，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=4(k^2-3)$ より，

$k^2-3<0$ のとき，すなわち $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$, のとき共有点の数は 0

$k^2-3=0$ のとき，すなわち $k=\pm\sqrt{3}$ のとき共有点の数は 1

$k^2-3>0$ のとき，すなわち $k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき共有点の数は 2

194

ポイント

(1)

解法 **1**：円の接線の公式を利用

接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は $ax+by=4$

これが点 $(4,\ 2)$ を通るから，$4a+2b=4$　$\therefore b=-2a+2$　・・・①

$(a,\ b)$ は $x^2+y^2=4$ 上の点だから，$a^2+b^2=4$　・・・②

①，②より，$(a,\ b)=(0,\ 2),\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

これと接線の方程式 $ax+by=4$ より，

接点の座標が $(0,\ 2)$ のとき，接線の方程式は $y=2$

接点の座標が $\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$ のとき，接線の方程式は $4x-3y=5$

解法 **2**：円外の点から円に引いた **2** 本の接線の接点を結ぶ直線（極線）の方程式を利用

点 $(4,\ 2)$ から $x^2+y^2=4$ に引いた 2 接線の接点の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，それぞれの接線の方程式は $x_1x+y_1y=4$，$x_2x+y_2y=4$ であり，

いずれも点 $(4,\ 2)$ を通るから，$4x_1+2y_1=4$，$4x_2+2y_2=4$

よって，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ が $4x+2y=4$，すなわち $2x+y=2$ 上の点である。

これと $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ が $x^2+y^2=4$ 上の点であることから，

$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ は $2x+y=2$ と $x^2+y^2=4$ の交点である。

よって，連立方程式 $\begin{cases}2x+y=2\\x^2+y^2=4\end{cases}$ を解くことにより，接点の座標は $(0,\ 2),\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

これと接線の方程式より，

接点の座標が $(0,\ 2)$ のとき，接線の方程式は $y=2$

接点の座標が $\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$ のとき，接線の方程式は $4x-3y=5$

解法 3：円の中心と接線の距離＝円の半径

点 $(4,\ 2)$ を通る接線の方程式を $y = mx + n$ とすると，$2 = 4m + n$ より，$y = mx - 4m + 2$

円の中心と接線の距離は円の半径と等しいから $\dfrac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$　$\therefore |4m-2|^2 = \left(2\sqrt{m^2+1}\right)^2$

これを解くと，$m = 0,\ \dfrac{4}{3}$

$m = 0$ のとき

接線の方程式は $y = 2$

$y = 2$ は $x^2 + y^2 = 4$ を満たすから，$x^2 + 4 = 4$　$\therefore x = 0$

ゆえに，接点の座標は $(0,\ 2)$

$m = \dfrac{4}{3}$ のとき

接線の方程式は $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$

$y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$ は $x^2 + y^2 = 4$ を満たすから，$x^2 + \left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}\right)^2 = 4$　$\therefore x = \dfrac{8}{5}$

ゆえに，接点の座標は $\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

解法 4：判別式の利用

接線の方程式を $y = mx + n$ とすると，点 $(4,\ 2)$ を通ることから，$2 = 4m + n$

よって，$y = mx - 4m + 2$

これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入して整理すると，$(m^2+1)x^2 - 2(4m^2 - 2m)x + 16m^2 - 16m = 0$

判別式を D とすると，$D = 0$ より，$\dfrac{D}{4} = -4m(3m-4) = 0$　$\therefore m = 0,\ \dfrac{4}{3}$

$m = 0$ のとき

$y = mx - 4m + 2$ より，接線の方程式は $y = 2$

$y = 2$ は $x^2 + y^2 = 4$ を満たすから，$x^2 + 4 = 4$　$\therefore x = 0$

ゆえに，接点の座標は $(0,\ 2)$

$m = \dfrac{4}{3}$ のとき

接線の方程式は $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$

$y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$ は $x^2 + y^2 = 4$ を満たすから，$x^2 + \left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}\right)^2 = 4$　$\therefore x = \dfrac{8}{5}$

ゆえに，接点の座標は $\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

(2)

(1)の解法 1 で解く

接点の座標を$(a,\ b)$とすると，接線の方程式は$ax+by=10$

これが点$(-2,\ 4)$を通るから，$-2a+4b=10 \quad \therefore a=2b-5$　・・・①

$(a,\ b)$は$x^2+y^2=10$上の点だから，$a^2+b^2=10$　・・・②

①，②より，$(a,\ b)=(-3,\ 1),\ (1,\ 3)$

これと接線の方程式$ax+by=10$より，

接点の座標が$(-3,\ 1)$のとき，接線の方程式は$-3x+y=10$

接点の座標が$(1,\ 3)$のとき，接線の方程式は$x+3y=10$

(1)の解法 2 で解く

点$(-2,\ 4)$から$x^2+y^2=10$に引いた 2 接線の接点の座標をそれぞれ$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$

とすると，それぞれの接線の方程式は$x_1x+y_1y=10$，$x_2x+y_2y=10$であり，

いずれも点$(-2,\ 4)$を通るから，$-2x_1+4y_1=4$，$-2x_2+4y_2=10$

よって，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$は$-2x+4y=10$，すなわち$-x+2y=5$上の点である。

これと$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$が$x^2+y^2=10$上の点であることから，

$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$は$-x+2y=5$と$x^2+y^2=10$の交点である。

よって，連立方程式$\begin{cases}-x+2y=5\\x^2+y^2=10\end{cases}$を解くことにより，接点の座標は$(-3,\ 1),\ (1,\ 3)$

これと接線の方程式より，

接点の座標が$(-3,\ 1)$のとき，接線の方程式は$-3x+y=10$

接点の座標が$(1,\ 3)$のとき，接線の方程式は$x+3y=10$

解説

円の接線の公式

1．円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$

証明

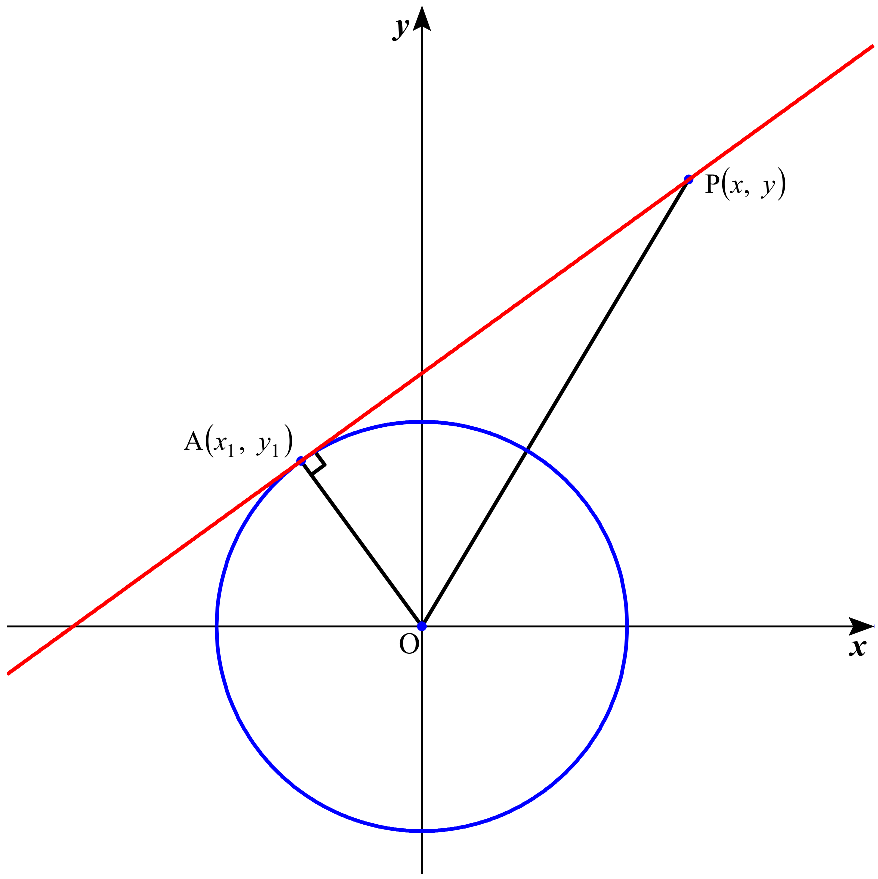
$x^2+y^2=r^2$ の中心を O，円周上の点 $A(x_1,\ y_1)$ における接線を l，l 上の A でない任意の点を $P(x,y)$ とすると，三角形 OAP は∠A＝90°，OP を斜辺とする直角三角形だから，三平方の定理より，$OP^2=OA^2+AP^2$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+y^2&=OA^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\\&=r^2+x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2\\&=x^2+y^2+r^2+\left(x_1^2+y_1^2\right)-2(x_1x+y_1y)\\&=x^2+y^2+r^2+r^2-2(x_1x+y_1y)\\&=x^2+y^2+2\left\{r^2-(x_1x+y_1y)\right\}\end{aligned}$$

$\therefore x_1x+y_1y=r^2$

これは $A(x_1,\ y_1)$ についても成り立つ。

ゆえに，接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$



2. 円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

証明

$x^2+y^2=r^2$上の点$(x_1',\ y_1')$における接線の方程式は$x_1'x+y_1'y=r^2$
$x^2+y^2=r^2$上の点をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動して点を$(X,\ Y)$すると，
$X=x+a,\ Y=y+b$より，$x=X-a,\ y=Y-b$
これを$x^2+y^2=r^2$に代入することにより，$(X-a)^2+(Y-b)^2=r^2$
$(X,\ Y)$もxy座標平面上の点だから，これを$(x,\ y)$に書き直すことにより，
$x^2+y^2=r^2$をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　・・・①
$x_1'x+y_1'y=r^2$上の点をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した点を$(X',\ Y')$，
このとき接点$(x_1',\ y_1')$は$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$に移動したとすると，
$X'=x+a,\ Y'=y+b$より，$x=X'-a,\ y=Y'-b$
$x_1=x_1'+a,\ y_1=y_1'+b$より，$x_1'=x_1-a,\ y_1'=y_1-b$
これを$x_1'x+y_1'y=r^2$に代入することにより，$(x_1-a)(X'-a)+(y_1-b)(Y'-b)=r^2$
$(X',\ Y')$を$(x,\ y)$に書き直すことにより，
$x_1'x+y_1'y=r^2$をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した接線の方程式は
$(x_1-a)(x-a)^2+(y_1-b)(y-b)^2=r^2$　・・・②
①，②より，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は
$(x_1-a)(x-a)^2+(y_1-b)(y-b)^2=r^2$

極線：円外の点から円に引いた 2 本の接線の接点を通る直線

円 C の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，C 外の点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とし，

P から C に引いた 2 つの接線の接点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とすると，

それぞれの接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$，$(x_2-a)(x-a)+(y_2-b)(y-b)=r^2$

両接線は点 P を通るから，

$(x_1-a)(\alpha-a)+(y_1-b)(\beta-b)=r^2$，$(x_2-a)(\alpha-a)+(y_2-b)(\beta-b)=r^2$

これは，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ が

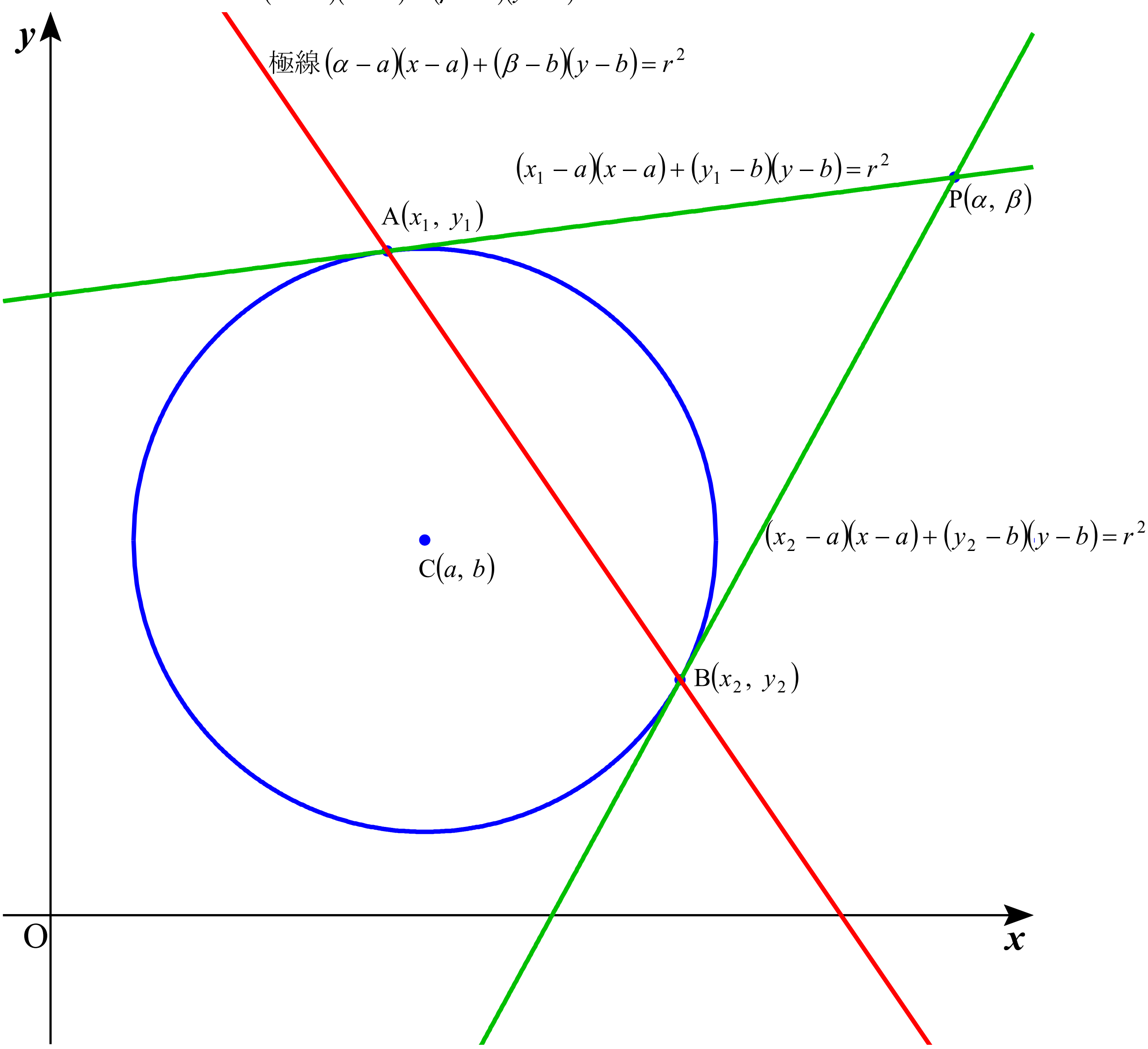
$(x-a)(\alpha-a)+(y-b)(\beta-b)=r^2$ 上の点であることを示している。

よって，

円 C の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，C 外の点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とし，

P から C に引いた 2 つの接線の接点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とすると，

直線 AB の方程式は $(\alpha-a)(x-a)+(\beta-b)(y-b)=r^2$



195

$(x+3)^2+(y-3)^2=13$ より，円の中心の座標は $(-3,\ 3)$

よって，点 $(-1,\ 0)$ と円の中心 $(-3,\ 3)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{3-0}{-3-(-1)}=-\dfrac{3}{2}$

求める接線はこの直線に垂直で点 $(-1,\ 0)$ を通るから，$y=\dfrac{2}{3}\{x-(-1)\}$　$\therefore 2x-3y+2=0$

196

(1)

接線の方程式を $y=2x+k$ とおくと，

接点の x 座標は $x^2+(2x+k)^2+2x+4(2x+k)-4=0$

すなわち $5x^2+2(2k+5)x+k^2+4k-4=0$ の重解である。

よって，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(2k+5)^2-5(k^2+4k-4)=-k^2+45=0$　$\therefore k=\pm 3\sqrt{5}$

$k=3\sqrt{5}$ のとき

接線の方程式は $y=2x+3\sqrt{5}$

$5x^2+2(2k+5)x+k^2+4k-4=0$ の重解を α とすると，

解と係数の関係より $2\alpha=-\dfrac{2(2k+5)}{5}$　$\therefore \alpha=-\dfrac{2k+5}{5}=-\dfrac{6\sqrt{5}+5}{5}$

よって，接点の x 座標は $\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5}$

これを $y=2x+3\sqrt{5}$ に代入することにより，接点の y 座標は $\dfrac{-10+3\sqrt{5}}{5}$

ゆえに，接点の座標は $\left(\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-3\sqrt{5}$ のとき

接線の方程式は $y=2x-3\sqrt{5}$

接点の座標は，$k=3\sqrt{5}$ のときと同様にして，$\left(\dfrac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)

接線の方程式を $y = mx$ とおくと，

接点の x 座標は $x^2 + (mx)^2 - 6x + 8 = 0$ すなわち $(m^2+1)x^2 - 6x + 8 = 0$ の重解である。

よって，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4} = 9 - 8(m^2+1) = -8m^2 + 1 = 0$ $\quad \therefore m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$m = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

$(m^2+1)x^2 - 6x + 8 = 0$ の重解を α とすると，

解と係数の関係より $2\alpha = \dfrac{6}{m^2+1}$ $\quad \therefore \alpha = \dfrac{3}{m^2+1} = \dfrac{3}{\frac{9}{8}} = \dfrac{8}{3}$

よって，接点の x 座標は $\dfrac{8}{3}$

これを $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ に代入することにより，接点の y 座標は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに，接点の座標は $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$m = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

接点の座標は，$m = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のときと同様にして，$\left(\dfrac{8}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

197　極線の方程式

$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$とすると，

A を接点とする接線の方程式は$x_1x+y_1y=25$

B を接点とする接線の方程式は$x_2x+y_2y=25$

いずれも点$(-1,\ 7)$を通るから，

$x_1\cdot(-1)+y_1\cdot 7=25\quad \therefore -x_1+7y_1=25$

$x_2\cdot(-1)+y_2\cdot 7=25\quad \therefore -x_2+7y_2=25$

これは，A，B が直線$-x+7y=25$上の点であることを示している。

ゆえに，直線 AB の方程式は$-x+7y=25$である。

198

(1)

円の半径は，点$(3,\ 0)$と直線$4x-3y-2=0$の距離だから，$\dfrac{|4\cdot 3-3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

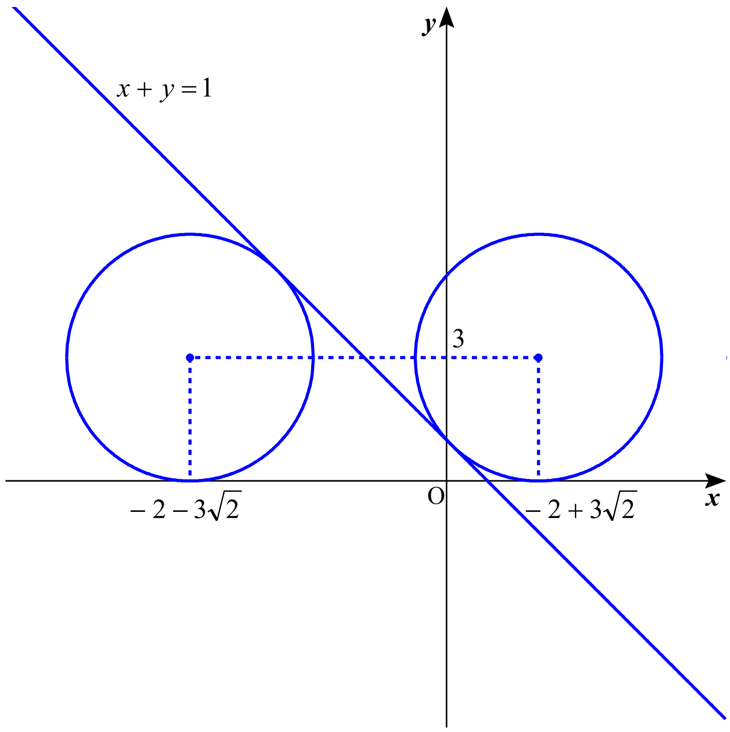
よって，$(x-3)^2+y^2=4$

(2)

x軸と接する半径 3 の円の中心のy座標は 3 だから，円の中心を$(a,\ 3)$とおくと，

$x+y-1=0$と$(a,\ 3)$の距離は円の半径，すなわち 3 だから，$\dfrac{|a+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\quad \therefore a=-2\pm 3\sqrt{2}$

よって，$\left(x+2-3\sqrt{2}\right)^2+(y-3)^2=9$，$\left(x+2+3\sqrt{2}\right)^2+(y-3)^2=9$



(3)

円の中心の座標を$(a,\ 3a)$とすると,

円の半径は,$(a,\ 3a)$と直線$2x+y=0$の距離と等しいから,$\dfrac{|2a+3a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|5a|}{\sqrt{5}}$

よって,円の方程式は$(x-a)^2+(y-3a)^2=\left(\dfrac{|5a|}{\sqrt{5}}\right)^2$,すなわち$(x-a)^2+(y-3a)^2=5a^2$

これが点$(2,\ 1)$を通るから,$(2-a)^2+(1-3a)^2=5a^2$　$\therefore 5(a-1)^2=0$

よって,$a=1$

ゆえに,$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

199

(1)

略解

解法 1

円の中心と直線の距離は$\dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$

これと円の半径が 2 であることから,

弦の長さは$2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$

$4x+3y-5=0$に垂直で円の中心$(0,\ 0)$を通る直線の方程式は$y=\dfrac{3}{4}x$であり,

弦の中点は,この直線と$4x+3y-5=0$との交点だから,

連立方程式$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ 4x+3y-5=0 \end{cases}$を解くことにより,その座標は$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

解法 2

$4x+3y-5=0$と$x^2+y^2=4$の交点のx座標は$x^2+\left(\dfrac{-4x+5}{3}\right)^2=4$

すなわち$25x^2-40x-11=0$の解である。

この解を$\alpha,\ \beta$とすると,交点の座標は$\left(\alpha,\ \dfrac{-4\alpha+5}{3}\right)$,$\left(\beta,\ \dfrac{-4\beta+5}{3}\right)$

よって,弦の長さは

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\left(\frac{-4\alpha+5}{3}-\frac{-4\beta+5}{3}\right)^2}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\frac{16}{9}(\alpha-\beta)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

ここで，解と係数の関係より $\alpha+\beta=\dfrac{40}{25}=\dfrac{8}{5}$， $\alpha\beta=-\dfrac{11}{25}$ だから，

弦の長さは $\dfrac{5}{3}\sqrt{\left(\dfrac{8}{5}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{11}{25}\right)}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{6\sqrt{3}}{5}=2\sqrt{3}$

また，弦の中点の座標は

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \frac{1}{2}\left(\frac{-4\alpha+5}{3}+\frac{-4\beta+5}{3}\right)\right)&=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5},\ \frac{1}{2}\left\{-\frac{4}{3}(\alpha+\beta)+\frac{10}{3}\right\}\right)\\&=\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}+\frac{10}{3}\right)\right)\\&=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

(2)

(1)の解法 1 で解くと，

$(x+2)^2+(y-1)^2=6$ より，円の中心と直線の距離は $\dfrac{|4\cdot(-2)+3\cdot1-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

これと円の半径が $\sqrt{6}$ であることから，

弦の長さは $2\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}=2\sqrt{2}$

$4x+3y-5=0$ に垂直で円の中心 $(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式は $y-1=\dfrac{3}{4}\{x-(-2)\}$ より，

$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$ であり，弦の中点は，この直線と $4x+3y-5=0$ の交点だから，

連立方程式 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}\\4x+3y-5=0\end{cases}$ を解くことにより，その座標は $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$