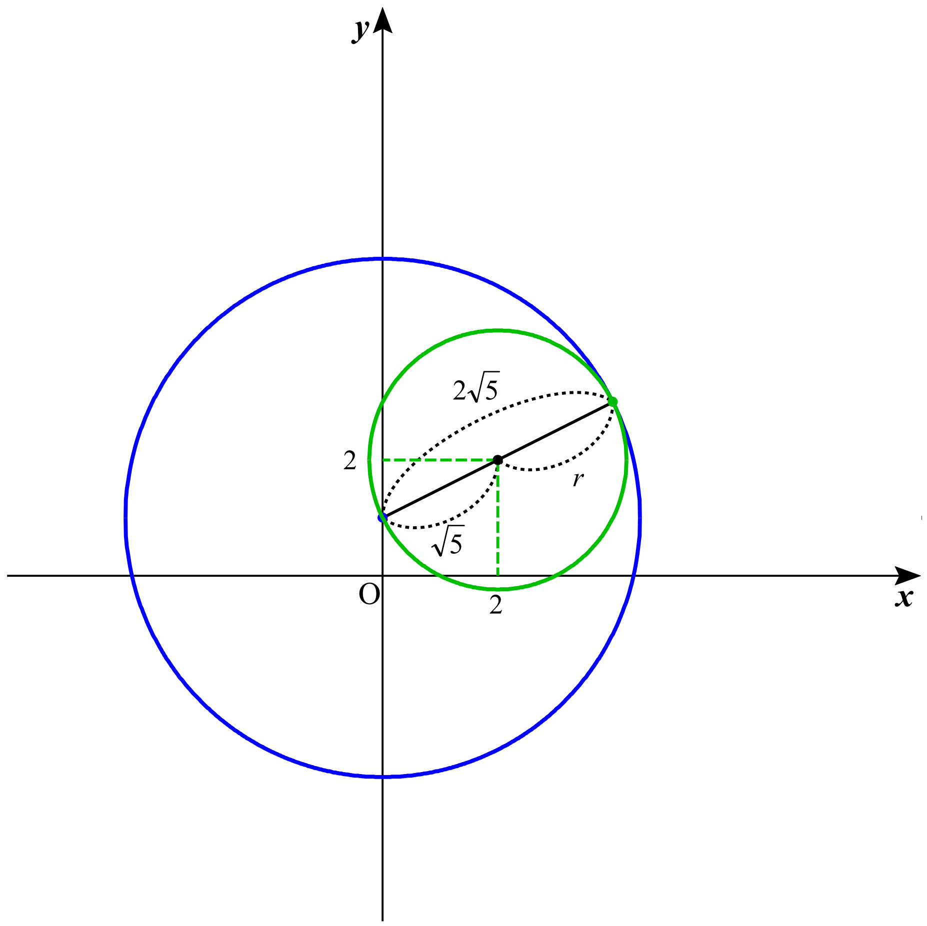
図形と方程式 7　2 つの円

202

(1)

求める円を C_1，$x^2+y^2-2y-19=0$ を円 C_2 とする。
円 C_2 の方程式を変形すると，$x^2+(y-1)^2=20$ より，
円 C_2 は中心が $(0,1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の円である。

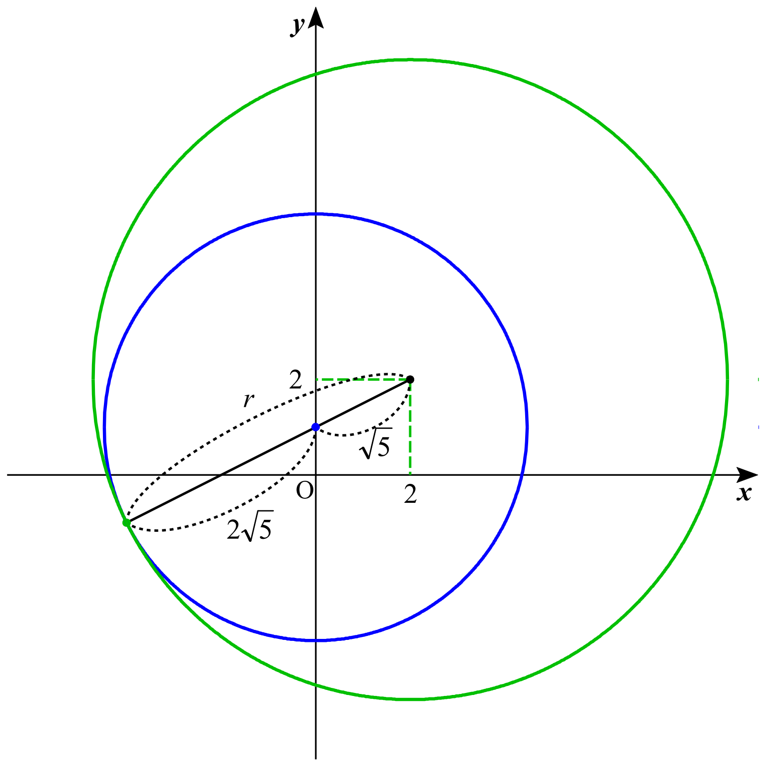
したがって，円 C_1 と円 C_2 の中心間の距離は $\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$
これは円 C_2 の半径より小さいから，円 C_1 の中心は円 C_2 の内部にある。
よって，円 C_1 が円 C_2 に内接する場合と円 C_2 が円 C_1 に内接する場合がある。
そこで，円 C_1 の半径を r とすると，
円 C_1 が円 C_2 に内接する場合
　$2\sqrt{5}-r=\sqrt{5}$ より，$r=\sqrt{5}$
　よって，円 C_1 方程式は $(x-2)^2+(y-2)^2=5$



円 C_2 が円 C_1 に内接する場合

$r-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$ より， $r=3\sqrt{5}$

よって，円 C_1 方程式は $(x-2)^2+(y-2)^2=45$

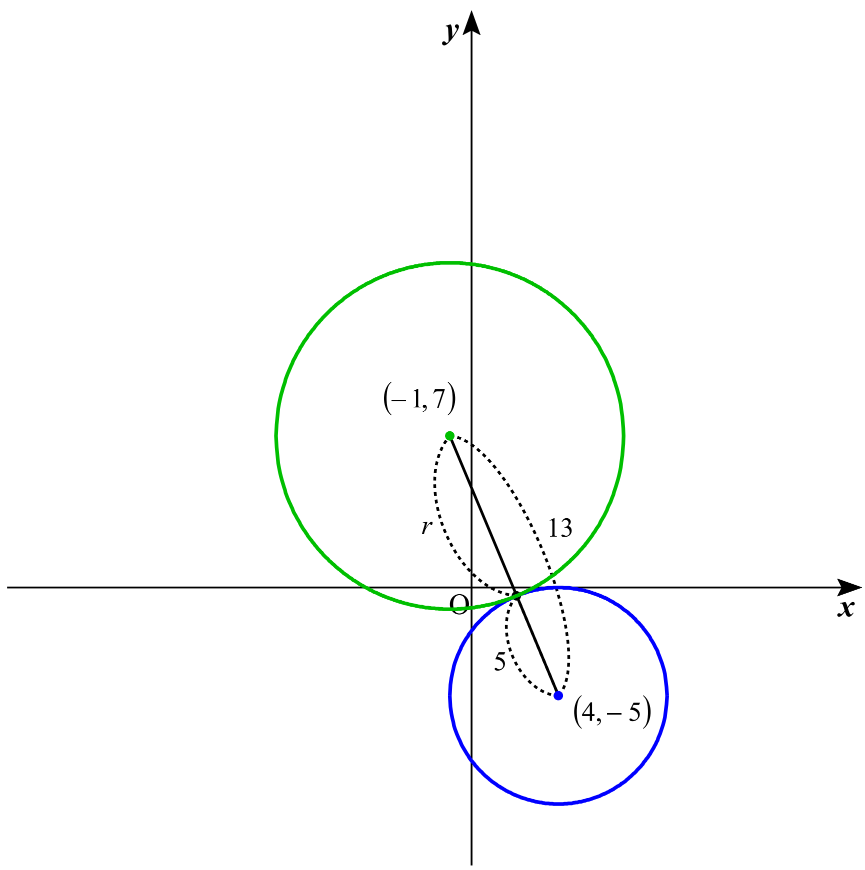


(2)

求める円を C_1，$x^2+y^2-8x+10y+16=0$ を円 C_2 とする。
円 C_2 の方程式を変形すると，$(x-4)^2+(y+5)^2=25$ より，
円 C_2 は中心が $(4,-5)$，半径が 5 の円である。

したがって，円 C_1 と円 C_2 の中心間の距離は $\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(-5-7)^2}=13$

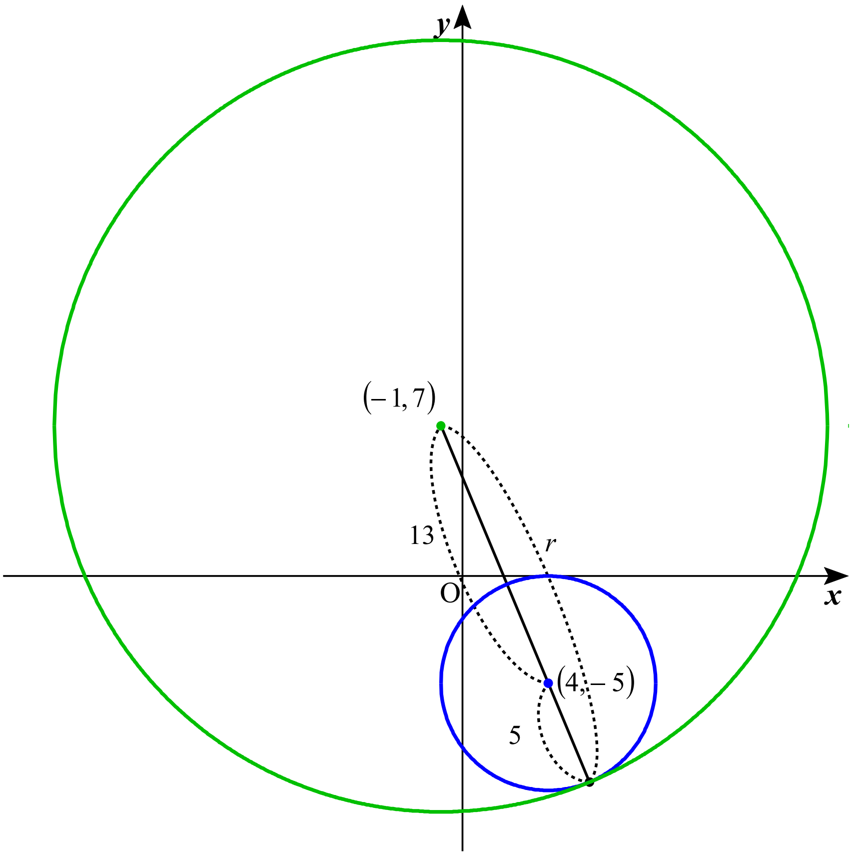
これは円 C_2 の半径より大きいから，円 C_1 の中心は円 C_2 の外部にある。
よって，円 C_1 と円 C_2 が外接する場合と円 C_2 が円 C_1 に内接する場合がある。
そこで，円 C_1 の半径を r とすると，
円 C_1 と円 C_2 が外接する場合
　$r+5=13$ より，$r=8$
　よって，円 C_1 方程式は $(x+1)^2+(y-7)^2=64$



円 C_2 が円 C_1 に内接する場合

$r-8=2\cdot5$ より，$r=18$

よって，円 C_1 方程式は $(x+1)^2+(y-7)^2=324$



203

$x^2+y^2=r^2$ を円 C_1，$x^2+y^2-6x+4y+4=0$ を円 C_2 とする。

円 C_2 の方程式を変形すると，$(x-3)^2+(y+2)^2=9$ より，

円 C_2 は中心が $(3,-2)$，半径が 3 の円である。

したがって，円 C_1 と円 C_2 の中心間の距離は $\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

よって，2 つの円が異なる 2 つの共有点をもつためには，

r （$r>0$）が不等式 $|r-3|<\sqrt{13}<r+3$ を満たせばよい。

よって，

$|r-3|<\sqrt{13}$，$r>0$ より，$0<r<3+\sqrt{13}$　・・・①

$\sqrt{13}<r+3$，$r>0$ より，$-3+\sqrt{13}<r$　・・・②

①かつ②より，$-3+\sqrt{13}<r<3+\sqrt{13}$

204

(1)

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots① \\ x^2+y^2-4x-4y+7=0 & \cdots② \end{cases}$ について,

①を②に代入すると, $5-4x-4y+7=0$ $\quad \therefore y=-x+3 \ \cdots③$

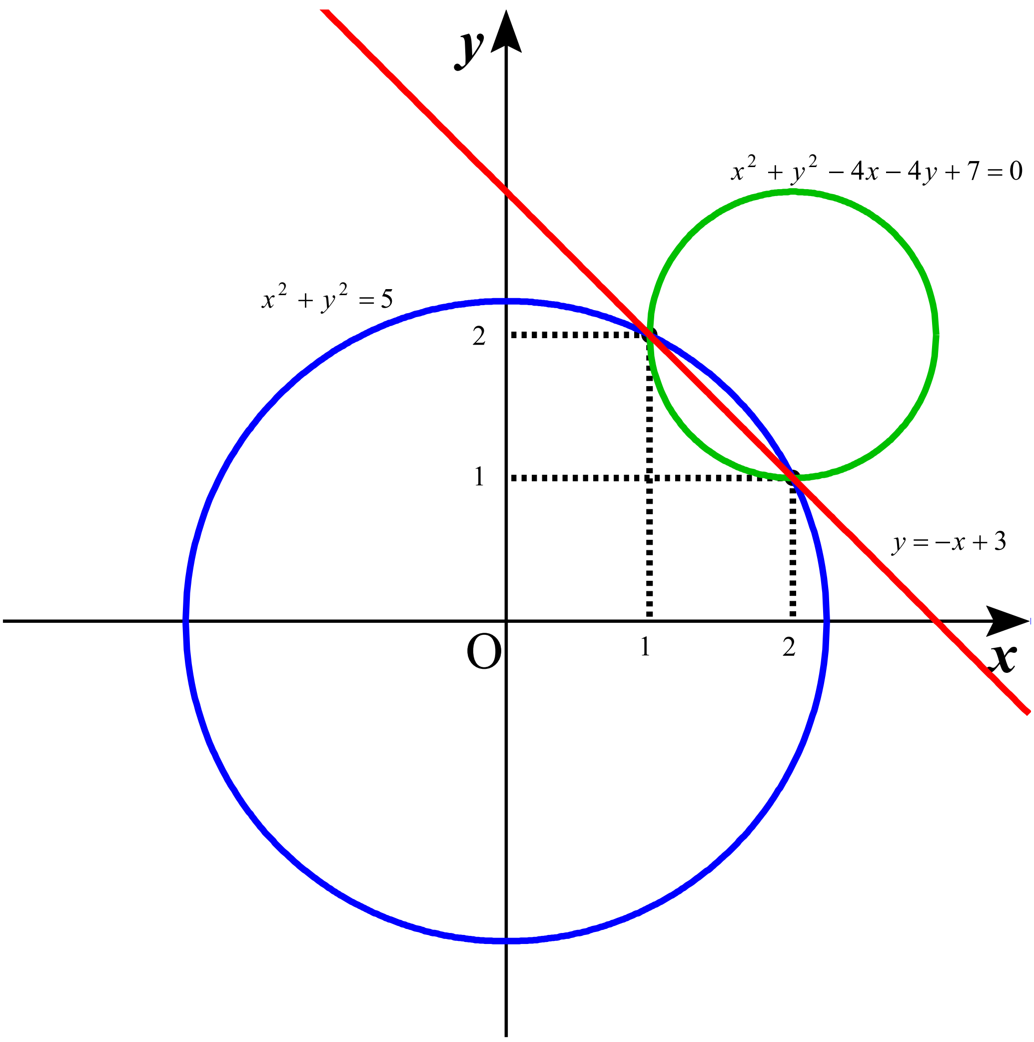
よって,

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots① \\ x^2+y^2-4x-4y+7=0 & \cdots② \end{cases}$ の解と

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots① \\ y=-x+3 & \cdots③ \end{cases}$ の解が一致する。

そこで,③を①に代入して整理すると, $(x-1)(x-2)=0$

ゆえに, $(x,y)=(1,2),(2,1)$



(2)

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2-4y-4=0 & \cdots① \\ x^2+y^2-2x=0 & \cdots② \end{cases}$ について，

①−②より，$2x-4y-4=0$　$\therefore x=2y+2$ $\cdots③$

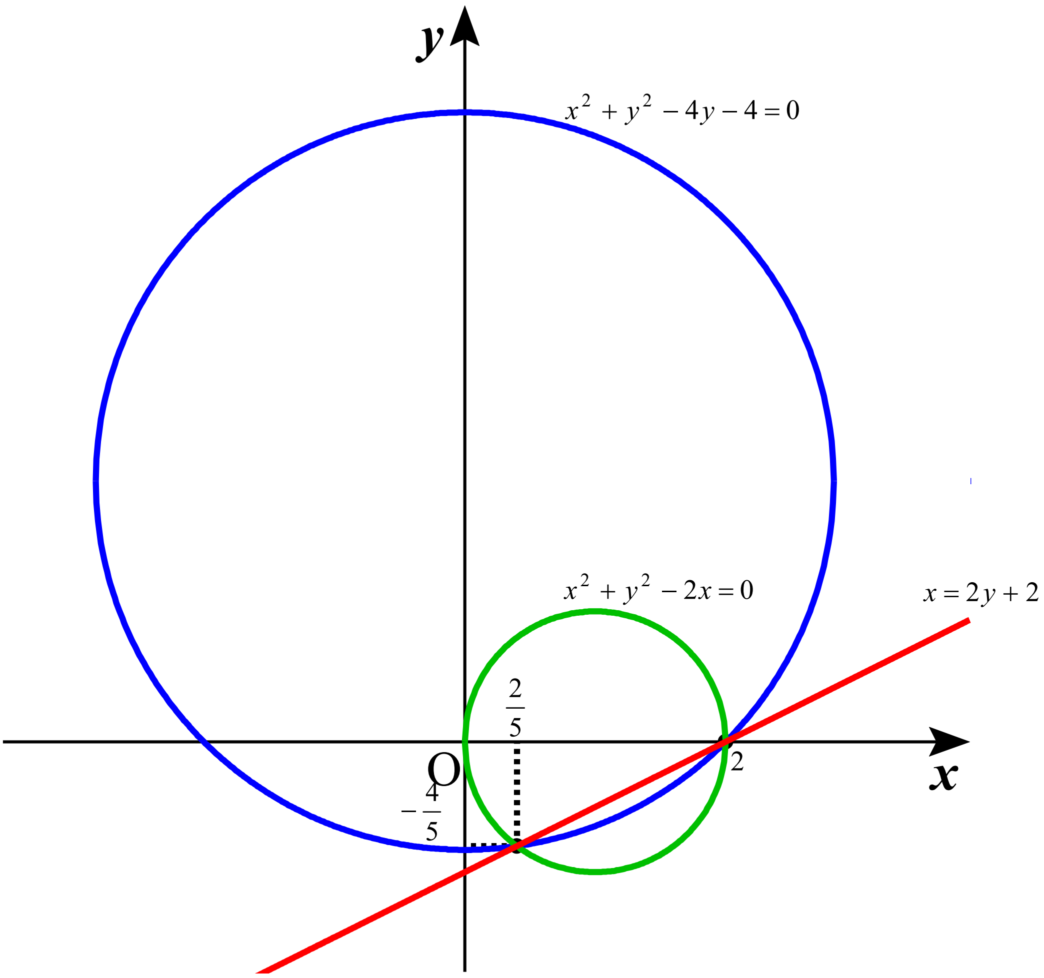
よって，

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2-4y-4=0 & \cdots① \\ x^2+y^2-2x=0 & \cdots② \end{cases}$ の解と

連立方程式$\begin{cases} x=2y+2 & \cdots③ \\ x^2+y^2-2x=0 & \cdots② \end{cases}$ の解が一致する。

そこで，③を②に代入して整理すると，$5y\left(y+\frac{4}{5}\right)=0$

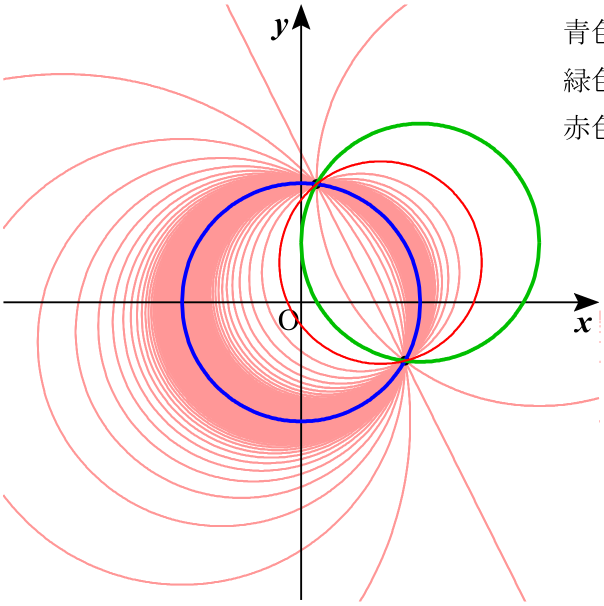
ゆえに，$(x,y)=(2,0),\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right)$



205

連立方程式$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots① \\ x^2+y^2-4x-2y+1=0 & \cdots② \end{cases}$　について，

任意の実数kを用いて$k\times$①＋②の計算を行い，整理すると，
不定方程式$k(x^2+y^2-4)+x^2+y^2-4x-2y+1=0$ …③　が得られる。
この不定方程式は，上の連立方程式を解にもつから，
①と②の交点を通る円または直線の方程式を表す。



とくに，③が点$(1,-1)$を通るとき，すなわち$x=1, y=-1$を解にもつとき，

$k\{1^2+(-1)^2-4\}+1^2+(-1)^2-4\cdot1-2\cdot(-1)+1=0$ より，$k=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，条件を満たす円の方程式は

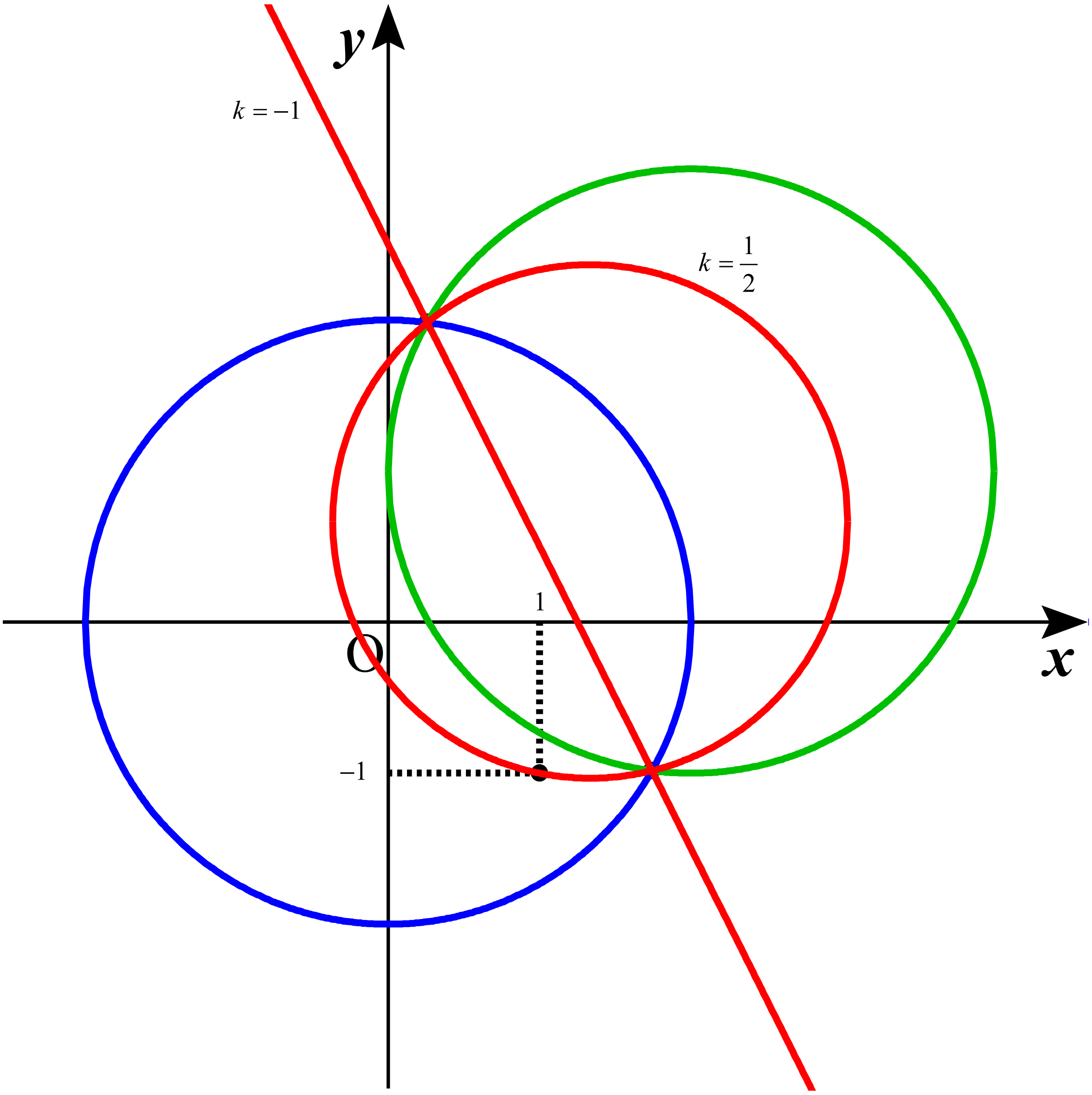
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2-4)+x^2+y^2-4x-2y+1=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{26}{9}\right\}=0$$

より，$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{26}{9}$

これより，その円の中心と半径は，それぞれ$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$\dfrac{\sqrt{26}}{3}$

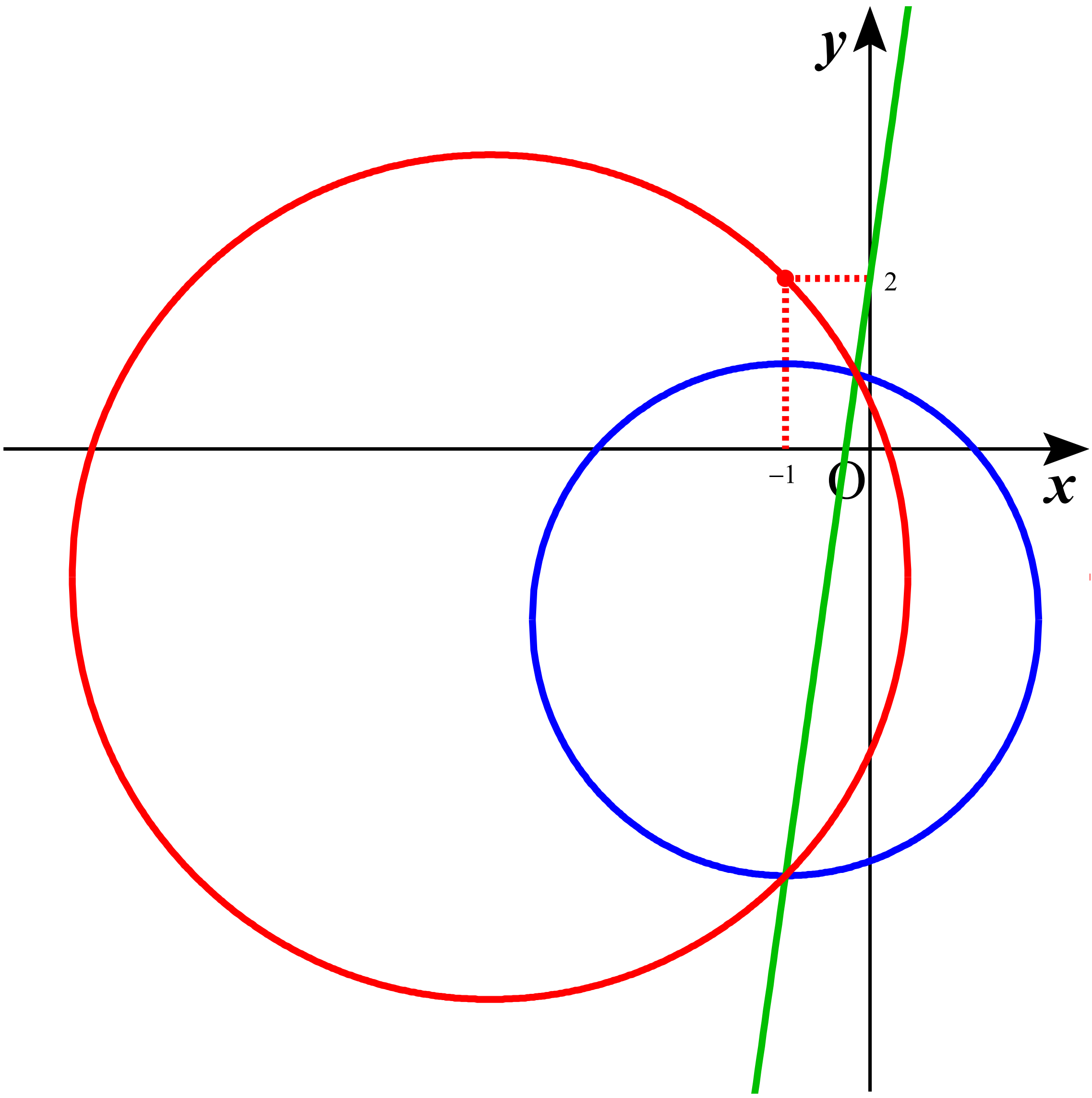
また，③に$k=-1$を代入し，2 次の項を消去することにより，
2 つの円の交点を通る直線の方程式$4x+2y-5=0$が得られる。



y
k = −1
k = 1/2
1
O
x
−1

206

円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の交点を通る円の方程式は，
実数 k を用いて
$x^2+y^2+2x+4y-4+k(7x-y+2)=0$ ・・・①
と表せる。(205 参照)
これが点 $(-1,2)$ を通るとき，方程式①は $x=-1,\ y=2$ を解にもつから，
$(-1)^2+2^2+2\cdot(-1)+4\cdot2-4+k\{7\cdot(-1)-2+2\}=0$ $\therefore k=1$
よって，その方程式は，$x^2+y^2+9x+3y-2=0$
これを変形すると，$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{2}$
ゆえに，求める円の中心と半径はそれぞれ $\left(-\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right)$，$\frac{7\sqrt{2}}{2}$



207

(1)

共通接線の $x^2+y^2=1$ 上の接点を (x_1, y_1) とすると,

共通接線の方程式は $x_1x+y_1y-1=0$ ・・・①

また, $x_1{}^2+y_1{}^2=1$ ・・・②

①と $x^2+(y-6)^2=9$ の中心 $(0,6)$ との距離 $\dfrac{|6y_1-1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$ は

$x^2+(y-6)^2=9$ の半径 3 と等しいから, $\dfrac{|6y_1-1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=3$

これと②より, $|6y_1-1|=3$ $\therefore 6y_1-1=\pm 3$

これより, $y_1=\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}$

②より, $x_1=\pm\sqrt{1-y_1{}^2}$ だから,

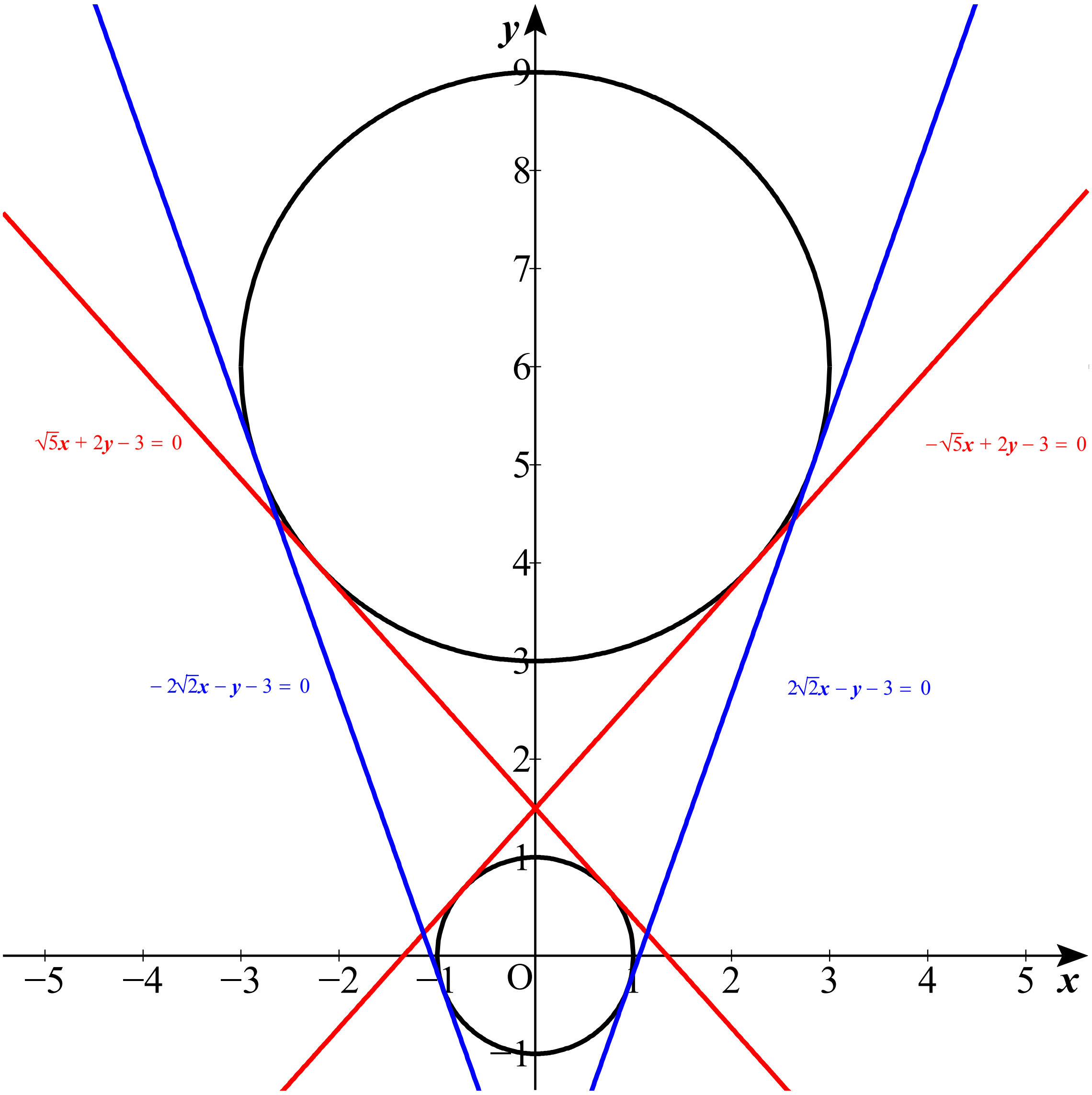
$y_1=\dfrac{2}{3}$ のとき, $x_1=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$y_1=-\dfrac{1}{3}$ のとき, $x_1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって, ①より,

接線の方程式は $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}x+\dfrac{2}{3}y-1=0$, $\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x-\dfrac{1}{3}y-1=0$

すなわち $\pm\sqrt{5}x+2y-3=0$, $\pm 2\sqrt{2}x-y-3=0$



y
x
O
$\sqrt{5}x+2y-3=0$
$-\sqrt{5}x+2y-3=0$
$-2\sqrt{2}x-y-3=0$
$2\sqrt{2}x-y-3=0$

(2)

共通接線の $x^2+y^2=1$ 上の接点を (x_1, y_1) とすると，
共通接線の方程式は $x_1x+y_1y-9=0$ ・・・①
また，$x_1{}^2+y_1{}^2=9$ ・・・②

①と $(x-2)^2+y^2=4$ の中心 $(2,0)$ との距離 $\dfrac{|2x_1-9|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$ は

$(x-2)^2+y^2=4$ の半径 2 と等しいから，$\dfrac{|2x_1-9|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=2$

これと②より，$|2x_1-9|=6$ $\quad\therefore 2x_1-9=\pm 6$

これより，$x_1=\dfrac{15}{2}, \dfrac{3}{2}$

②より，$y_1=\pm\sqrt{9-x_1{}^2}$ だから，

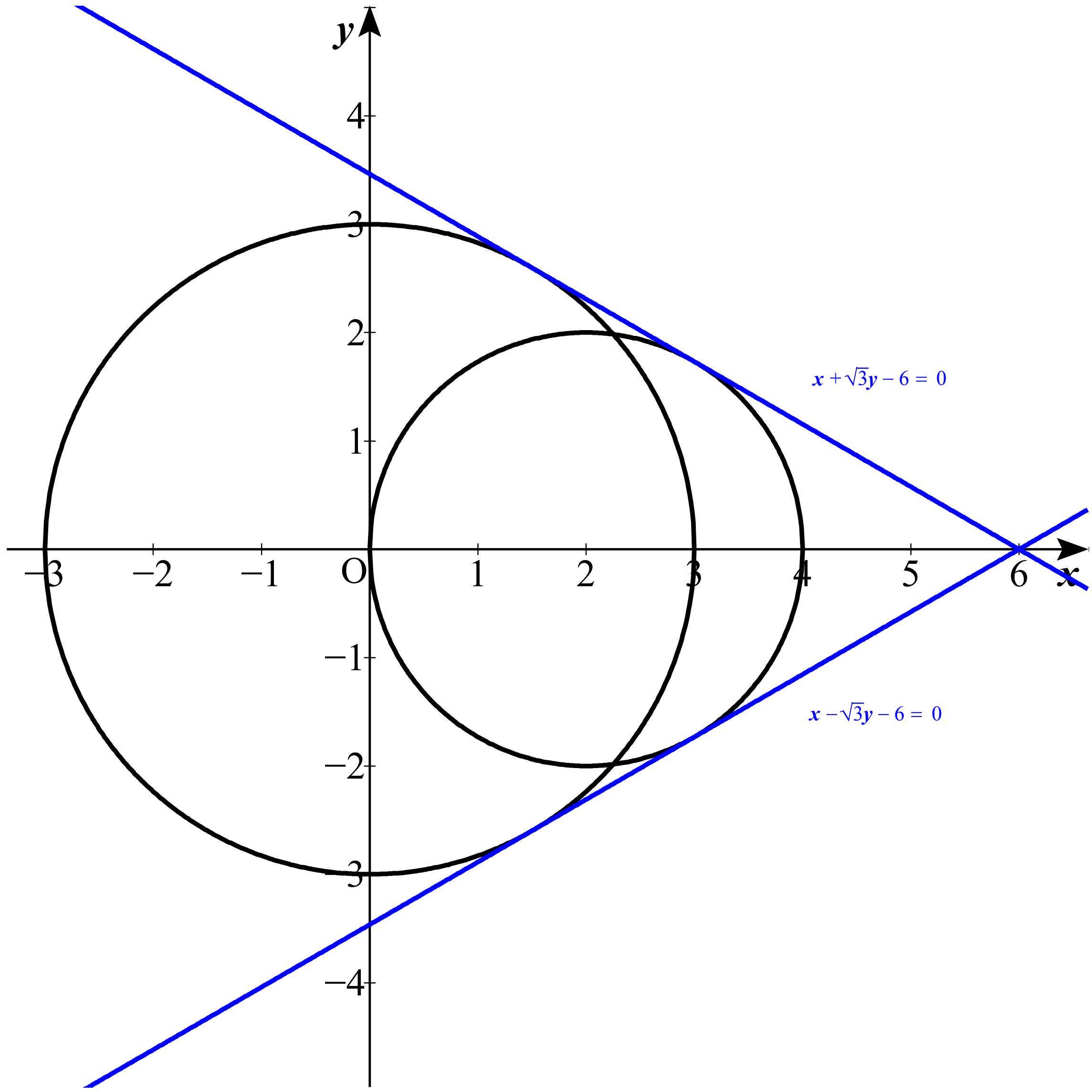
$x_1=\dfrac{15}{2}$ のとき，$9-x_1{}^2<0$ となり不適

$x_1=\dfrac{3}{2}$ のとき，$y_1=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

よって，①より，

接線の方程式は $\dfrac{3}{2}x\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y-9=0$

すなわち $x\pm\sqrt{3}y-6=0$


y
x
O
$x+\sqrt{3}y-6=0$
$x-\sqrt{3}y-6=0$