

図形と方程式 8 軌跡と方程式

209

ポイント

求める点の座標を (x, y) , 曲線(直線)上の点を (s, t) とおき,
与えられた条件から, x を s で, y を t で表す。

↓

s を x で, t を y で表す。

↓

s と t の関係式に代入する。

(1)

Q の座標を (s, t) とすると, Q は $x - 2y = 1$ 上の点だから, $s - 2t = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

また, 点 P の座標を (x, y) とする。

点 P は線分 AQ の中点だから, その座標は $\left(\frac{s+1}{2}, \frac{t+3}{2}\right)$

よって, $x = \frac{s+1}{2}, y = \frac{t+3}{2}$

これより, $s = 2x - 1, t = 2y - 3$

これと $\textcircled{1}$ より, $2x - 1 - 2(2y - 3) = 1 \quad \therefore 2x - 4y = -4$

ゆえに, $x - 2y = -2$

逆に, 点 A と点 (u, v) の中点が $x - 2y = -2$ 上にあるとすると,

$\frac{1+u}{2} - 2 \cdot \frac{3+v}{2} = -2$ より, $u - 2v = 1$

これは点 (u, v) が $x - 2y = 1$ 上の点, すなわち点 Q であることを示している。

以上より, 中点 P の軌跡は $x - 2y = -2$

(2)

Q の座標を (s, t) とすると, Q は $(x+1)^2 + y^2 = 16$ 上の点だから,

$(s+1)^2 + t^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$

また, 点 P の座標を (x, y) とする。

点 P は線分 AQ の中点だから, その座標は $\left(\frac{s+5}{2}, \frac{t}{2}\right)$

よって, $x = \frac{s+5}{2}, y = \frac{t}{2}$

これより, $s = 2x - 5, t = 2y$

これと $\textcircled{1}$ より, $\{(2x-5)+1\}^2 + (2y)^2 = 16 \quad \therefore 4\{(x-2)^2 + y^2\} = 16$

ゆえに, $(x-2)^2 + y^2 = 4$

逆に, 点 A と点 (u, v) の中点が $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 上にあるとすると,

$$\left(\frac{5+u}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 4 \text{ より, } (u+1)^2 + v^2 = 16$$

これは点 (u, v) が $(x+1)^2 + y^2 = 16$ 上の点, すなわち点 Q であることを示している。

以上より, 点 P の軌跡は $(x-2)^2 + y^2 = 4$

(3)

Q の座標を (s, t) とすると, Q は $x^2 + y^2 = 1$ 上の点だから, $s^2 + t^2 = 1$ ……①

また, 点 P の座標を (x, y) とする。

点 P は三角形 ABQ の重心だから,

$$\text{その座標は} \left(\frac{4+2+s}{3}, \frac{0+3+t}{3} \right) = \left(\frac{6+s}{3}, \frac{3+t}{3} \right)$$

$$\text{よって, } x = \frac{6+s}{3}, y = \frac{3+t}{3}$$

これより, $s = 3x - 6, t = 3y - 3$

これと①より, $(3x-6)^2 + (3y-3)^2 = 1 \quad \therefore 9\{(x-2)^2 + (y-1)^2\} = 1$

$$\text{ゆえに, } (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9}$$

逆に, 点 A, 点 B, 点 (u, v) の重心が $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9}$ 上にあるとすると,

$$\left(\frac{4+2+u}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{0+3+v}{3}-1\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ より, } u^2 + v^2 = 1$$

これは点 (u, v) が $x^2 + y^2 = 1$ 上の点, すなわち点 Q であることを示している。

以上より, 点 P の軌跡は $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9}$

(4)

Q の座標を (s, t) とすると, Q は $y = x^2$ 上の点だから, $t = s^2$ ……①

また, 点 P の座標を (x, y) とする。

点 P は AQ を 1 : 2 に内分する点だから,

$$\text{その座標は} \left(\frac{2 \cdot 2 + s}{3}, \frac{2 \cdot (-2) + t}{3} \right) = \left(\frac{4+s}{3}, \frac{-4+t}{3} \right)$$

$$\text{よって, } x = \frac{4+s}{3}, y = \frac{-4+t}{3}$$

これより, $s = 3x - 4, t = 3y + 4$

これと①より, $3y + 4 = (3x - 4)^2 \quad \therefore 3y = 3(3x^2 - 8x + 4)$

ゆえに, $y = 3x^2 - 8x + 4$

逆に, 点 A と点 (u, v) を 1 : 2 に内分する点が $y = x^2 - 8x + 4$ 上にあるとすると,

$$\frac{-4+v}{3} = 3\left(\frac{4+u}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4+u}{3} + 4 \text{ より, } v = u^2$$

これは点 (u, v) が $y = x^2$ 上の点, すなわち点 Q であることを示している。

以上より, 点 P の軌跡は $y = 3x^2 - 8x + 4$

210

求める点の座標を (x, y) とすると,

$$\text{条件より, } \sqrt{x^2 + \{y - (-2)\}^2} = |y - 2| \quad \therefore \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = |y - 2|$$

$$\text{両辺を 2 乗し, 整理すると, } y = -\frac{x^2}{8}$$

逆に, $(0, -2)$ と直線 $y = a$ が $y = -\frac{x^2}{8}$ 上の任意の点 $\left(t, -\frac{t^2}{8}\right)$ と等しい距離にあるとすると,

$$\sqrt{t^2 + \left(-\frac{t^2}{8} + 2\right)^2} = \left|-\frac{t^2}{8} - a\right| \text{ より, } t^2 + \left(-\frac{t^2}{8} + 2\right)^2 = \left(\frac{t^2}{8} + a\right)^2$$

$$\therefore \frac{(2-a)(t^2 + 4a + 8)}{4} = 0$$

これが任意の t について成り立つから, $a = 2$

よって, 等しい距離にある直線は $y = 2$

$$\text{以上より, 求める軌跡は } y = -\frac{x^2}{8}$$

211

求める点の座標を (x, y) とすると,

条件より,

$$PB = 4PA \quad \therefore \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

P の y 座標は 0 でない。 $\cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺を 2 乗して整理すると, } \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, 上の円上の点で除かれる点の } x \text{ 座標は, } \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \text{ より, } x = 0, -\frac{8}{3}$$

よって, 点 P の軌跡は

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}, \text{ ただし, } (0, 0) \text{ と } \left(-\frac{8}{3}, 0\right) \text{ の 2 点を除く。}$$

逆に、 $\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ 上の任意の点を $P\left(t, \pm\sqrt{-\frac{8}{3}t - t^2}\right)$ ($t \neq 0, -\frac{8}{3}$) とすると、

$$PA = \sqrt{-\frac{2}{3}t + 1}, \quad PB = 4\sqrt{-\frac{2}{3}t + 1} \text{ より, } PA : PB = 1 : 4$$

以上より、点 P の軌跡は

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}, \text{ ただし, } (0, 0) \text{ と } \left(-\frac{8}{3}, 0\right) \text{ の 2 点を除く。}$$

212

xy 座標平面上の 2 定点 A, B を $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ ととり、

点 P の座標を (x, y) とすると、 $AP^2 - BP^2 = 1$ より、

$$(x^2 + y^2) - \{(x-2)^2 + y^2\} = 1 \quad \therefore x = \frac{5}{4}$$

よって、点 P は線分 AB を 5 : 3 に内分する点を通り、x 軸に垂直な直線上にある。

逆に、点 P を $\left(\frac{5}{4}, t\right)$ とすると、 $AP^2 - BP^2 = 1$

これは、 $AB=2$ を満たす任意の定点 A, B についても成り立つ。

ゆえに、点 P の軌跡は

AB を 5 : 3 に内分する点を通り、直線 AB に垂直な直線である。

213

xy 座標平面上の点 A,B,C,D を $A(-1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -1)$, $D(1, 1)$ ととり、

点 P の座標を (x, y) とすると、 $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 16$ より、

$$\{(x+1)^2 + (y-1)^2\} + \{(x+1)^2 + (y+1)^2\} + \{(x-1)^2 + (y+1)^2\} + \{(x-1)^2 + (y-1)^2\} = 16$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2$$

これは点 P が正方形 ABCD の外接円であることを表している。

逆に、点 P が $x^2 + y^2 = 2$ であるとする、

$A(-1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -1)$, $D(1, 1)$ に対し、

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 16 \text{ が成り立つ。 (証明略)}$$

これは 1 辺の長さが 2 である正方形となるよう A,B,C,D を座標平面上に適当にとっても成り立つ。

ゆえに、点 P の軌跡は正方形 ABCD の外接円である。

214

(1)

求める点を $P(x, y)$ とすると、条件より、点 P とそれぞれの直線の距離が等しいから、

$$\frac{|3x+2y-5|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|2x-3y+4|}{\sqrt{2^2+3^2}} \quad \therefore 3x+2y-5 = \pm(2x-3y+4)$$

すなわち、 $x+5y-9=0$ または $5x-y-1=0$

このうち、傾きが正であるのは $5x-y-1=0$

逆に、 $5x-y-1=0$ 上の点を $(5t-1, t)$ とすると、この点は 2 直線と等距離にある。

ゆえに、求める直線の方程式は $5x-y-1=0$

(2)

直線 $2x+3y=6$ 上の点を $Q(s, t)$ とすると、

$$2s+3t=6 \quad \therefore 2s=-3t+6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 Q と $y=2x$ に関して対称な点を $P(x, y)$ とすると、

線分 PQ の中点は $y=2x$ を満たすから、

$$\frac{y+t}{2} = 2 \cdot \frac{x+s}{2} \quad \therefore 2s-t=-2x+y \quad \cdots \textcircled{2}$$

直線 PQ は $y=2x$ と直交するから、その傾きは $-\frac{1}{2}$

$$\text{したがって、} \frac{y-t}{x-s} = -\frac{1}{2} \quad \therefore s+2t=x+2y \quad \cdots \textcircled{3}$$

①を②に代入して整理すると、

$$2x-y-4t+6=0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

①を $2 \times \textcircled{3}$ に代入して整理すると、

$$t=2x+4y-6 \quad \cdots \textcircled{5}$$

④、⑤より、 $6x+17y-30=0$

逆に、 $6x+17y-30=0$ 上の点は条件を満たす (証明略)。

ゆえに、求める直線の方程式は $6x+17y-30=0$

215

(1)

$$t = x - 1 \text{ と } y = -3t + 2 \text{ より, } y = -3(x - 1) + 2 \quad \therefore y = -3x + 5$$

(2)

$$t = \frac{x+1}{2} \text{ と } y = t^2 - t + 3 \text{ より, } y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{x+1}{2} + 3 \quad \therefore y = \frac{x^2}{4} + \frac{11}{4}$$

216

$$P(x, y) \text{ とすると, } y = (x - m)^2 - m^2 + 1 \text{ より, } x = m, y = -m^2 + 1$$

$$\text{よって, } y = -x^2 + 1$$

逆に, $y = -x^2 + 1$ 上の任意の点を $(t, -t^2 + 1)$ とすると,

$(t, -t^2 + 1)$ は $y = (x - m)^2 - m^2 + 1$ の, すなわち $y = x^2 - 2mx + 1$ の頂点である。

ゆえに, 点 P の軌跡は $y = -x^2 + 1$

217

(1)

直線 $y = 2x + k$ と放物線 $y = 3x - x^2$ が異なる 2 点で交わることと

x の 2 次方程式 $2x + k = 3x - x^2$ が,

すなわち $x^2 - x + k = 0$ が異なる 2 実数解をもつことは同値であるから,

$x^2 - x + k = 0$ の判別式を D とすると, $D = 1 - 4k$ かつ $D > 0$ より, $1 - 4k > 0$

よって, $k < \frac{1}{4}$ …… (答)

また, $x^2 - x + k = 0$ の異なる 2 実数解を α, β とすると,

α, β は点 P, Q の x 座標の値であることと, 点 P, Q が $y = 2x + k$ 上の点であることから,

$$P(\alpha, 2\alpha + k), Q(\beta, 2\beta + k) \text{ とすると, } M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{(2\alpha + k) + (2\beta + k)}{2}\right) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha + \beta + k\right)$$

解と係数の関係より, $\alpha + \beta = 1$

よって, $M\left(\frac{1}{2}, 1 + k\right)$ …… (答)

(2)

$$M(x, y) \text{ とすると, } x = \frac{1}{2}, y = 1 + k < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

よって, M の軌跡は $x = \frac{1}{2}, y < \frac{5}{4}$

逆に, $x = \frac{1}{2}, y < \frac{5}{4}$ 上の任意の点は点 M の条件を満たす (証明略)。

ゆえに, M の軌跡は $x = \frac{1}{2}, y < \frac{5}{4}$

218

【1】 $y \neq 0$ のとき

$$x + my - 5 = 0 \text{ より, } m = \frac{-x+5}{y}$$

$$\text{これを } mx - y + 5m = 0 \text{ に代入すると, } \frac{-x+5}{y} \cdot x - y + 5 \cdot \frac{-x+5}{y} = 0$$

$$\text{よって, } \frac{-x^2 + 5x - y^2 - 5x + 25}{y} = 0$$

$$\text{ゆえに, } -x^2 - y^2 + 25 = 0, \text{ すなわち } x^2 + y^2 = 25$$

$$\text{ここで, } y = 0 \text{ とすると, } x = \pm 5$$

$$\text{これより, } y \neq 0 \text{ のとき, } x^2 + y^2 = 25 \text{ ただし, } (\pm 5, 0) \text{ を除く}$$

【2】 $y = 0$ のとき

$$x + my - 5 = 0 \text{ より, } x = 5$$

$$x = 5, y = 0 \text{ を } mx - y + 5m = 0 \text{ に代入することにより, } m = 0$$

$$\text{よって, } m = 0 \text{ のとき, 2 直線は点 } (5, 0) \text{ で交わる。}$$

【1】、【2】 より、

 m を任意にとったとき、 P の軌跡は $x^2 + y^2 = 25$ 上の $(-5, 0)$ を除いた点である。逆に、 $x^2 + y^2 = 25$ 上の $(-5, 0)$ を除いた任意の点は点 P の条件を満たす（証明略）。ゆえに、点 P の軌跡は $x^2 + y^2 = 25$ 上の $(-5, 0)$ を除いた点である。