図形と方程式 9　不等式の表す領域

曲線 $y=f(x)$ を境界とする領域

【1】 $y>f(x)$ を表す領域

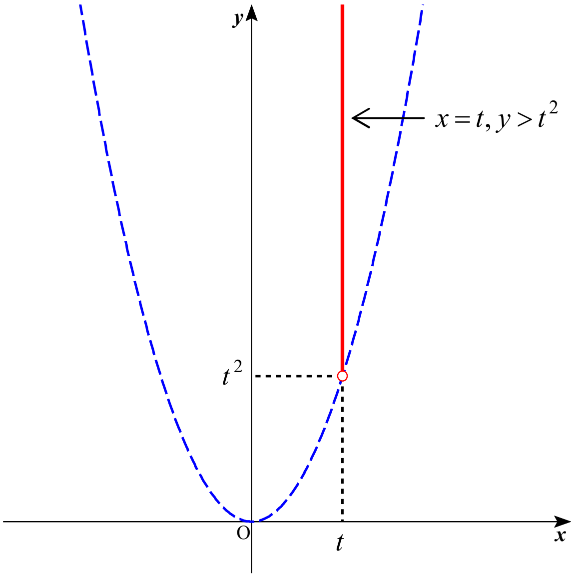
$x=t$ のとき， y が $y>f(t)$ を満たす。

よって， t を連続に変化させると，

曲線 $y=f(x)$ の上側の部分が $y>f(x)$ を表す領域となる。

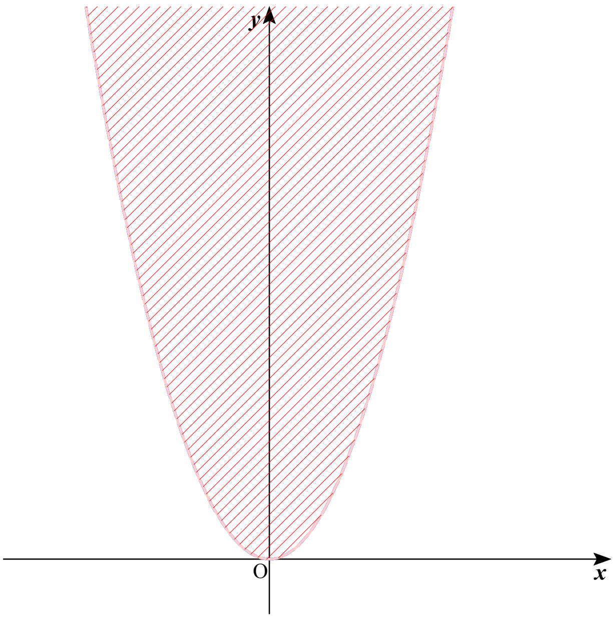
たとえば， $y>x^2$ を表す領域について，

$x=t$ のとき $y>t^2$ となる部分は下図の赤色実線である。



t を連続に変化させたのが $y>x^2$ の領域となる。

よって， $y>x^2$ の領域は曲線 $y=x^2$ の上側の部分である。



【2】 $y > f(x)$ を表す領域

$y > f(x)$ を表す領域と同様，曲線 $y = f(x)$ の下側の部分

円と領域

【1】円 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ を表す領域

$(x-a)^2+(y-b)^2$ は円の中心 $(a,\ b)$ からの距離の 2 乗を表すので,

$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ とは, 円の中心 $(a,\ b)$ からの距離の 2 乗が r^2 より小さい部分を表す。

すなわち，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内部を表す。

【2】円 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ を表す領域

同様に,

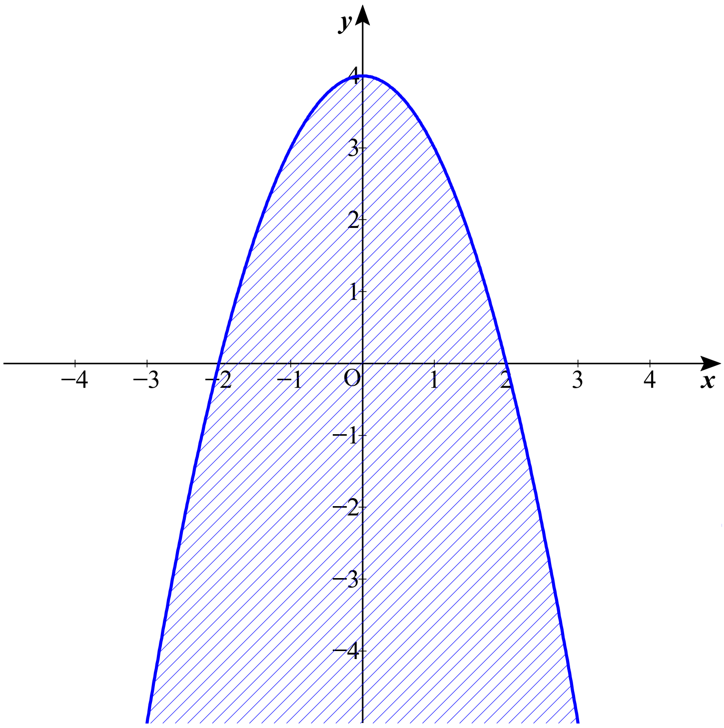
$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ とは, 円の中心 $(a,\ b)$ からの距離の 2 乗が r^2 より小さい部分を表す。

すなわち，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部を表す。

225

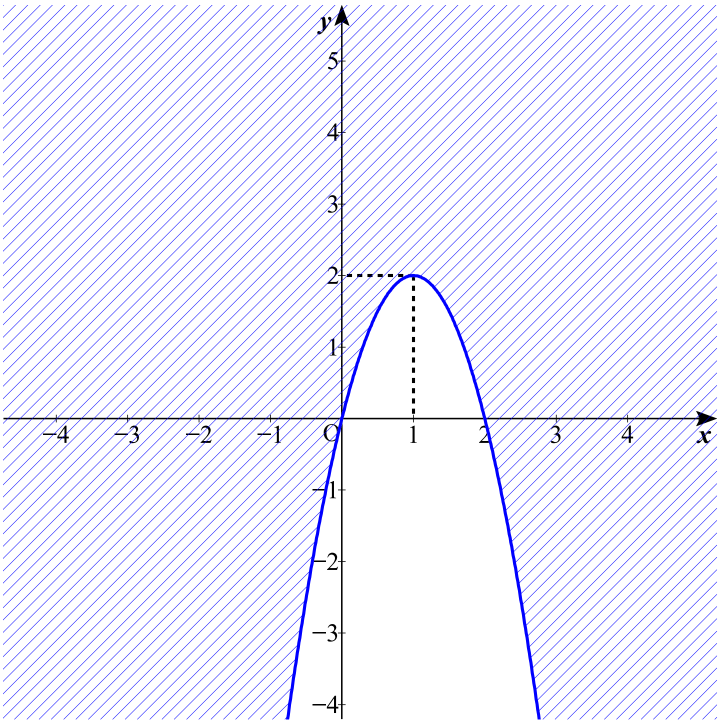
(1)

境界を含む



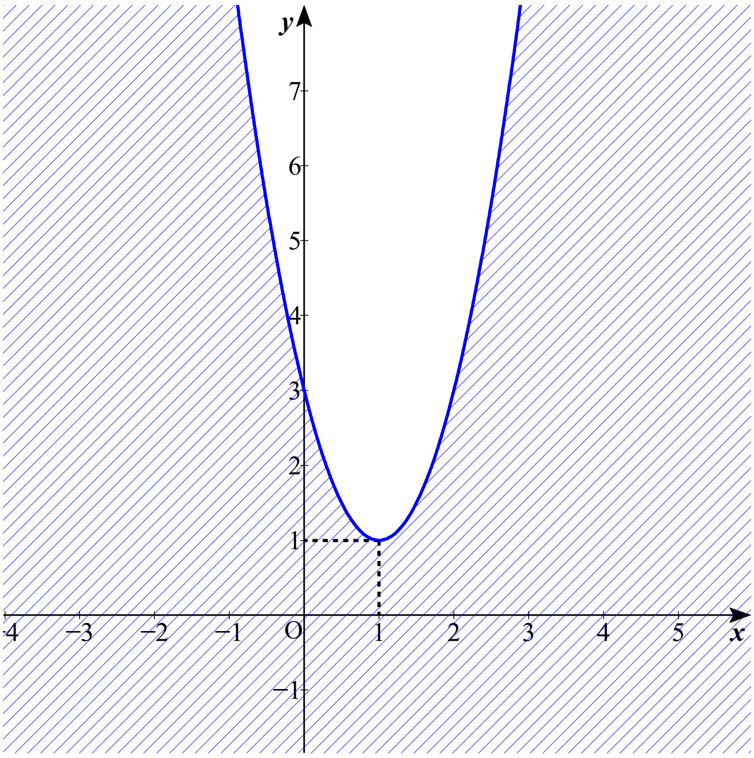
(2)

境界を含まない



(3)

境界を含む



226

ことわり：破線の境界部を含まない

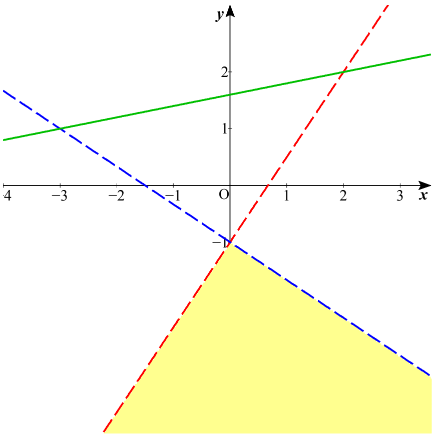
(1)

$$(3x-2y-2)(2x+3y+3)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-2<0 \\ 2x+3y+3>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 3x-2y-2>0 \\ 2x+3y+3<0 \end{cases}$$

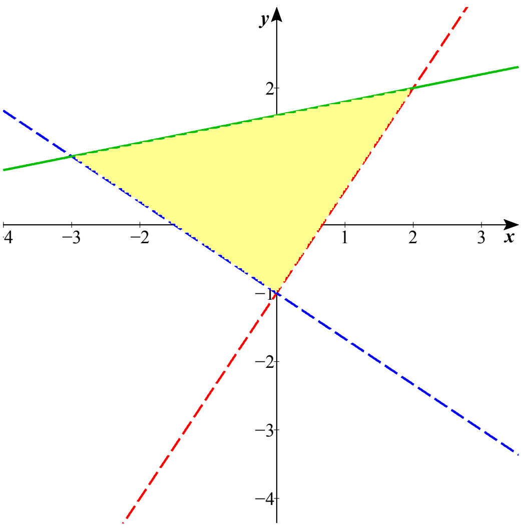
より，

$$\begin{cases} (3x-2y-2)(2x+3y+3)<0 \\ x-5y+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-2<0 \\ 2x+3y+3>0 \\ x-5y+8\geq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 3x-2y-2>0 \\ 2x+3y+3<0 \\ x-5y+8\geq 0 \end{cases}$$

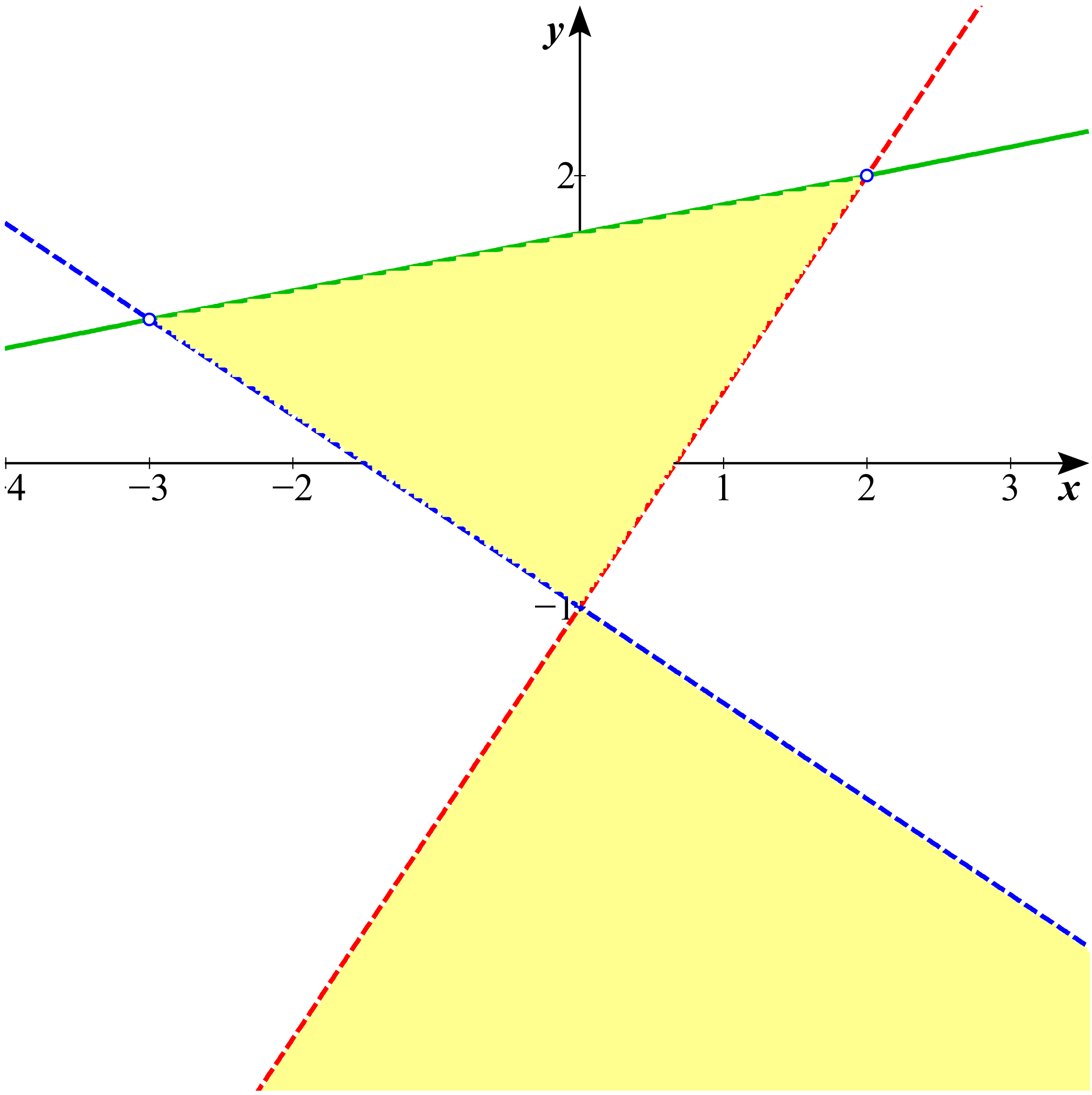
$\begin{cases} 3x-2y-2<0 \\ 2x+3y+3>0 \\ x-5y+8\geq 0 \end{cases}$ が表す領域



$\begin{cases} 3x-2y-2>0 \\ 2x+3y+3<0 \\ x-5y+8\geq 0 \end{cases}$ が表す領域



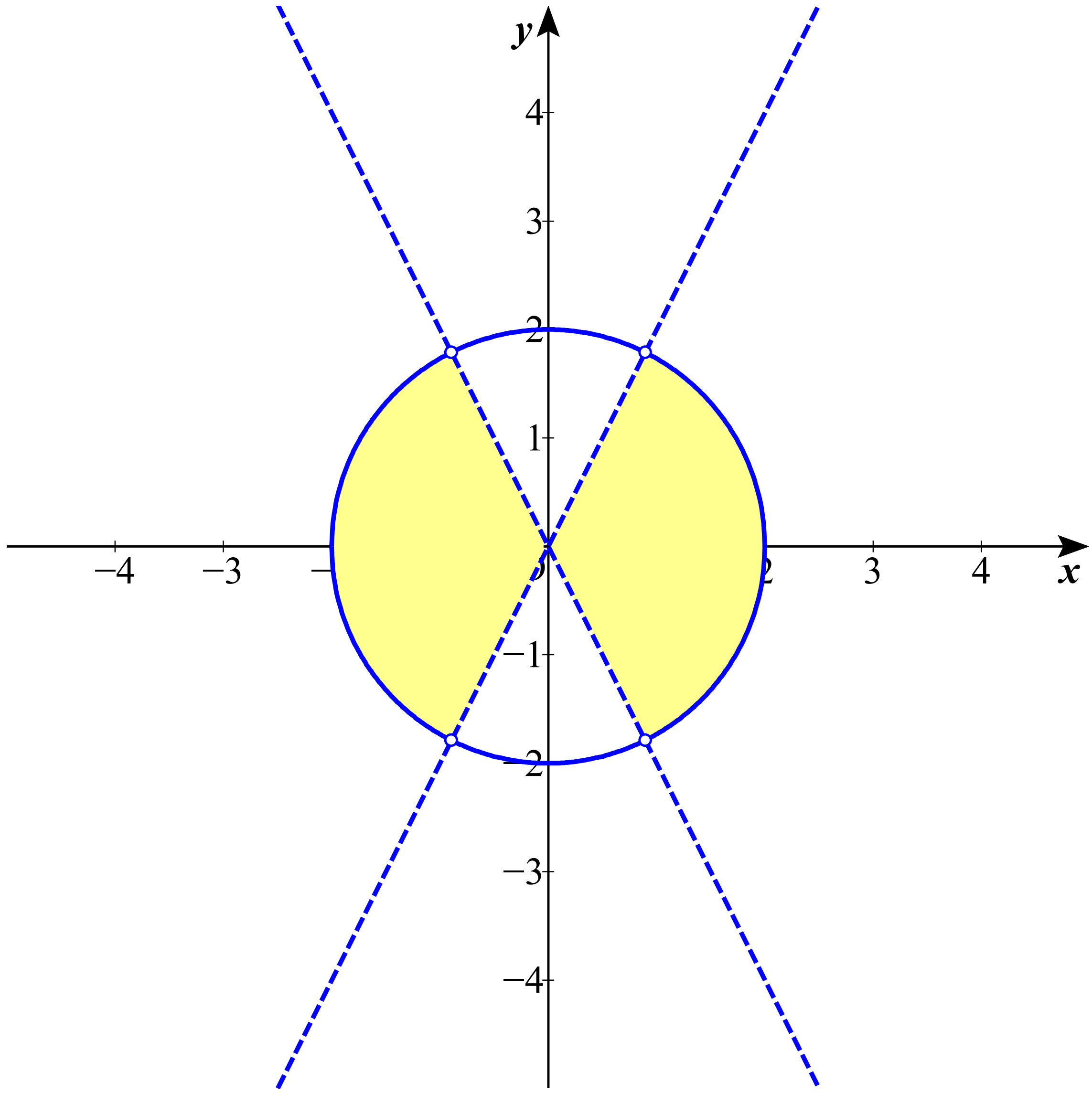
より，


y
2
-1
-4
-3
-2
1
2
3
x

(2)

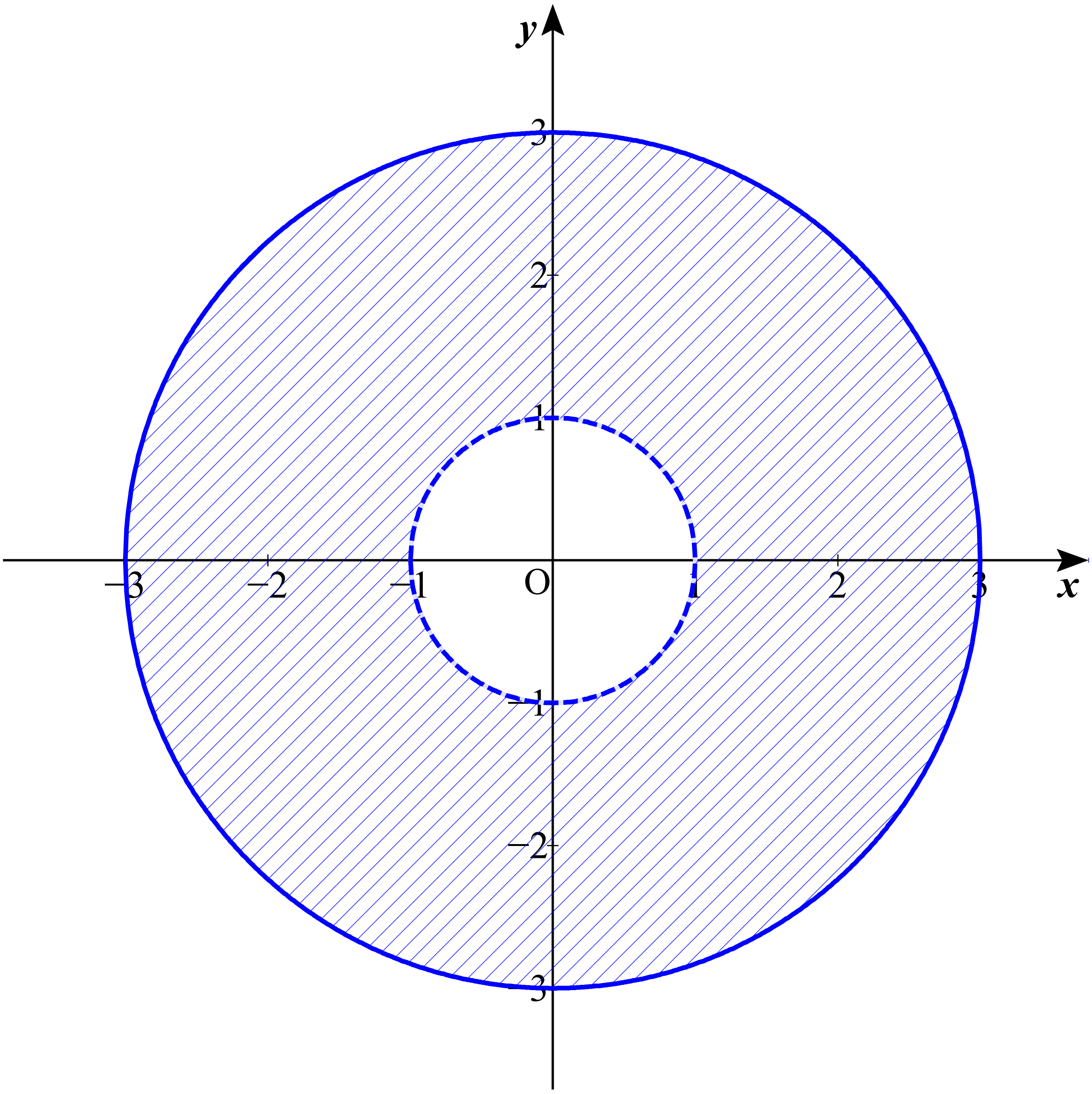
(1)と同様にして,

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq 4 \\ y-2x<0 \\ y+2x>0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x^2+y^2\leq 4 \\ y-2x>0 \\ y+2x<0 \end{cases}$$



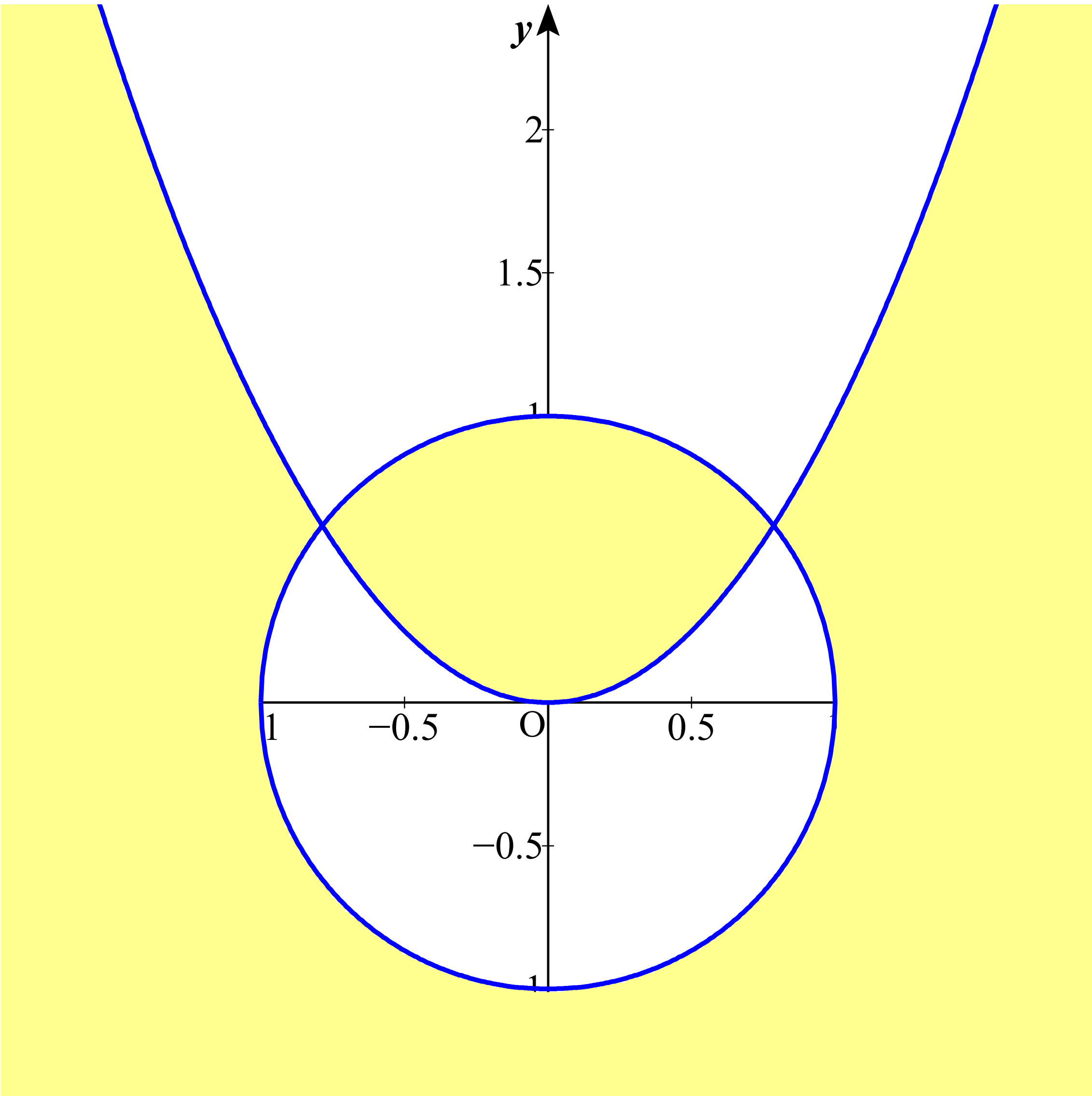
(3)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$



(4)

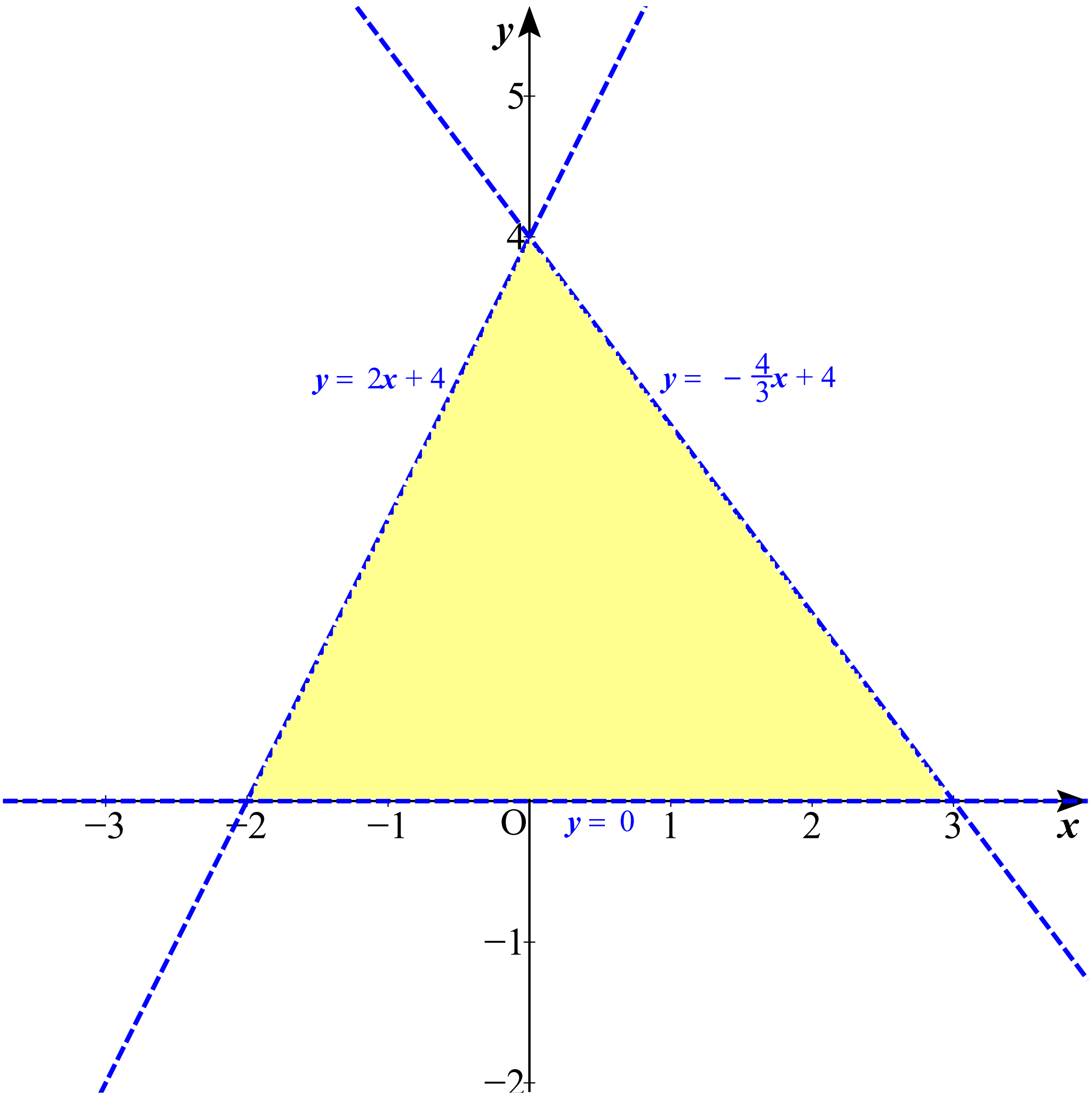
$\begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \leq 0 \end{cases}$ より，



227

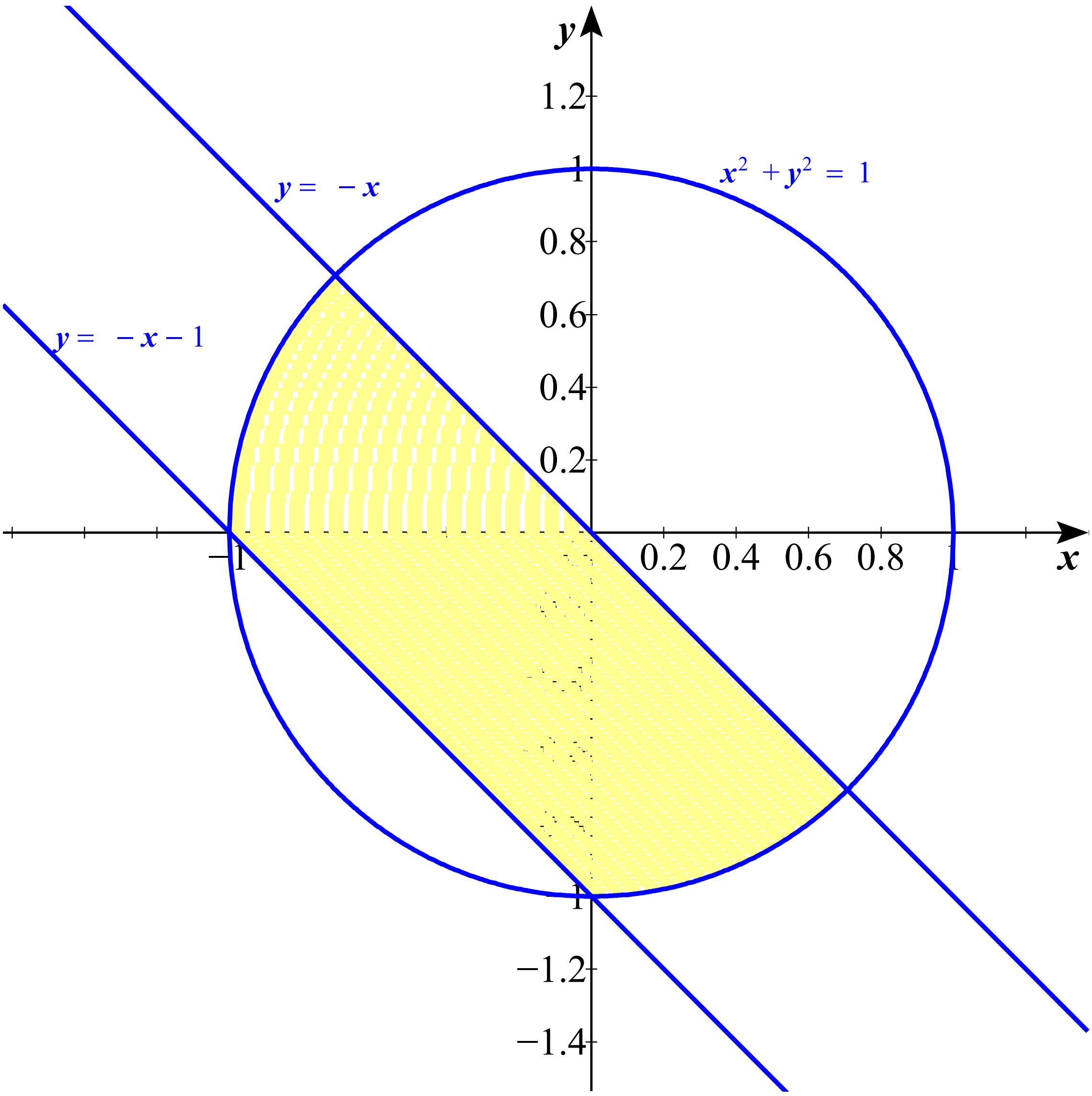
(1)

$$\begin{cases} y < 2x+4 \\ y < -\dfrac{4}{3}x+4 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{すなわち，} \begin{cases} 2x-y+4>0 \\ 4x+3y-12<0 \\ y>0 \end{cases}$$



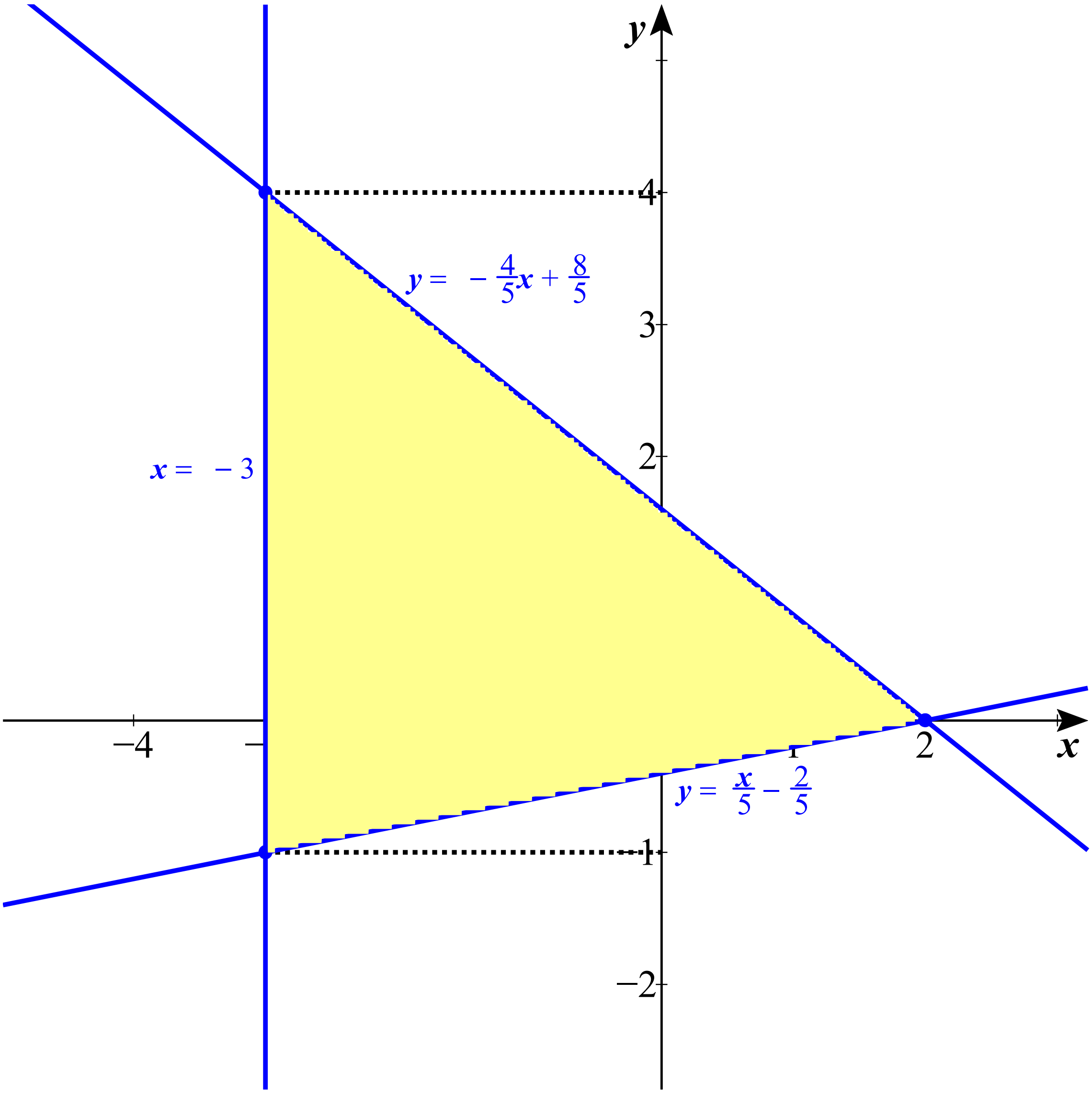
(2)

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ y\leq -x \\ y\geq -x-1 \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ x+y\leq 0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$$



228

$$\begin{cases} y \leq -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{8}{5} \\ y \geq \dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{5} \\ x \geq -3 \end{cases}$$ すなわち, $$\begin{cases} 4x + 5y - 8 \leq 0 \\ x - 5y - 2 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$



229

(1)

解法 1：領域問題で解く

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+y \leq 5,\ x+3y \leq 6$ を満たす領域は

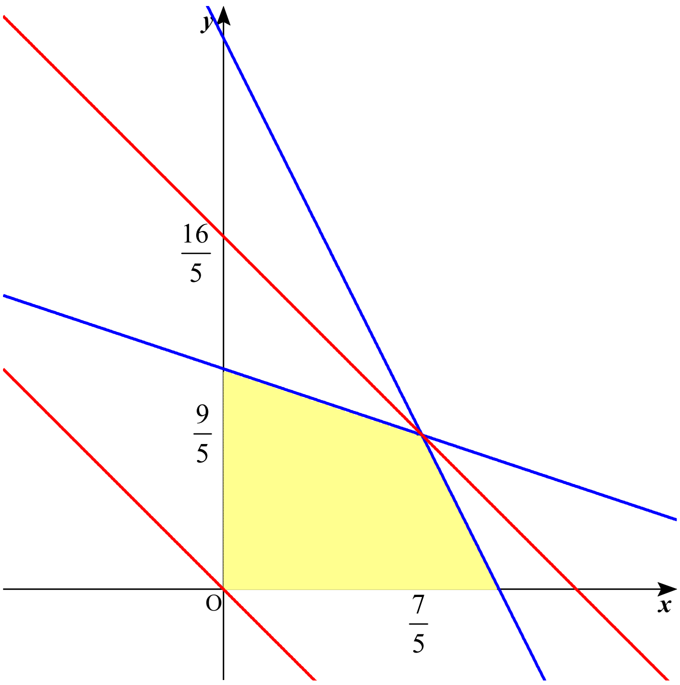
下図の境界を含む黄色で塗りつぶされた部分である。

また，$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ より，k は傾きが -1 の直線の y 切片の値を表す。

よって，直線が $\left(\frac{9}{5},\ \frac{7}{5}\right)$ を通るとき k は最大値 $\frac{16}{5}$ をとり，

$(0,\ 0)$ を通るとき最小値 0 をとる。図示すると，次のようになる。

ゆえに，$0 \leq x+y \leq \frac{16}{5}$



解法 2：不等式問題として解く

$2x+y=p$，$x+3y=q$ とおくと，$x=\frac{3}{5}p-\frac{q}{5}$，$y=-\frac{p}{5}+\frac{2}{5}q$ より，$x+y=\frac{2}{5}p+\frac{q}{5}$

また，条件より，$0 \leq p \leq 5$，$0 \leq q \leq 6$ だから，$0 \leq \frac{2}{5}p \leq 2$，$0 \leq \frac{q}{5} \leq \frac{6}{5}$

ゆえに，$0 \leq x+y \leq 2+\frac{6}{5}=\frac{16}{5}$

補足

$0 \leq 2x+y \leq 5$ と $0 \leq x+3y \leq 6$ から直接 $0 \leq x+y \leq \frac{16}{5}$ が求められるが，手続きが煩雑になる。

(2)

解法 1：領域問題で解く

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 6,\ x + 2y \leq 6$ を満たす領域は

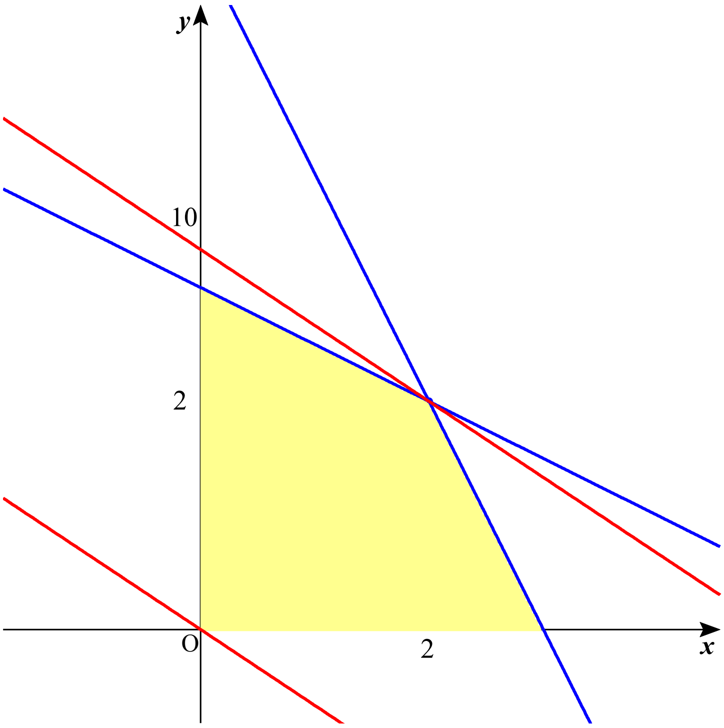
下図の境界を含む黄色で塗りつぶされた部分である。

また，$2x + 3y = k$ とすると，$y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{k}{3}$ より，$\dfrac{k}{3}$ は傾きが $-\dfrac{2}{3}$ の直線の y 切片の値を表す。

よって，切片が最大のとき $2x + 3y$ は最大値を，最小のとき $2x + 3y$ は最小値をとる。

ゆえに，この直線が点 $(2,\ 2)$ を通るとき $2x + 3y$ は最大値 $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$ をとり，

原点を通るとき最小値 0 をとる。



解法 2：不等式問題として解く

$2x + y = p$，$x + 2y = q$ とおくと，

$x = -\dfrac{2}{3}p - \dfrac{q}{3}$，$y = -\dfrac{p}{3} + \dfrac{2}{3}q$ より，$2x + 3y = \dfrac{p}{3} + \dfrac{4}{3}q$

また，条件より，$0 \leq p \leq 6$，$0 \leq q \leq 6$

よって，$2x + 3y$ は，

$p = q = 0$ のとき，すなわち $x = y = 0$ のとき，最小値 0 を，

$p = q = 6$ のとき，すなわち $2x + y = 6$ かつ $x + 2y = 6$ より $x = y = 2$ のとき，最大値 10 をとる。

230

P を x g，Q を y g とったとき，

A 成分を 12mg 以上，B 成分を 15mg 以上とったことになるとすると，

とった A 成分は $2x+y$ mg，B 成分は $x+2y$ mg だから，

$2x+y \geq 12$， $x+2y \geq 15$

また，費用は $4x+6y$ 円である。

よって，

$x,\ y$ が $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+y \geq 12,\ x+2y \geq 15$ を満たす条件の下で

$4x+6y$ が最小値をるときの $x,\ y$ の値を求める問題に置き換えることができる。

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+y \geq 12,\ x+2y \geq 15$ を満たす領域は

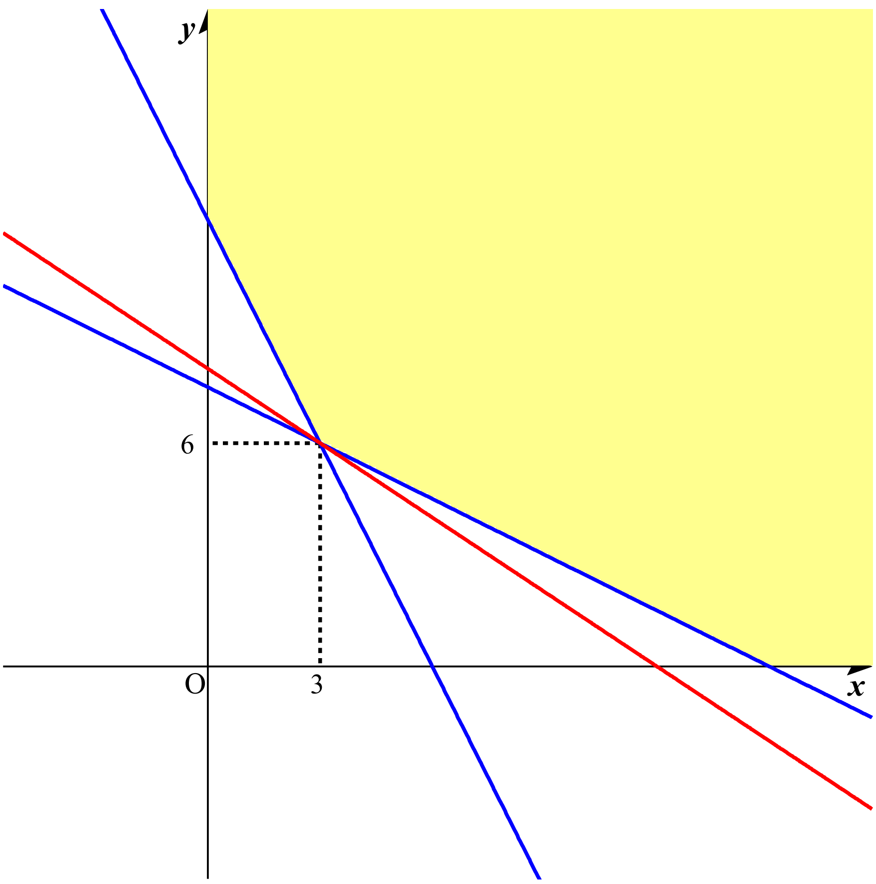
下図の境界を含む黄色で塗りつぶされた部分である。

また，$4x+6y=k$ とすると，$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{k}{6}$ より，$\dfrac{k}{6}$ は傾きが $-\dfrac{2}{3}$ の直線の y 切片の値を表す。

よって，y 切片の値が最小のとき $4x+6y$ は最小値をとる。

ゆえに，この直線が点 $(3,\ 6)$ を通るとき $4x+6y$ が最小となる。

すなわち P を 3g，Q を 4g とったとき費用が最小となる。



不等式問題として解くと，

$2x+y=s$，$x+2y=t$ とおくと，$x=\frac{2}{3}s-\frac{t}{3}$, $y=-\frac{s}{3}+\frac{2}{3}t$ より，$4x+6y=\frac{2}{3}s+\frac{8}{3}t$

また，条件より，$s \geq 12,\ t \geq 15$

よって，$4x+6y$ が最小となるのは，$s=12,\ t=15$ のときである。

ゆえに，$\begin{cases} 2x+y=12 \\ x+2y=15 \end{cases}$ を解くことにより，$x=3,\ y=6$

231

$x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0$ を満たす領域は次図の境界を含む黄色で塗りつぶされた部分である。

また，$2x-y=k$ とすると，$y=2x-k$ より，$-k$ は傾き 2 の直線の y 切片の値を表す。

よって，y 切片の値が最小のとき k は最大値を，最大のとき k は最小値をとる。

k が最小値をとるとき

k の最小値を $k_{\min}$ とすると，$y=2x-k_{\min}$ と $x^2+y^2=4,\ y \geq 0$ が接する。

このとき $2x-y-k_{\min}=0$ と $x^2+y^2=4$ の中心 $(0,\ 0)$ の距離が円の半径 2 となるから，

$$\frac{\left|-k_{\min}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2 \qquad \therefore \left|k_{\min}\right|=2\sqrt{5}$$

これと $y=2x-k_{\min}$ の y 切片 $-k_{\min}>0$ より，$k_{\min}<0$

よって，$k_{\min}=-2\sqrt{5}$

また，このとき $\begin{cases} y=2x+2\sqrt{5} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ より，$x^2+\left(2x+2\sqrt{5}\right)^2=4 \qquad \therefore 5x^2+8\sqrt{5}x+16=0$

解は重解だから，解を α とすると解と係数の関係より，$2\alpha=-\frac{8\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$

よって，$y=2\alpha+2\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

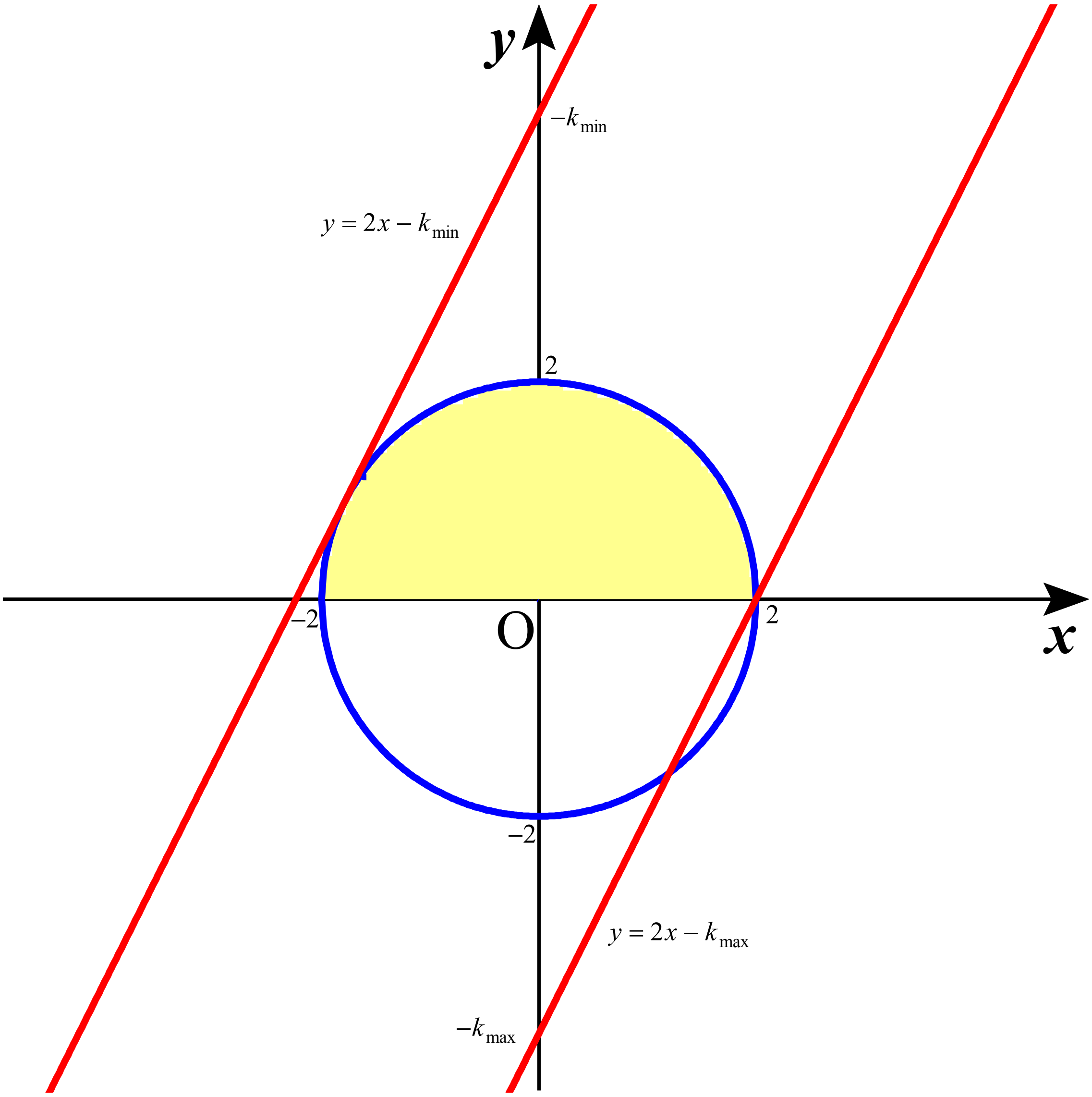
ゆえに，$x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$ をとる。

k が最大値をとるとき

k の最大値を $k_{\max}$ とすると，

$y=2x-k_{\max}$ は点 $(2,\ 0)$ を通るから $k_{\max}=4$

よって，$x=2,\ y=0$ のとき最大値 4 をとる。



y
$-k_{\min}$
$y=2x-k_{\min}$
2
-2
O
2
x
-2
$y=2x-k_{\max}$
$-k_{\max}$

232

破線の境界を含まない。

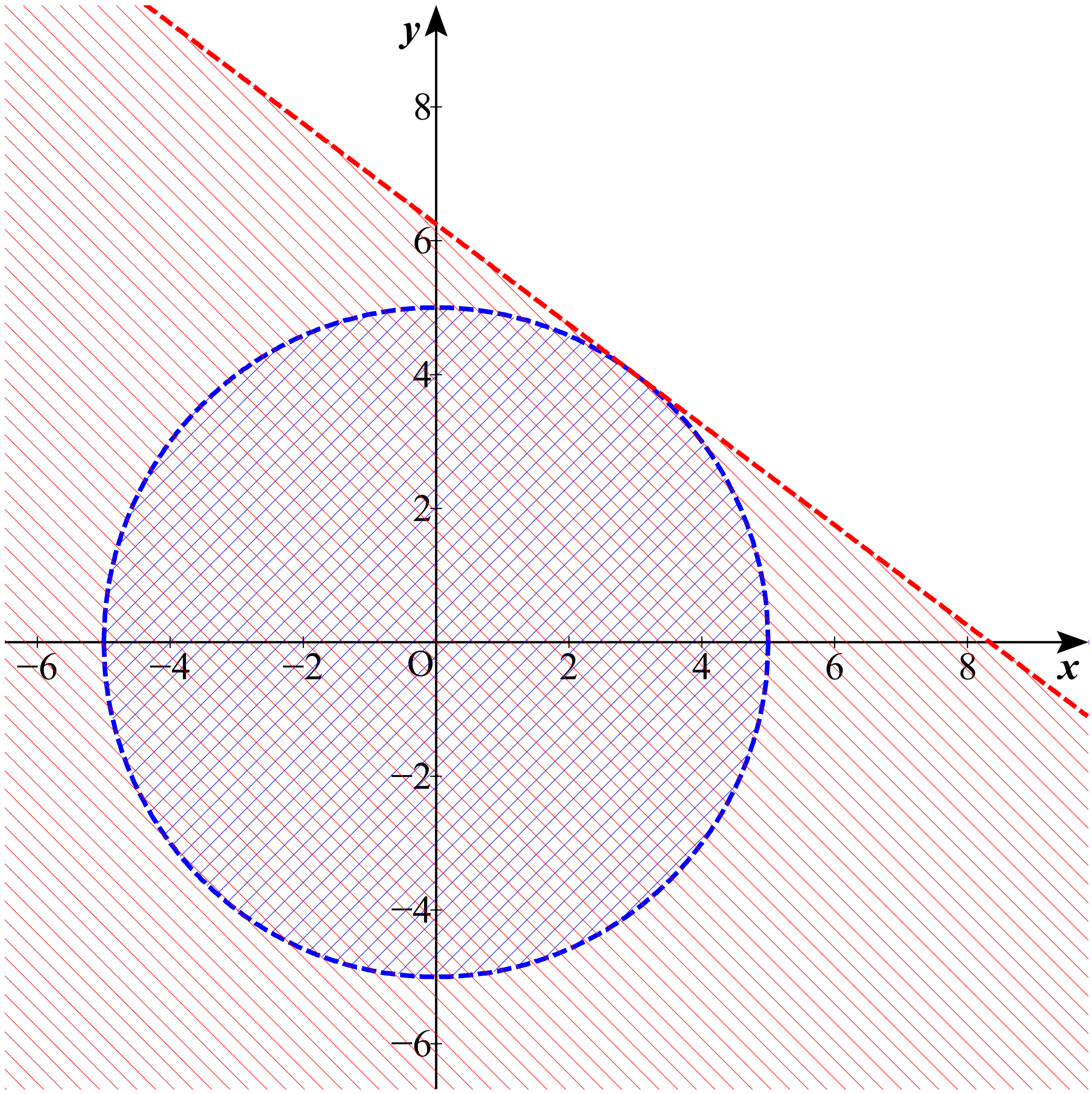
略解

　領域の包含関係から，(1)～(3)が成り立つ。

(1)

青色：$x^2+y^2<25$

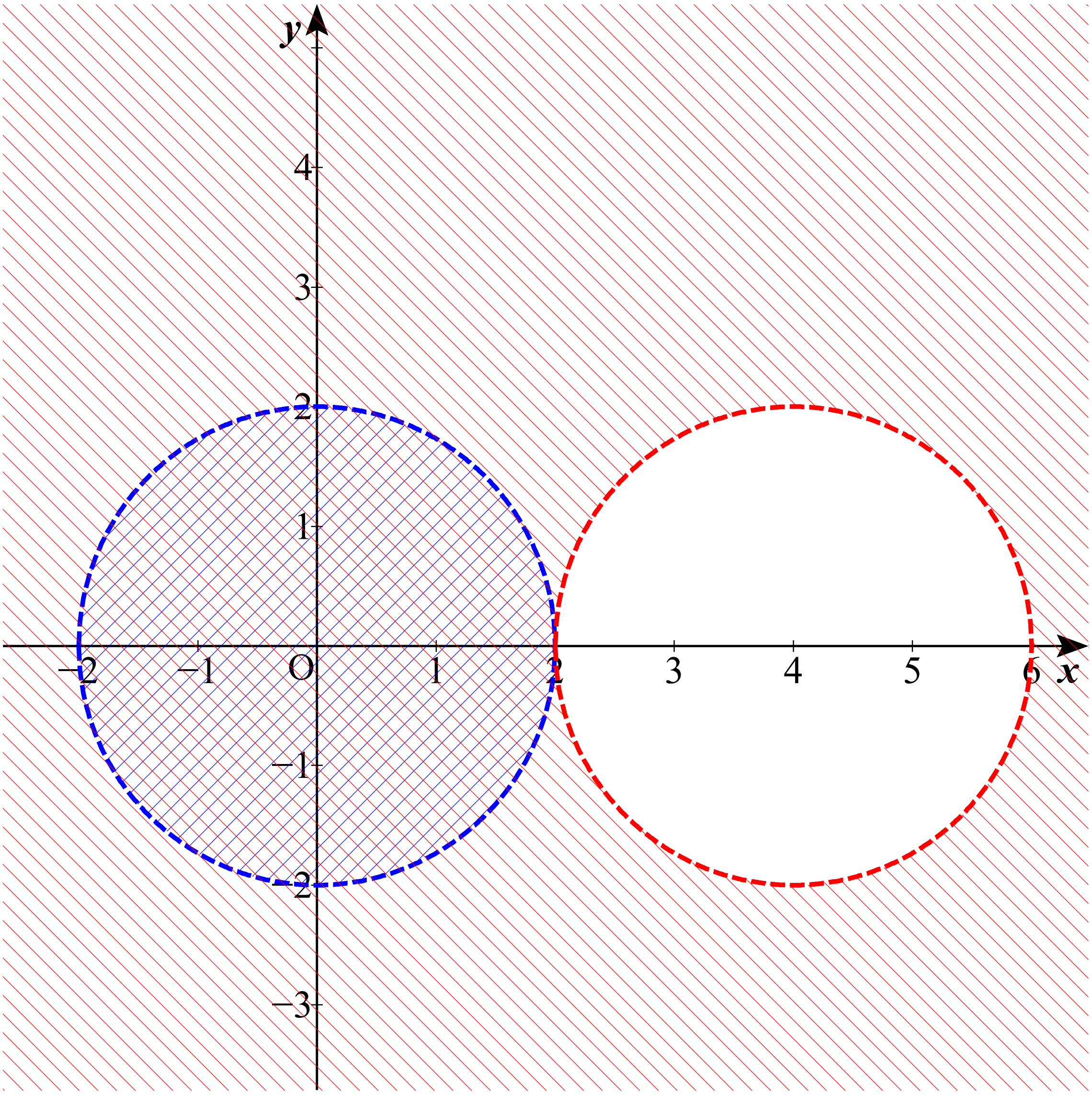
赤色：$3x+4y<25$



(2)

青色： $x^2+y^2<4$

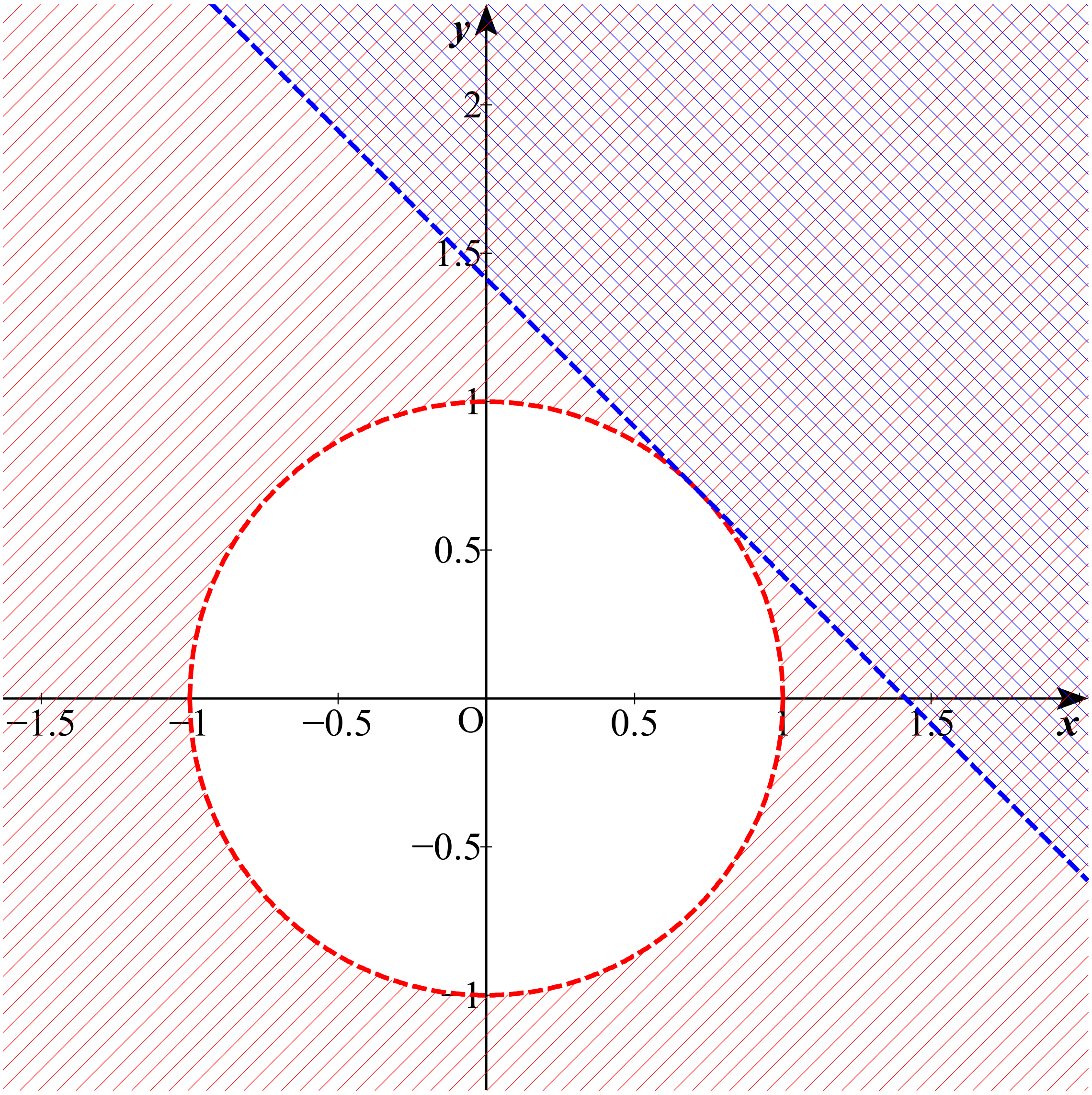
赤色： $x^2+y^2-8x+12>0$



(3)

青色：$x+y>\sqrt{2}$

赤色：$x^2+y^2>1$



233

$x^2+y^2-2x+4y<4$ を変形すると，$(x-1)^2+(y+2)^2<9$ ・・・①

$2y-x+3\geq 0$ を変形すると，$y\geq \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ・・・②

よって，①，②を同時に満たす領域は下図の赤色斜線と青色斜線が重なっている部分である。ただし，破線の境界部は含まない。

これより，この領域に含まれる整数 x は，$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ である。

次に，それぞれの整数 x について，①と②を同時に満たす整数 y を求める。

$x=-1$ のとき

$(y+2)^2<5$ かつ $y\geq -2$ より，$y=-2,\ -1,\ 0$

$x=0$ のとき

$(y+2)^2<8$ かつ $y\geq -\frac{3}{2}$ より，$y=-1,\ 0$

$x=1$ のとき

$(y+2)^2<9$ かつ $y\geq -1$ より，$y=-1,\ 0$

$x=2$ のとき

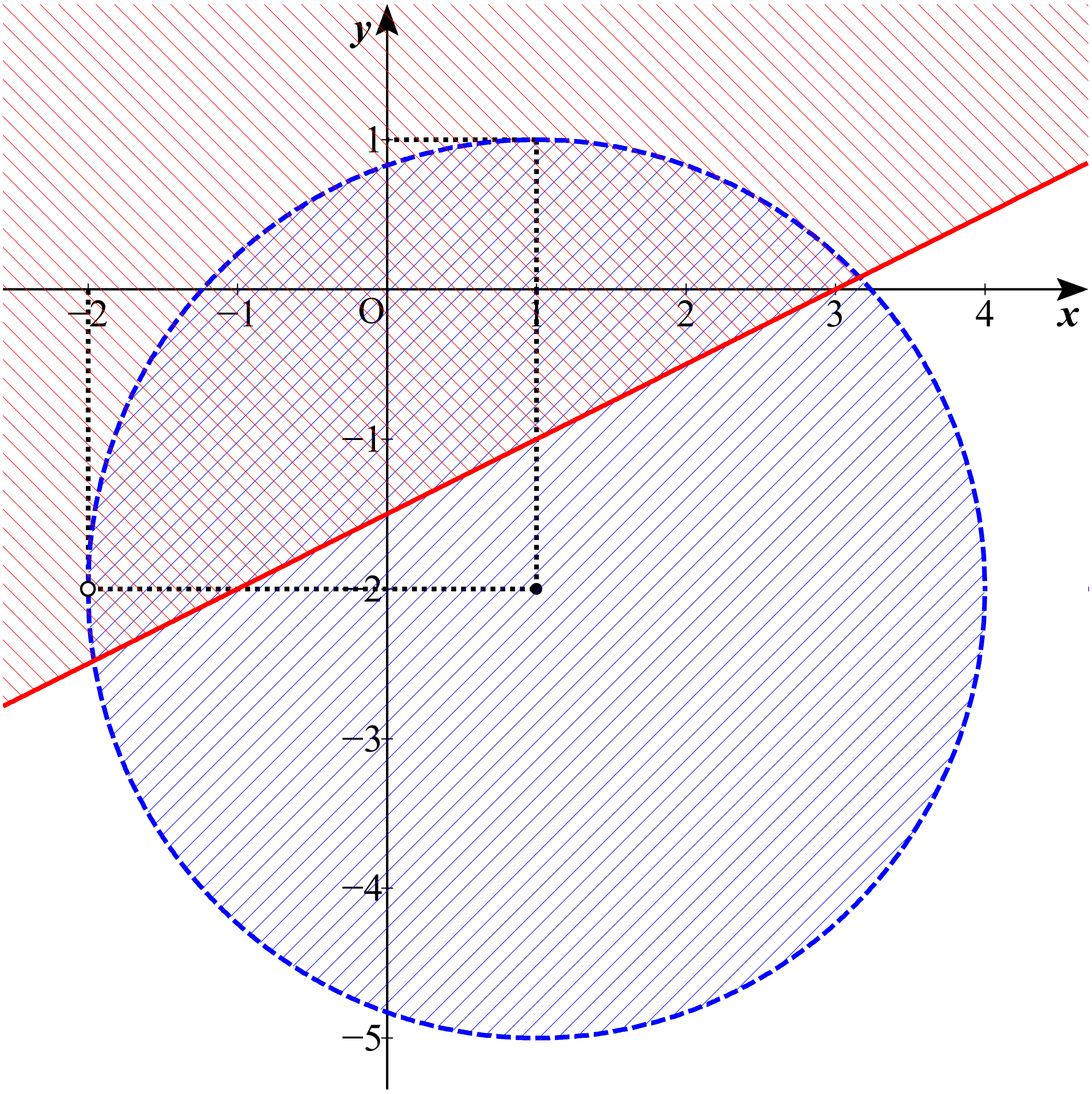
$(y+2)^2<8$ かつ $y\geq -\frac{1}{2}$ より，$y=0$

$x=3$ のとき

$(y+2)^2<5$ かつ $y\geq 0$ より，$y=0$

以上より，求める整数の組は,

$(-1,\ -2),\ (-1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (1,\ -1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0)$



y
x
O
1
−1
−2
−3
−4
−5
2
3
4

234

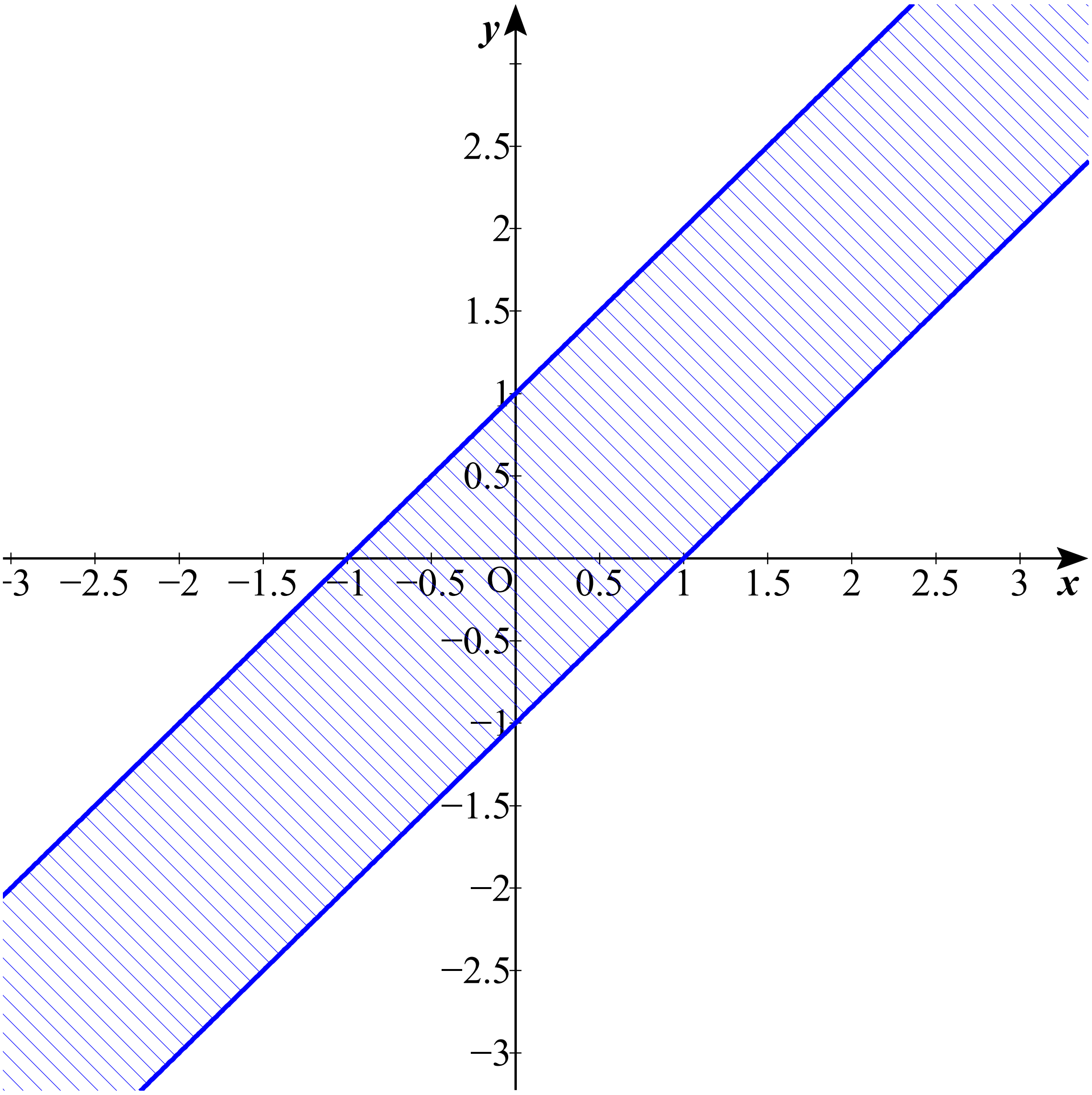
(1)

$$|x-y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-y \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+1 \\ y \geq x-1 \end{cases}$$

より，領域は下図斜線部となる。ただし，境界線を含まない。



(2)

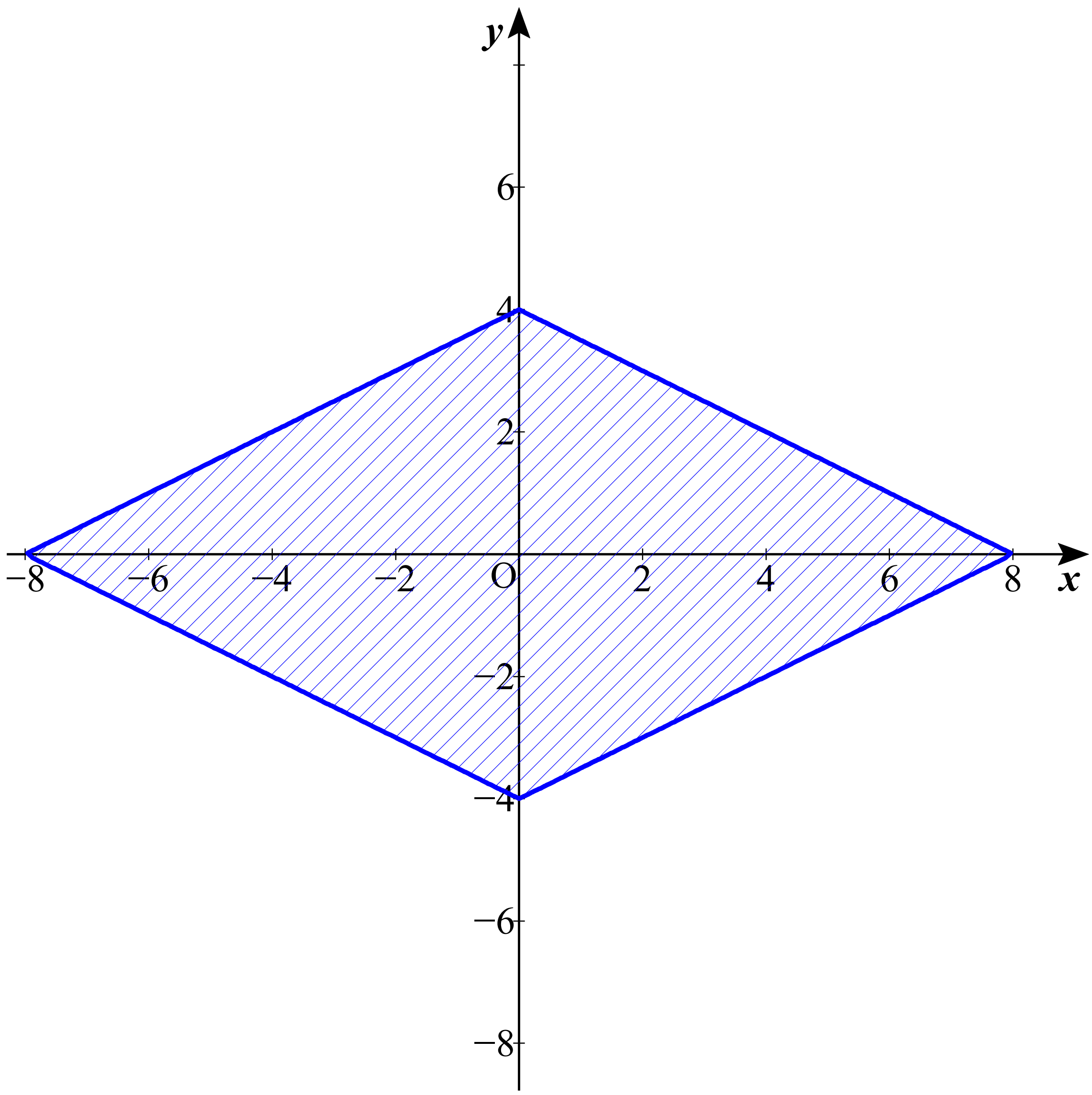
$x \geq 0,\ y \geq 0$ のとき，$x+2y<8$　$\therefore y<-\dfrac{1}{2}x+4$

$x \geq 0,\ y<0$ のとき，$x-2y<8$　$\therefore y>\dfrac{1}{2}x-4$

$x<0,\ y \geq 0$ のとき，$-x+2y<8$　$\therefore y<\dfrac{1}{2}x+4$

$x<0,\ y<0$ のとき，$-x-2y<8$　$\therefore y>-\dfrac{1}{2}x-4$

より，領域は下図斜線部となる。ただし，境界線を含まない。



235

解法 1：P と Q は互いに，$y=ax+b$ で分けられた，異なる領域に含まれる。

$y=ax+b$ が P，Q の間を通るならば，

P，Q の一方は $y>ax+b$ の領域に含まれ，もう一方は $y<ax+b$ の領域に含まれる。

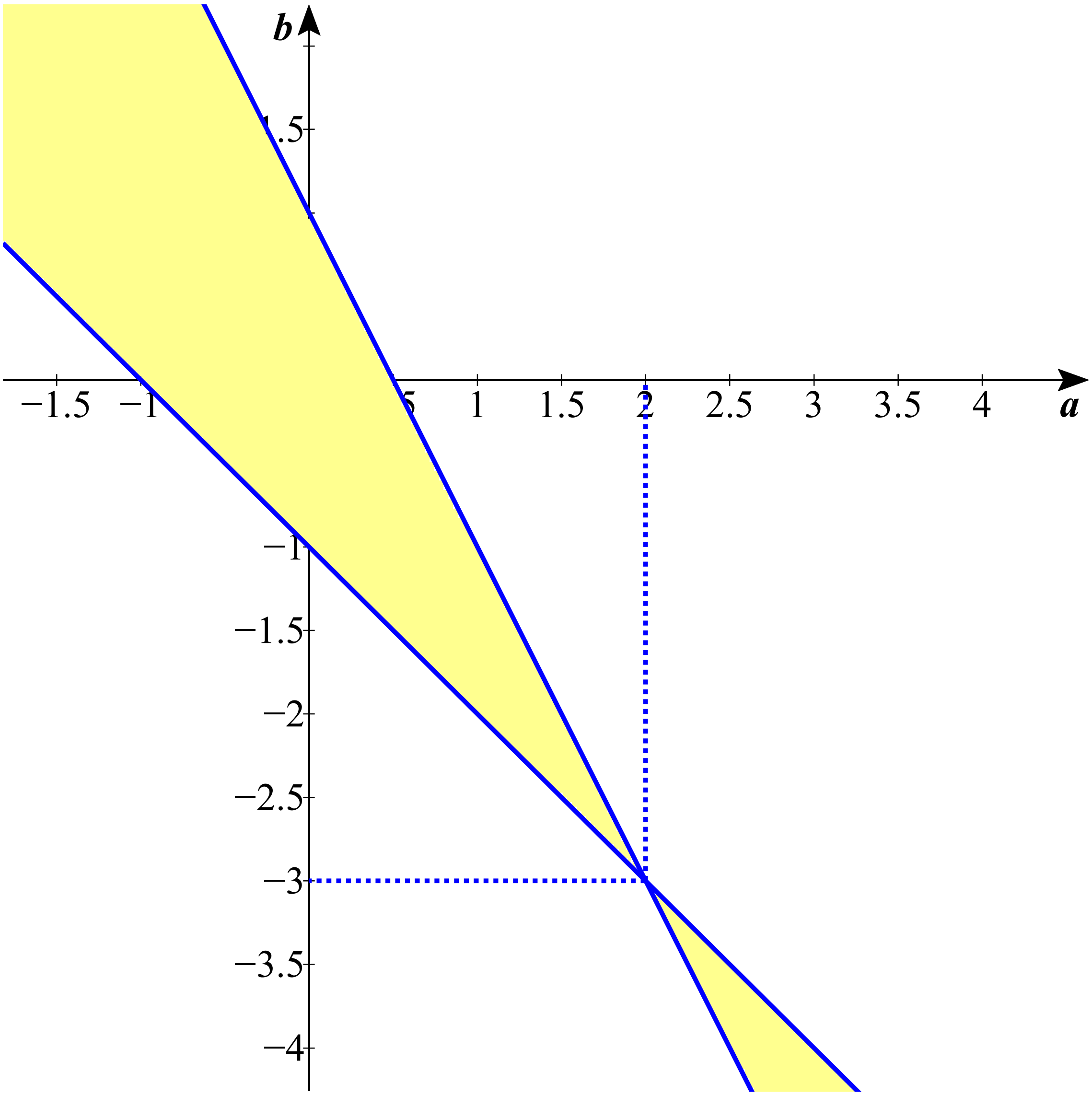
P が $y>ax+b$ の領域に含まれ，Q が $y<ax+b$ の領域に含まれるとき

$\begin{cases} -1>a+b \\ 1<2a+b \end{cases}$ より，$\begin{cases} b<-a-1 \\ b>-2a+1 \end{cases}$ ・・・①

P が $y<ax+b$ の領域に含まれ，Q が $y>ax+b$ の領域に含まれるとき

$\begin{cases} -1<a+b \\ 1>2a+b \end{cases}$ より，$\begin{cases} b>-a-1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$ ・・・②

①または②より，領域は下図となる。ただし，境界線を含まない。



解法 2：線分 PQ の方程式と $y=ax+b$ の連立方程式の解 x の存在範囲に注目

線分 PQ の方程式は $y=2x-3$ （$1\leq x\leq 2$ ）だから，

$y=ax+b\ (a\neq 2)$が P と Q の間を通るならば

$y=ax+b$ は線分 PQ と $1<x<2$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつ。

すなわち $\begin{cases} y=2x-3 & \cdots① \\ y=ax+b & \cdots② \end{cases}$ の x の解が $1<x<2$ を満たす。

①と②の差をとり，整理すると，$(a-2)x=-(b+3)$

これと $a\neq 2$，$1<x<2$ より，$1<\dfrac{b+3}{2-a}<2$

これを $(2-a)^2$ 倍すると，$(2-a)^2<(2-a)(b+3)<2(2-a)^2$

$$(2-a)^2<(2-a)(b+3)<2(2-a)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2<(2-a)(b+3) \\ (2-a)(b+3)<2(2-a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+b+1)<0 \\ (a-2)(2a+b-1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2>0 \\ a+b+1<0 \\ 2a+b-1>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a-2<0 \\ a+b+1>0 \\ 2a+b-1<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>2 \\ b<-a-1 \\ b>-2a+1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a<2 \\ b>-a-1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$$

ここで，

$\begin{cases} a>2 \\ b<-a-1 \\ b>-2a+1 \end{cases}$ のとき，$-2a+1<-a-1$ より，$a>2$

$\begin{cases} a<2 \\ b>-a-1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$ のとき，$-a-1<-2a+1$ より，$a<2$

よって，$\begin{cases} b<-a-1 \\ b>-2a+1 \end{cases}$ または $\begin{cases} b>-a-1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$

236

条件より，$y = x^2 + ax + a^2$ が通らない領域は a が実数でない場合の領域である。

a が実数でないならば，$y = x^2 + ax + a^2$ から得られた a についての 2 次方程式

$a^2 + xa + x^2 - y = 0$ は実数解をもたない。

よって，この方程式の判別式を D とすると，

$D = x^2 - 4\left(x^2 - y\right) = -3x^2 + 4y$，$D < 0$ より，$-3x^2 + 4y < 0$

ゆえに，$y < \dfrac{3}{4}x^2$