

図形と方程式 演習問題

14

条件を満たす $3x - y + 1 = 0$ 上の点を $(t, 3t + 1)$ とすると,

$$(t - 4)^2 + \{3t + 1 - (-5)\}^2 = (t - 2)^2 + \{3t + 1 - (-3)\}^2 \quad \therefore t = -4$$

ゆえに, $(-4, -11)$

15

(1)

$AB \perp OH$, OH の傾き $= \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$ より, 直線 AB の傾きは -3

$OB \perp AH$, AH の傾き $= \frac{1-2}{3-5} = \frac{1}{2}$ より, 直線 OB の傾きは -2

(2)

点 B は直線 AB と直線 OB の交点である。

これと

直線 AB の方程式は $y = -3(x - 5) + 2$, すなわち $y = -3x + 17$

直線 OB の方程式は $y = -2x$

より, $B(17, -34)$

16

条件より, 連立方程式 $\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + k = 0 \end{cases}$ の解は $x - ky + 5 = 0$ を満たす。

そこで, まずこの連立方程式の解を k を用いて表すと, $x = \frac{k-6}{4}$, $y = \frac{3k-6}{8}$

これを $x - ky + 5 = 0$ に代入して整理すると, $(k+2)(3k-14) = 0$

$$\therefore k = -2, \frac{14}{3}$$

17

(1)

$C(s, t)$ とすると, 線分 BC の中点は直線 l 上の点だから, $\frac{t+1}{2} = \frac{s+3}{2} + 1$

$$\therefore s - t = -4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 BC と直線 l とのなす角は 90° であることと直線 l の傾きが 1 であることから,
直線 BC の傾きは -1 である。

よって, $\frac{t-1}{s-3} = -1$, すなわち $s + t = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ②より, $s = 0, t = 4$

ゆえに, $C(0, 4)$

(2)

$AP + BP = AP + CP$ より,

$AP + CP$ が最小値をとるときの点 P の座標を求めればよい。

$AP + CP$ が最小値をとるのは A, P, C が一直線上に並んだときであり,

このときの点 P の座標は直線 AC と直線 l との交点の座標となる。

直線 AC の方程式は $y = \frac{1-4}{1-0}x + 4$, すなわち $y = -3x + 4$

よって,

求める点 P の座標は, 連立方程式 $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$ を解くことにより, $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$

また, 最小値は $AP + BP = AP + CP = \sqrt{(1-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$

18

円 $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$ は, $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$ より,
中心の座標が $(5, -3)$, 半径 3 の円である。

直線 $x - 2y + 2 = 0$ と $(5, -3)$ の距離は $\frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}} \dots \textcircled{1}$

この距離は $\left(\frac{13}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{169}{5} > 3^2$ より, 円の半径より大きい。

したがって, 円と直線は共有点をもたない。

よって, 線分 PQ の長さが最短になるのは,

直線に最も近い点 P から直線に下ろした垂線の足が点 Q となる場合である。

すなわち円の中心から直線に下ろした垂線の足が点 Q ,

その垂線と円の交点が点 P となる場合である。

ゆえに, 線分 PQ の長さの最小値は①および円の半径が 3 であることから,

$$\frac{13}{\sqrt{5}} - 3 = \frac{13\sqrt{5} - 15}{5}$$

19

(1)

接線 l の方程式は $1 \cdot x + \sqrt{3}y = 4$, すなわち $x + \sqrt{3}y = 4$

接線 l 上の点 Q の y 座標は 0 だから, $x = 4$

よって, $Q(4, 0)$

(2)

円 C_2 の半径は, その中心と接線 l の距離と等しいから, $\frac{|2 + \sqrt{3} \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1$

よって, その方程式は $(x-2)^2 + y^2 = 1$

(3)

2 つの円の交点を通る円または直線の方程式は, k を実数とすると,

$k(x^2 + y^2 - 4) + (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0$ と表せる。

求める円は点 $Q(4, 0)$ を通るから,

$$k(4^2 + 0^2 - 4) + (4-2)^2 + 0^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

よって, その方程式は,

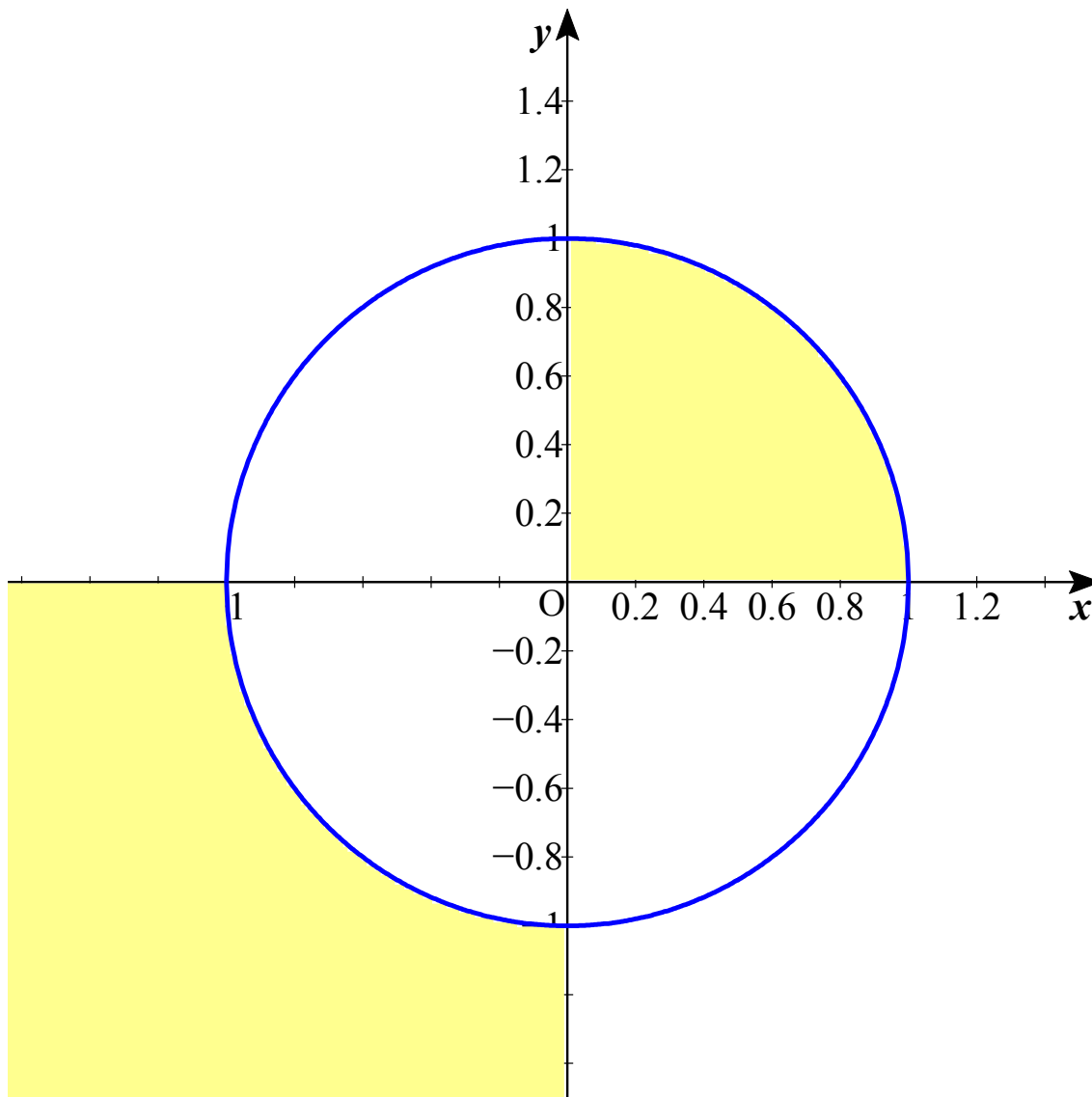
$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 4) + (x-2)^2 + y^2 - 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\{-x^2 - y^2 + 4\} + 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(3x^2 + 3y^2 - 16x + 16) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left\{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 - \frac{16}{9}\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

20

 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ のとき, $x > 0, y > 0$ $x^2 + y^2 - 1 > 0$ のとき, $x < 0, y < 0$

境界を含まない。



21

(1)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 + (y-p)^2 = 9 \end{cases} \quad \text{より,}$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - p\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\{x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2 - 9)\} = 0$$

$$\text{よって, } x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2 - 9) = 0$$

$$p=5 \text{ のとき, } x^4 - 16x^2 + 64 = 0 \text{ すなわち } (x^2 - 8)^2 = 0 \quad \text{よって, } x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{これと } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ より,}$$

$$\text{共有点の座標は } (-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$$

(2)

解法 1: 恒等式を利用して解く。

$x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2 - 9) = 0$ が重解を 1 つもつ場合だから、
重解を α 、他の α でない実数解を β, γ ($\beta \neq \gamma$) とすると、

$$x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2 - 9) \cdots \textcircled{1} \text{ は}$$

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma) \cdots \textcircled{2} \text{ と表せる。}$$

$(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$ を展開し、 x について整理すると、

$$x^4 - (2\alpha + \beta + \gamma)x^3 + (2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma)x^2 - (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma)x + \alpha^2\beta\gamma$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は恒等式だから、

$$2\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} \cdots \textcircled{3}$$

$$2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma = 4(1-p) \cdots \textcircled{4}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma = 0 \cdots \textcircled{5}$$

$$\alpha^2\beta\gamma = 4(p^2 - 9) \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{3}$ を使って $\textcircled{5}$ の右辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma &= \alpha^2(\beta + \gamma) + 2\alpha\beta\gamma \\ &= \alpha\{\alpha(\beta + \gamma) + 2\beta\gamma\} \\ &= \alpha\left\{-\frac{\beta + \gamma}{2}(\beta + \gamma) + 2\beta\gamma\right\} \\ &= -\frac{\alpha(\beta - \gamma)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \alpha(\beta - \gamma)^2 = 0$$

$$\text{これと } \beta \neq \gamma \text{ より, } \alpha = 0$$

これより, ③, ④, ⑥はそれぞれ

$$\beta = -\gamma \quad \cdots \text{③'}$$

$$\beta\gamma = 4(1-p) \quad \cdots \text{④'}$$

$$p^2 - 9 = 0 \quad \cdots \text{⑥'}$$

$$\text{③'}, \text{④'} \text{より, } \gamma^2 = 4(p-1)$$

$$\text{⑥'} \text{より, } p = -3, 3$$

$p = -3$ とすると, $\gamma^2 = -16$ となり, γ が実数であることに反する。よって不適。

$$p = 3 \text{ とすると, } \gamma^2 = 8$$

これと③'より, 他の2解は $\pm 2\sqrt{2}$

以上より,

$p = 3$ のとき,

$$x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2-9) = 0 \text{ は重解 } 0 \text{ と他の } 2 \text{ 解 } \pm 2\sqrt{2} \text{ をもつ。}$$

すなわち, 共有点の x 座標は $0, \pm 2\sqrt{2}$

これと $y = \frac{1}{2}x^2$ より, 共有点の座標は $(0, 0), (-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$

解法2: グラフの概形を利用して解く。

3個の共有点をもつならば, 放物線のグラフと円のグラフは1つの点で接し,

それ以外の2点で交わる。

また, 与えられた円と放物線はいずれも y 軸について対称だから,

ただ1つの点で接するとすれば,

$y = \frac{1}{2}x^2$ は x 軸に接し, 接点は原点である。

$$x^2 + (y-p)^2 = 9 \text{ が原点を通るとすれば, } 0^2 + (0-p)^2 = 9 \text{ より, } p = \pm 3 \text{ であり,}$$

中心と原点を結ぶ線分と x 軸は垂直なので, $x^2 + (y \pm 3)^2 = 9$ と x 軸は原点で接する。

より,

その点は原点である。

さらに, それ以外の2点で交わるためには, $y = \frac{1}{2}x^2$ は下に凸のグラフだから,

p の値は3でなければならない。

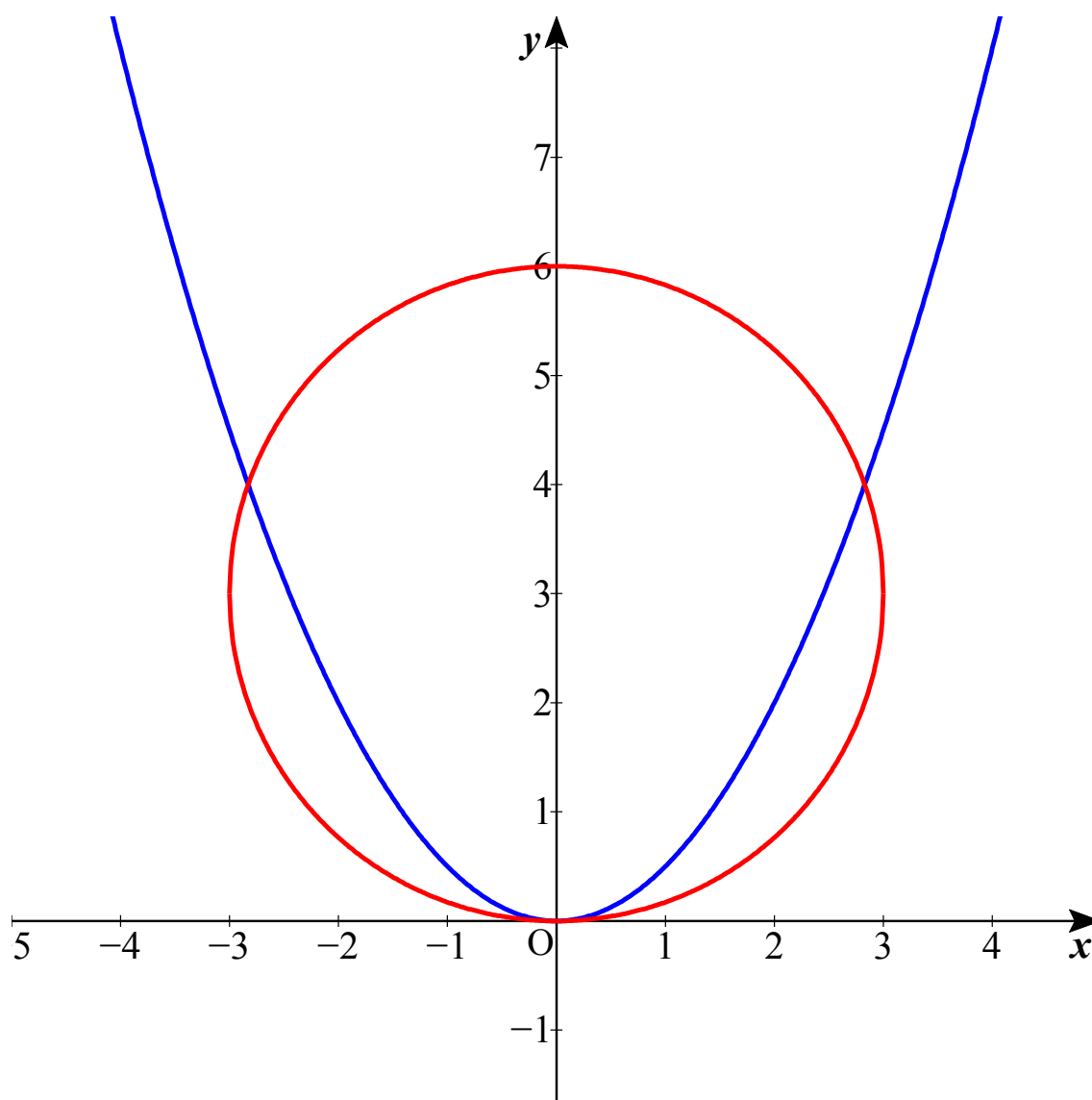
$$\text{これと } x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2-9) = 0 \text{ より, } x^2(x^2-8) = 0$$

よって, $x = 0, \pm 2\sqrt{2}$

これと $y = \frac{1}{2}x^2$ より, 共有点の座標は $(0, 0), (-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$

逆に, これらの3点は $p = 3$ のとき円と放物線のいずれの方程式も満たす。

ゆえに, 求める共有点の座標は $(0, 0), (-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$ である。



(3)

$x^4 - 4(p-1)x^2 + 4(p^2 - 9) = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつときの p の範囲を求めればよく,

これは x^2 を t とおいた 2 次方程式

$$t^2 - 4(p-1)t + 4(p^2 - 9) = 0$$

が異なる正の 2 実数解をもつときの p の範囲を求めることと同じである。

判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = \{2(p-1)\}^2 - 4(p^2 - 9) = -8(p-5) \text{ および } D > 0 \text{ より, } p < 5 \quad \cdots \textcircled{7}$$

解と係数の関係より,

$$4(p-1) > 0 \quad \therefore p > 1 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$4(p^2 - 9) > 0 \quad \therefore p < -3 \text{ または } 3 < p \quad \cdots \textcircled{9}$$

⑦かつ⑧かつ⑨より, $3 < p < 5$

22

点 Q の座標

$Q\left(t, \frac{t^2}{a}\right)$ とすると,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{t^2 + \left(a - \frac{t^2}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2} \left(t^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2} \end{aligned}$$

よって, $t^2 = \frac{a^2}{2}$ のとき, すなわち $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$ のとき PQ は最小になる。

ゆえに, 点 Q の座標は $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2}a\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$

点 Q の軌跡

$Q(x, y)$ とすると,

$Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ のとき,

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ より, } a = -\sqrt{2}x \text{ (ただし, } a \neq 0 \text{ より, } x \neq 0)$$

$$\text{これと } y = \frac{1}{2}a \text{ より, } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ (} x \neq 0)$$

$Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ のとき

$$\text{同様にして, } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ (} x \neq 0)$$

以上より, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ または $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ただし, $x \neq 0$

23

(1)

$$x^2 - mx + y^2 = 1 \text{ より, } mx = x^2 + y^2 - 1$$

【1】 $x=0$ のとき

$$y = \pm 1$$

よって, $(0, -1), (0, 1)$ は領域 F に含まれる。【2】 $x \neq 0$ のとき

$$mx = x^2 + y^2 - 1 \text{ より, } m = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x}$$

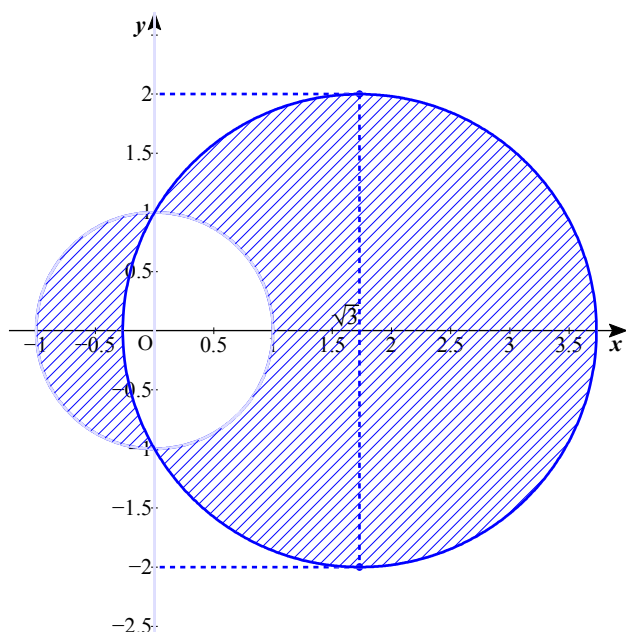
$$\text{これと } 0 \leq m \leq 2\sqrt{3} \text{ より, } 0 \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\text{各辺に } x^2 \text{ をかけると, } 0 \leq x(x^2 + y^2 - 1) \leq 2\sqrt{3}x^2$$

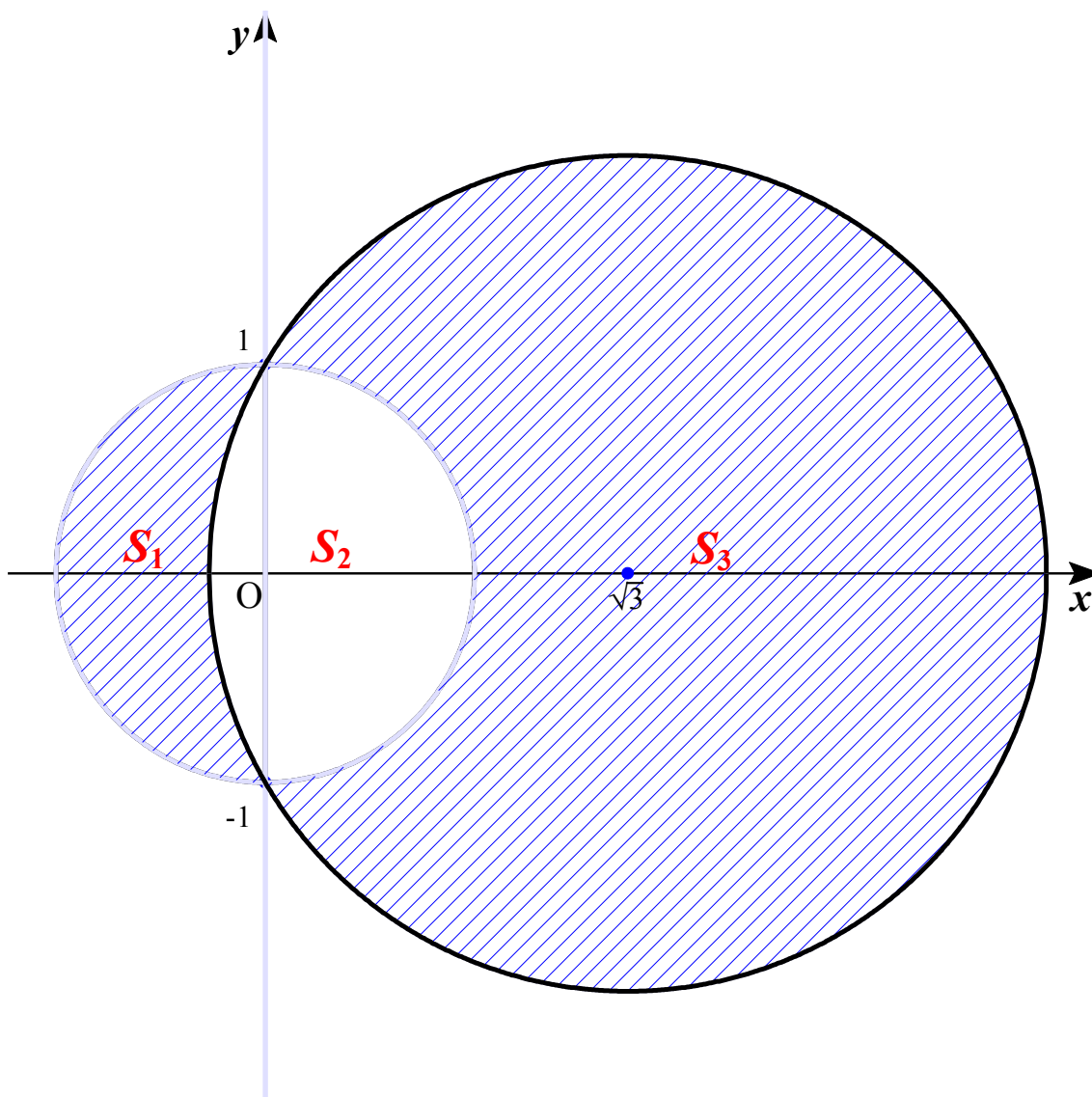
よって,

$$\begin{aligned} 0 \leq x(x^2 + y^2 - 1) \leq 2\sqrt{3}x^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x(x^2 + y^2 - 1) \\ x(x^2 + y^2 - 1) \leq 2\sqrt{3}x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) \geq 0 \\ x\{(x - \sqrt{3})^2 + y^2 - 4\} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x - \sqrt{3})^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ (x - \sqrt{3})^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

【1】、【2】より、領域 F は次図となる。ただし、境界線を含む。

(2)

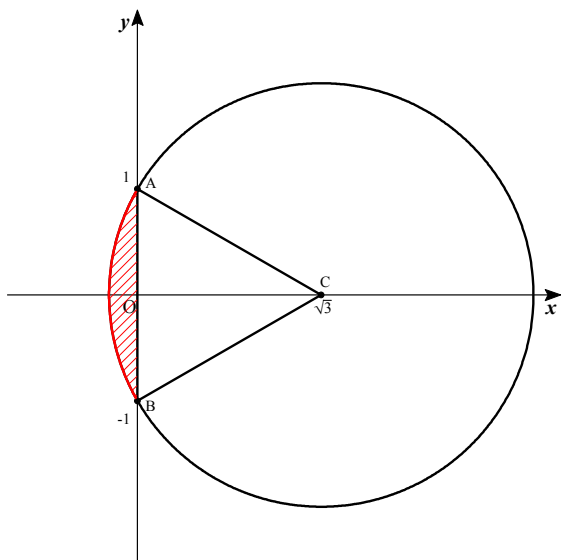


円で囲まれたそれぞれの領域の面積を上図のように S_1, S_2, S_3 とすると、
求める面積は

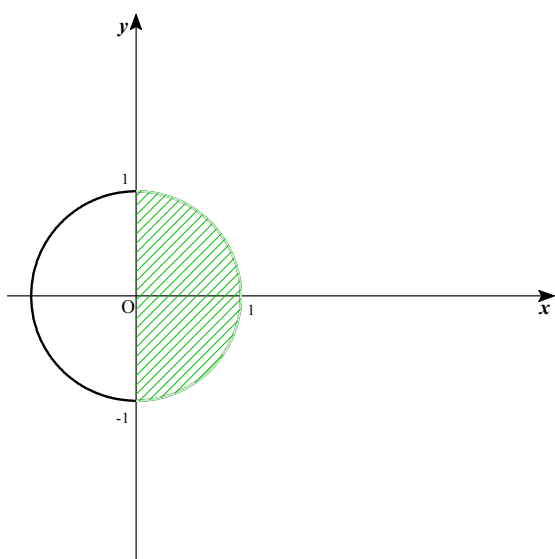
$$\begin{aligned}
 S_1 + S_3 &= (S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) - 2S_2 \\
 &= \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 - 2S_2 \\
 &= 5\pi - 2S_2
 \end{aligned}$$

2 円が重なる部分の面積 S_2 について

三角形 ABC は正三角形だから、赤色斜線部の面積は $\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$



緑色斜線部の面積は $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\pi$



$$\text{よって, } S_2 = \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \right) + \frac{1}{2}\pi = \frac{7}{6}\pi - \sqrt{3}$$

ゆえに、求める面積は

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= 5\pi - 2 \left(\frac{7}{6}\pi - \sqrt{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

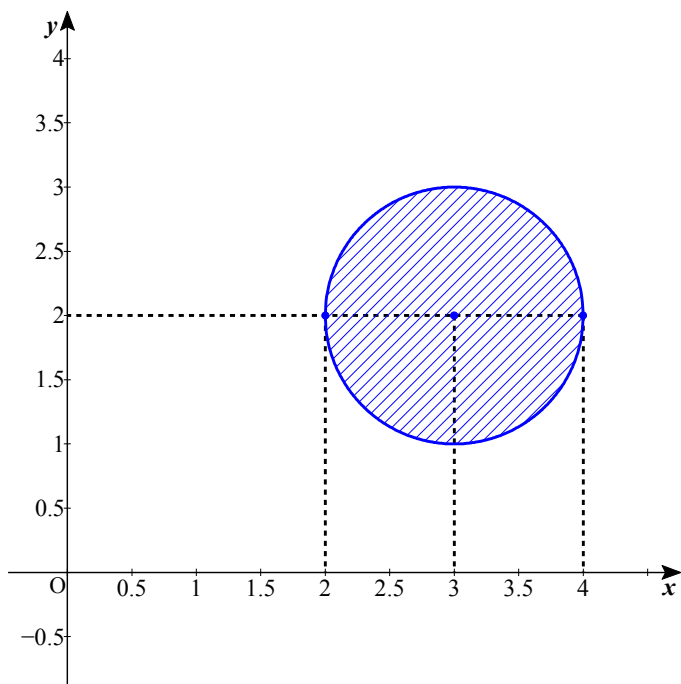
24

(1)

解法 1

 $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ は $(x-3)^2 + (y-2)^2 = p$ ($0 \leq p \leq 1$) と表せる。 $(y-2)^2 = p - (x-3)^2$, $(y-2)^2 \geq 0$ より, $p - (x-3)^2 \geq 0$ よって, $(x-3)^2 \leq p \leq 1$ より, $2 \leq x \leq 4$ ゆえに, $x=4$ のとき $2x-1$ は最大値 7 をとる。

解法 2

 $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ の領域は下図斜線部 (境界線を含む)よって, $2 \leq x \leq 4$ ゆえに, $x=4$ のとき $2x-1$ は最大値 7 をとる。

(2)

$x^2 + y^2$ は $(x-3)^2 + (y-2)^2 = p$ ($0 \leq p \leq 1$) 上の点と原点の距離の 2 乗を表している。

その距離が最も大きくなる点は、

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = p$ の中心 $(3, 2)$ と原点を通る直線と円の交点のうち、

原点から遠い方の交点だから、その距離は $\sqrt{3^2 + 2^2} + \sqrt{p} = \sqrt{13} + \sqrt{p}$

これと $0 \leq p \leq 1$ より、距離の最大値は $\sqrt{13} + 1$

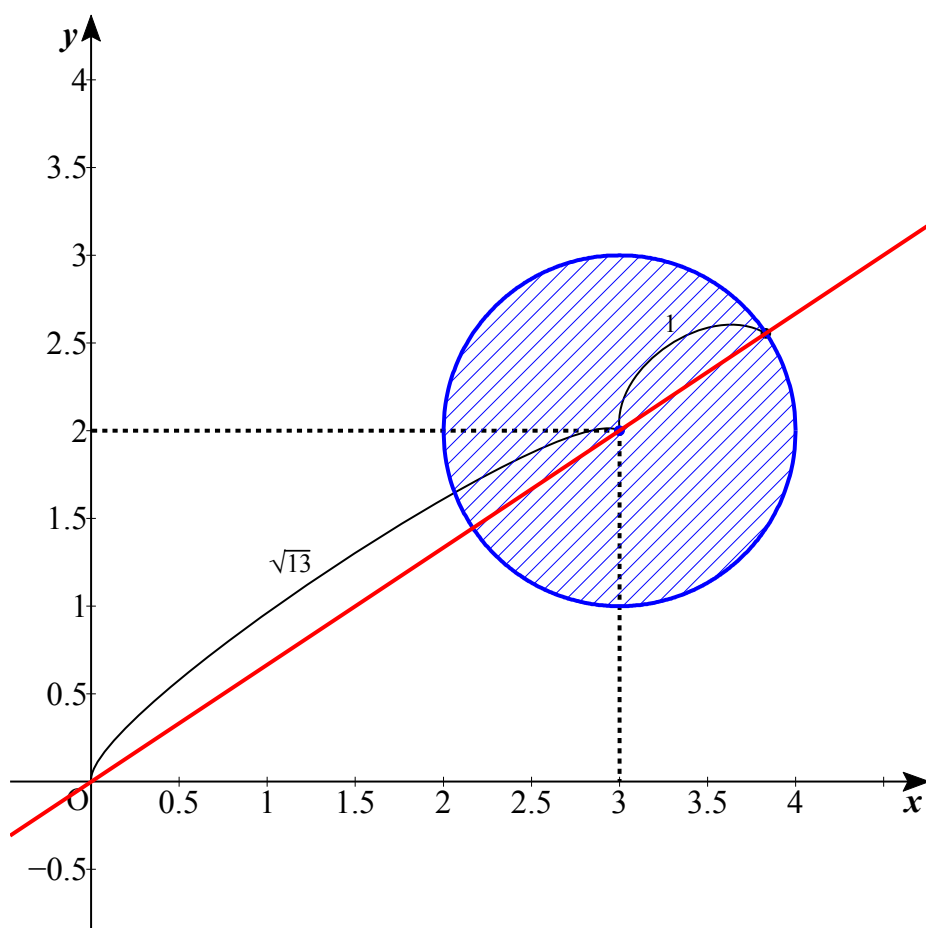
よって、 $x^2 + y^2$ の最大値は $(\sqrt{13} + 1)^2 = 14 + 2\sqrt{13}$

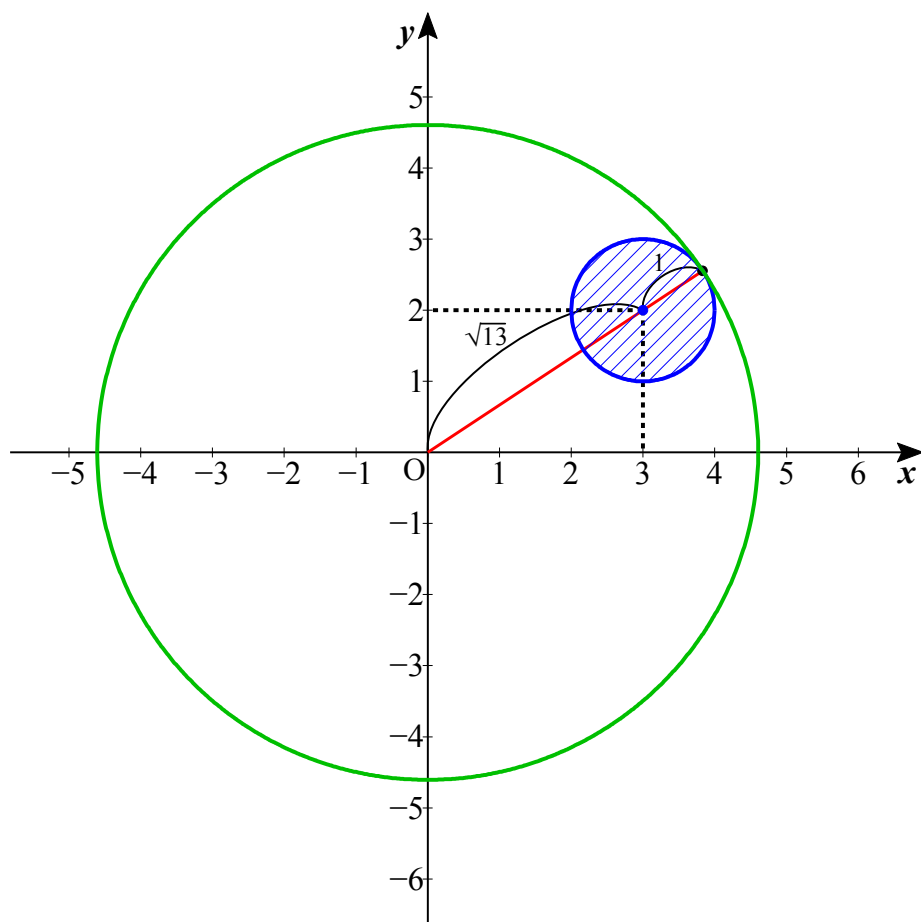
あるいは、

$x^2 + y^2 = r^2$ とすると、 r^2 が最大になるのは、

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ が $x^2 + y^2 = r^2$ に内接する場合だから、 $r = \sqrt{13} + 1$

よって、 $x^2 + y^2$ の最大値は $(\sqrt{13} + 1)^2 = 14 + 2\sqrt{13}$





(3)

$\frac{y}{x} = k$ とおくと, $y = kx$ より, k は原点を通る直線の傾きを表す。

k が最大または最小になるのは,

直線 $y = kx$ が円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = p$ ($0 \leq p \leq 1$) と接するときであり,

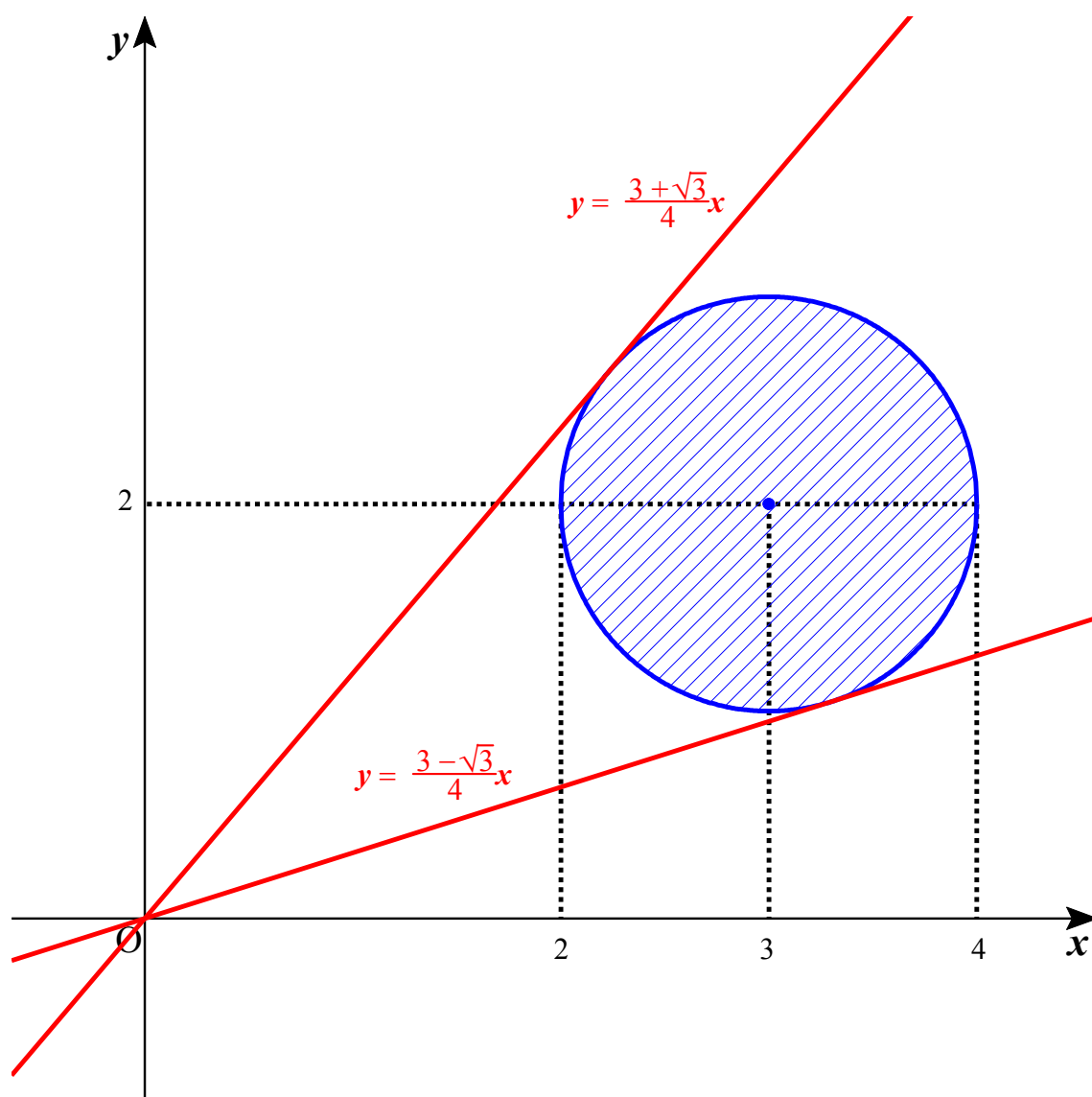
このとき, $y = kx$ すなわち $kx - y = 0$ と円の中心 $(3, 2)$ の距離 $\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$ が

円の半径 $\sqrt{p}$ と等しくなるから, $\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{p} \quad \therefore |3k-2| = \sqrt{p} \cdot \sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗して k について整理すると, $(9-p)k^2 - 12k + 4 - p = 0$

$$\text{よって, } k = \frac{6 \pm \sqrt{-p^2 + 13p}}{9-p} = \frac{6 \pm \sqrt{\left(p - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{169}{4}}}{9-p}$$

これと $0 \leq p \leq 1$ より, k は $p=1$ のとき最大値 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ をとる。



(4)

直線 $10x + 10y = k$ と円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = p$ ($0 \leq p \leq 1$) の中心 $(3, 2)$ との距離は

$$\frac{|10 \cdot 3 + 10 \cdot 2 - k|}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = \frac{|50 - k|}{10\sqrt{2}}$$

この直線と円が共有点をもつとき, $\frac{|50 - k|}{10\sqrt{2}} \leq \sqrt{p}$ を満たす。

これと $0 \leq p \leq 1$ より, $\frac{|50 - k|}{10\sqrt{2}} \leq 1 \quad \therefore |50 - k| \leq 10\sqrt{2}$

ゆえに, $-10\sqrt{2} \leq 50 - k \leq 10\sqrt{2}$

これより, $50 - 10\sqrt{2} \leq k \leq 50 + 10\sqrt{2}$

よって, k すなわち $10x + 10y$ の最大値は $50 + 10\sqrt{2}$

したがって, $10x + 10y$ の最大の整数値は,

$1.4^2 < 2 < 1.5^2$ より, $50 + 10 \cdot 1.4 < 50 + 10\sqrt{2} < 50 + 10 \cdot 1.5 \quad \therefore 64 < 50 + 10\sqrt{2} < 65$
より, 64

