三角関数 5　三角関数の応用

三角関数の周期性という性質に注目することは入試問題を解く上で非常に重要なので，ここでの学習を通して，「三角関数絡みの問題なら周期性」と即座に意識できるようになろう。そのためには，グラフをしっかり描くことが大切です。

273

(1)

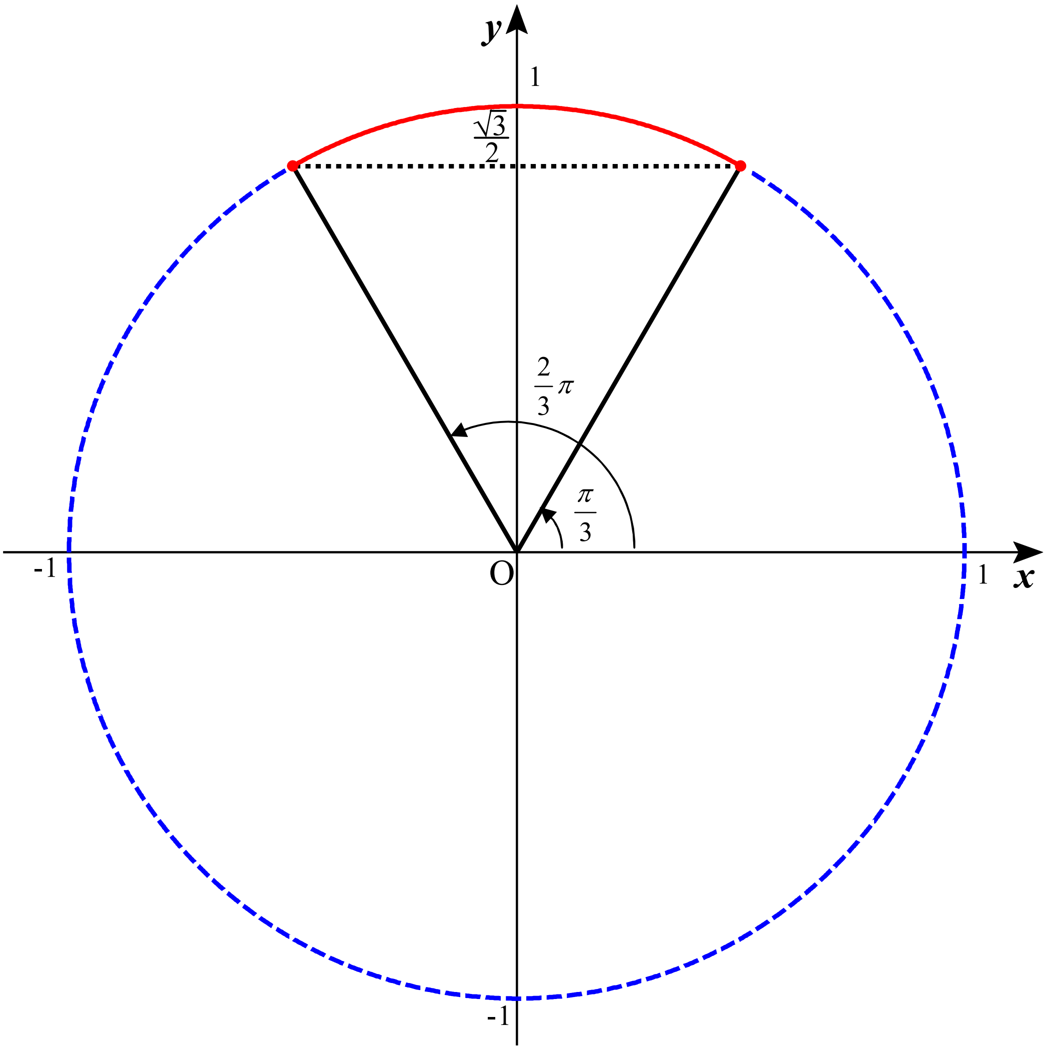
$\sin\theta \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ （$0 \leq \theta < 2\pi$）とすると，$\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{2}{3}\pi$

$\sin\theta$ の周期は 2π だから，θ の範囲の制限をなくせば $\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \leq \theta \leq \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）

解説

単位円の円周上の点 $(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

$y = \sin\theta \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすのは，下図赤色実線部分である。



(2)

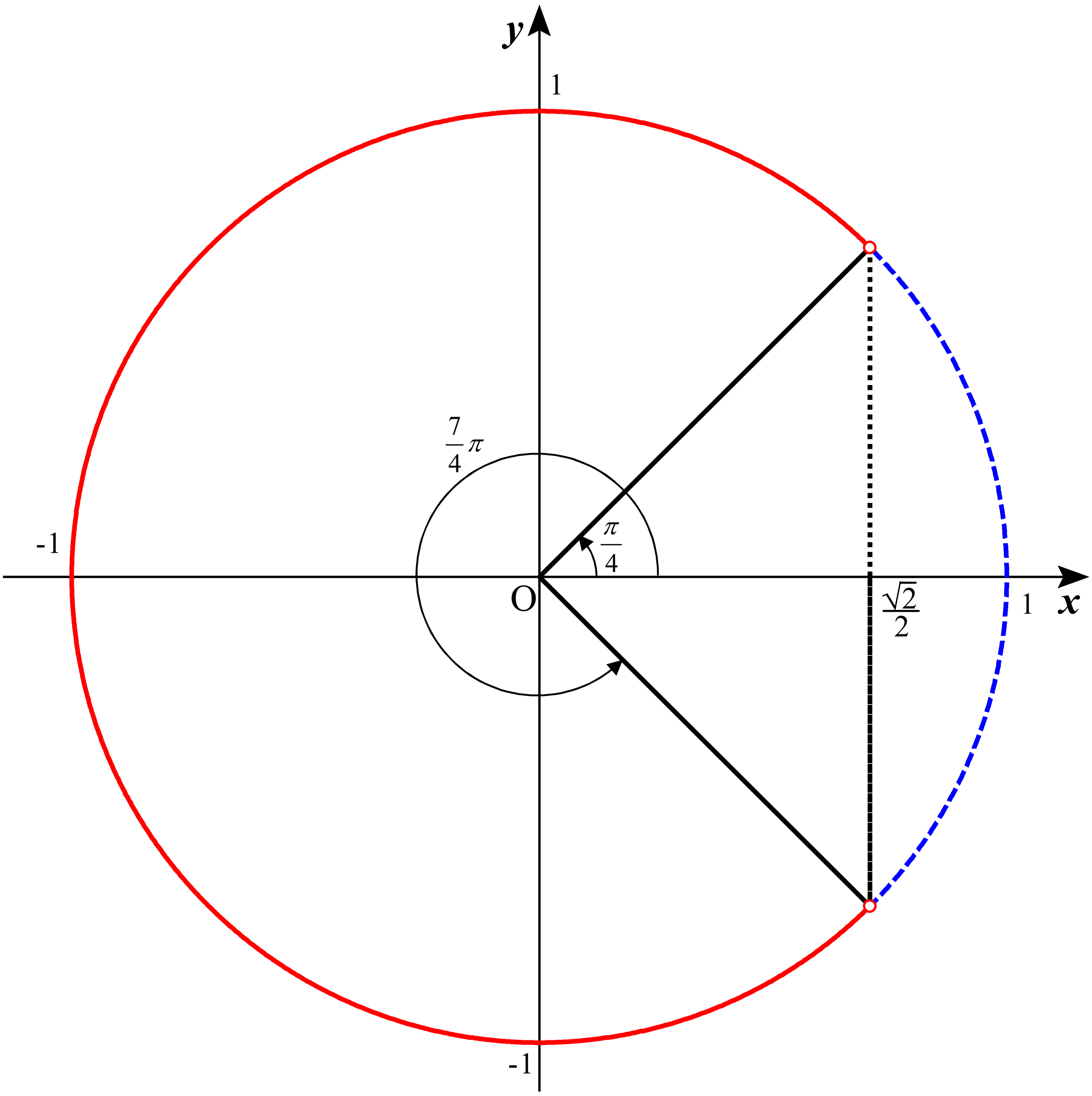
$\cos\theta < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ （$0 \leq \theta < 2\pi$）とすると，$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{7}{4}\pi$

$\cos\theta$ の周期は 2π だから，θ の範囲の制限をなくせば $\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \leq \theta \leq \dfrac{7}{4}\pi + 2n\pi$（$n$ は整数）

解説

単位円の円周上の点 $(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

$x = \cos\theta < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすのは，下図赤色実線部分である。



(3)

$\tan\theta > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ （$0 \leq \theta < \pi$）とすると，$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$\tan\theta$ の周期は π だから，θ の範囲の制限をなくせば $\dfrac{\pi}{6} + n\pi \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ （n は整数）

解説

$y = ax$ の傾き $a = \tan\theta$ より，傾きが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より大きい θ の範囲を求めればよい。

274

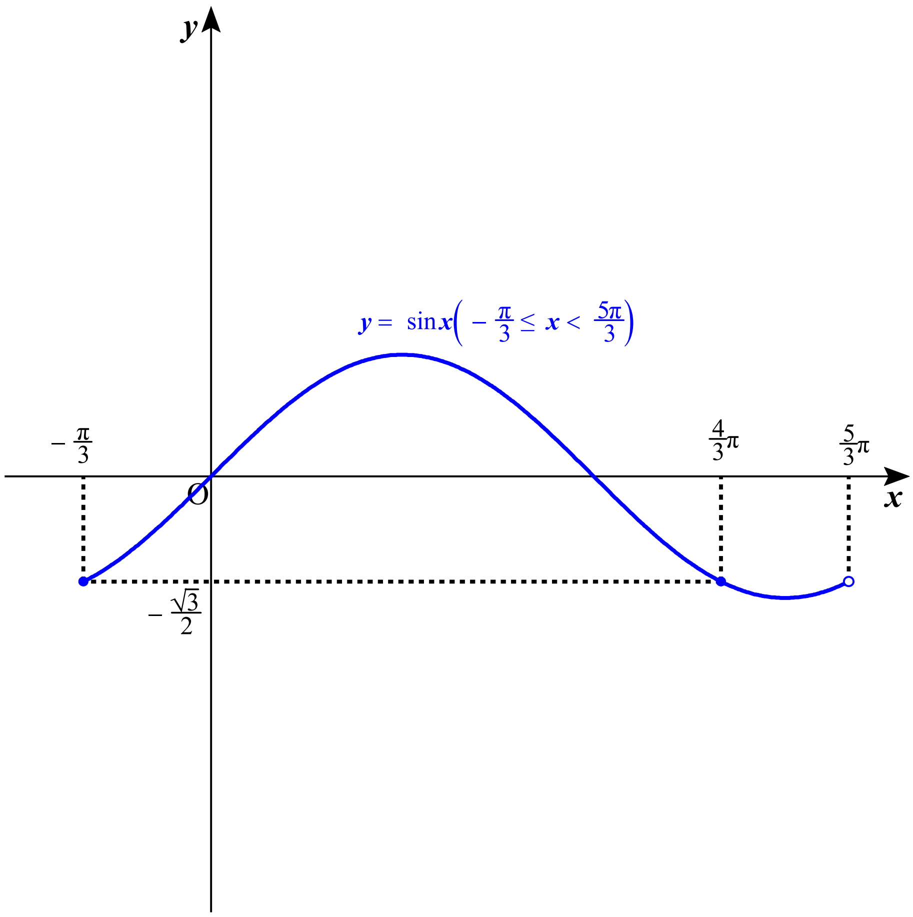
(1)

$-\dfrac{\pi}{3} \leq \theta - \dfrac{\pi}{3} < 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{3}\pi$ より，$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$ 　$\therefore \theta = 0,\ \dfrac{5}{3}\pi$

解説

$\theta - \dfrac{\pi}{3} = x$ とおいて，$y = \sin x \left(-\dfrac{\pi}{3} \leq x < \dfrac{5}{3}\pi \right)$ のグラフを利用すればよい。

$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフより描きやすい上，見やすくもある。



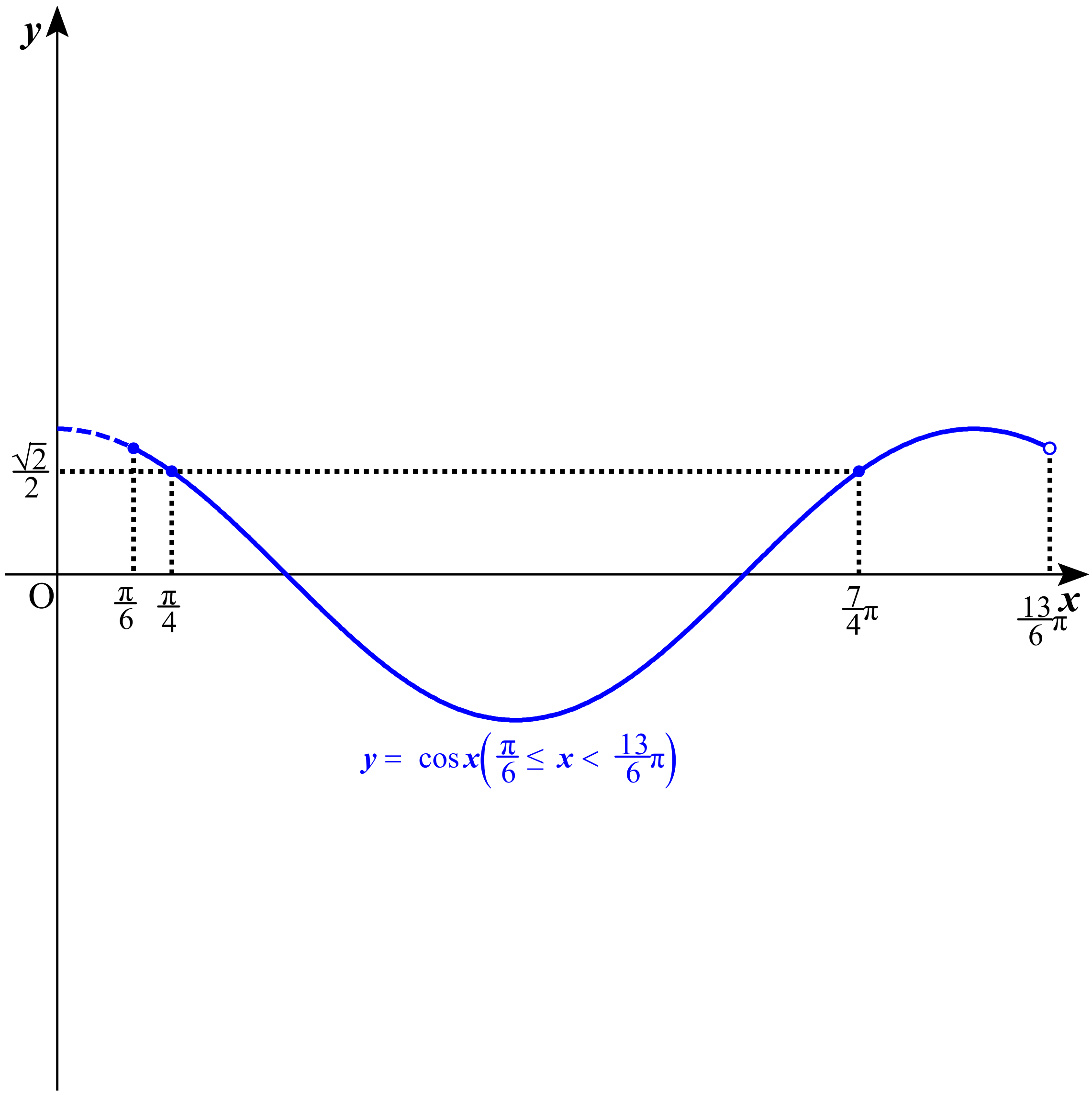
(2)

$\dfrac{\pi}{6} \leq \theta + \dfrac{\pi}{6} < 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$ より，$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$　　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{19}{12}\pi$

解説

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = x$ とおいて，$y = \sin x \left(\dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{13}{6}\pi \right)$ のグラフを利用すればよい。

$y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6} \right)$ のグラフより描きやすい上，見やすくもある。



(3)

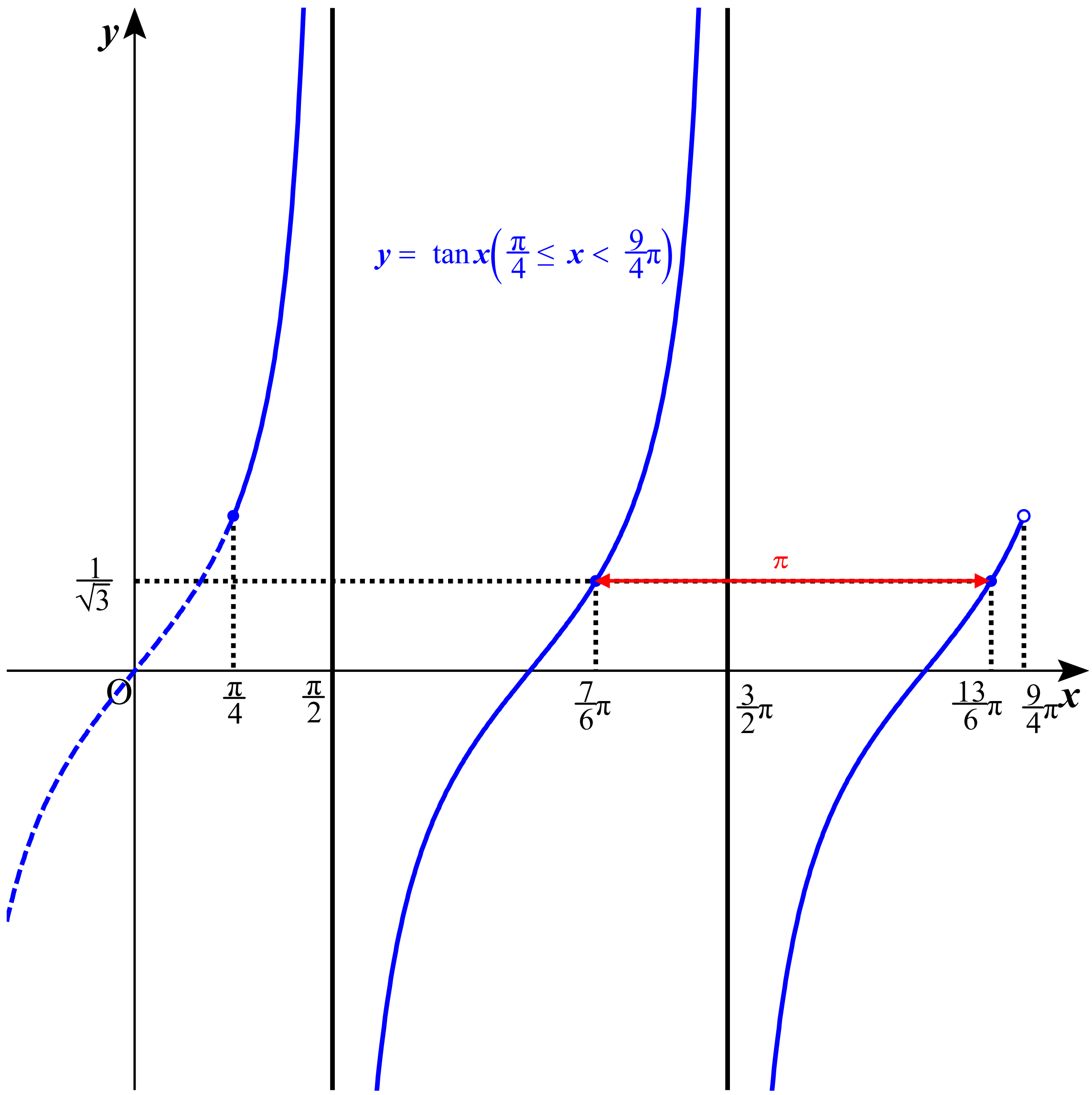
周期性（等差数列）に注目

$\dfrac{\pi}{4} \leq \theta + \dfrac{\pi}{4} < 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$ より，$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$　$\therefore \theta = \dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

解説

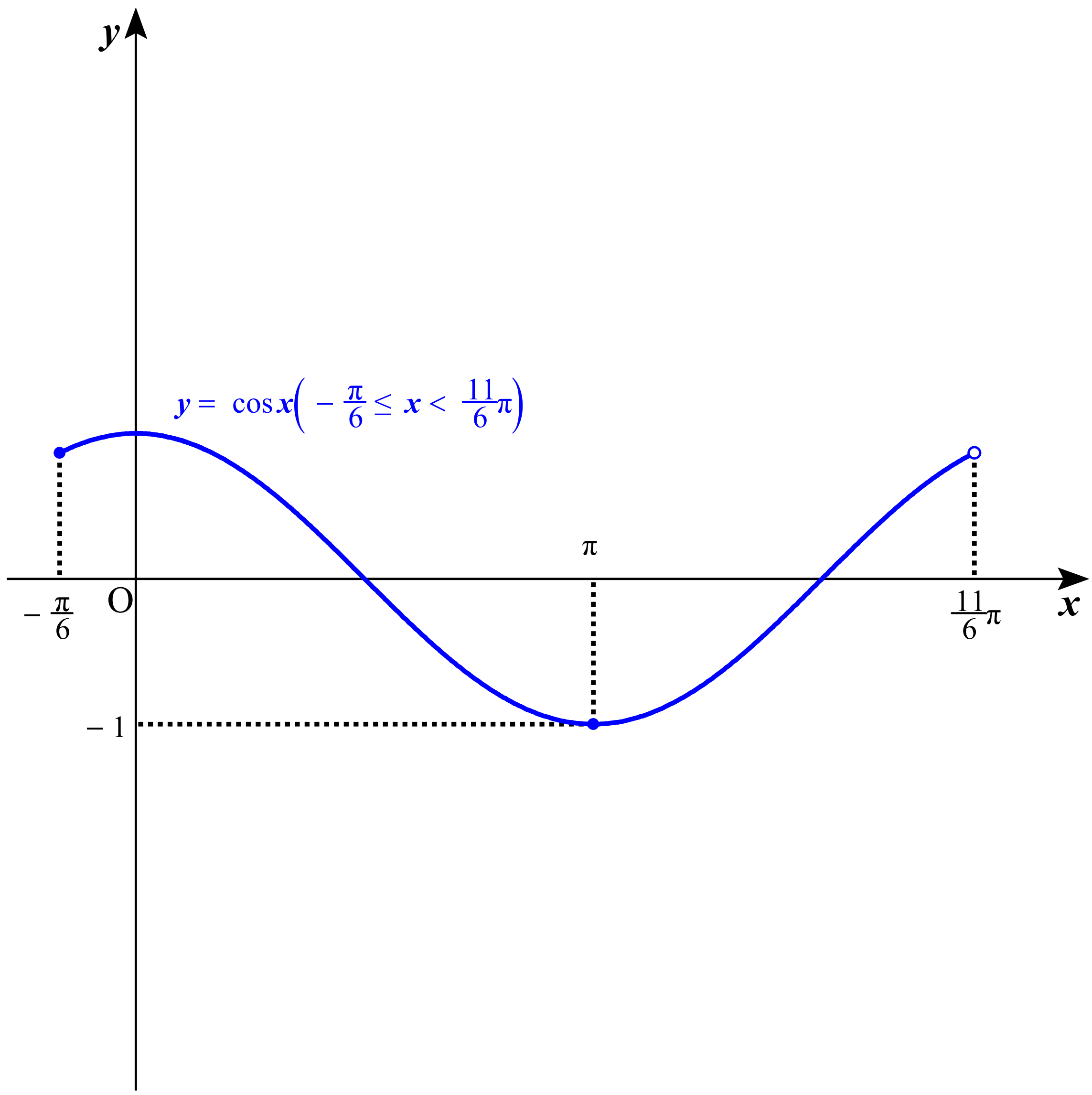
$\theta + \dfrac{\pi}{4} = x$ とおいて，$y = \tan x \left(\dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{9}{4}\pi\right)$ のグラフを利用すればよい。

$y = \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフより描きやすい上，見やすくもある。



(4)

$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ より, $\theta - \frac{\pi}{6} = \pi \quad \therefore \theta = \frac{7}{6}\pi$



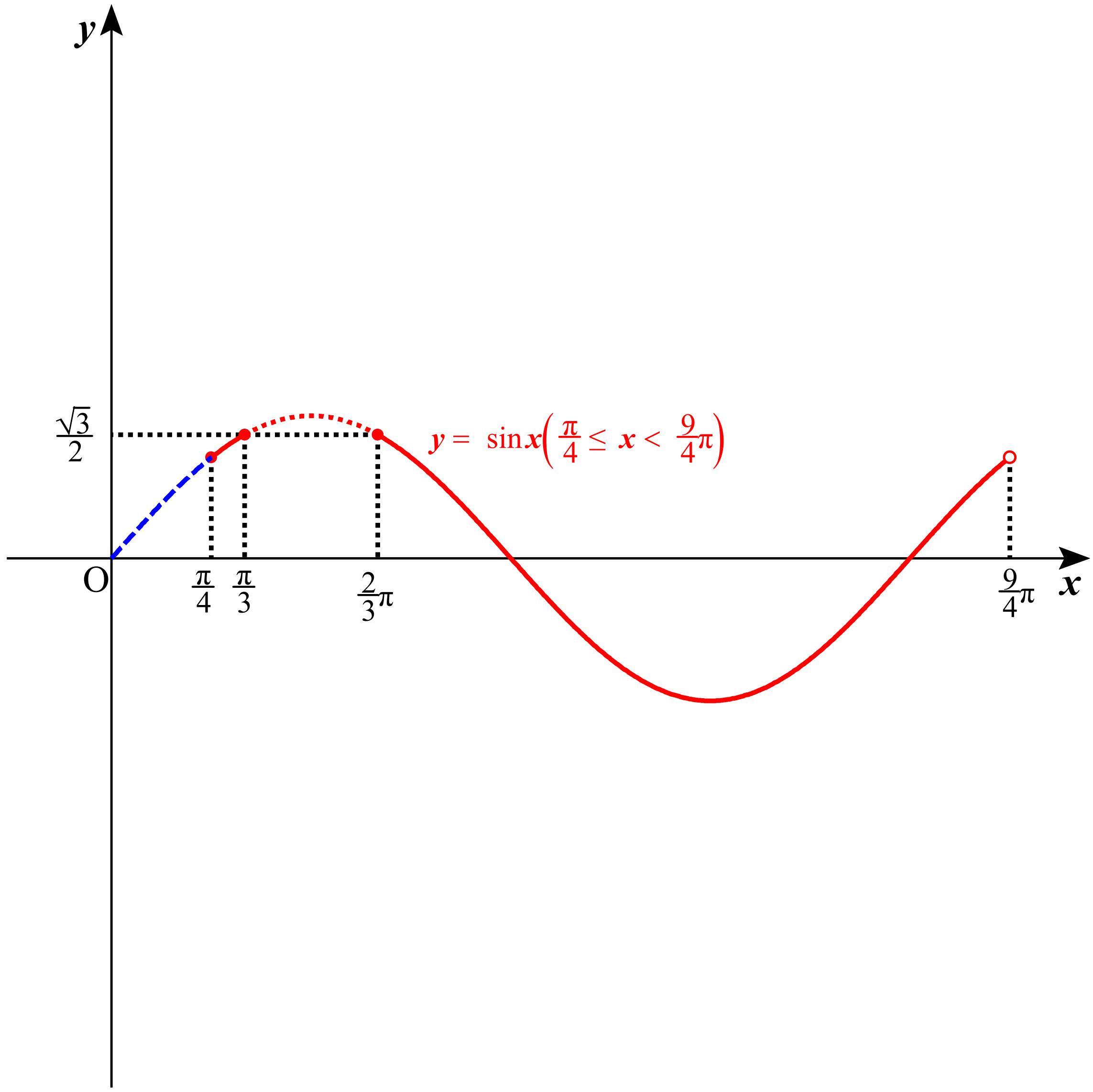
275

(1)

$\dfrac{\pi}{4} \leq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi \leq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$　$\therefore 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{5}{12}\pi \leq \theta < 2\pi$

解説

$\theta + \dfrac{\pi}{4} = x$ とおいて，$y = \sin x \left(\dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{9}{4}\pi\right)$ のグラフを利用すれば処理しやすい。



(2)

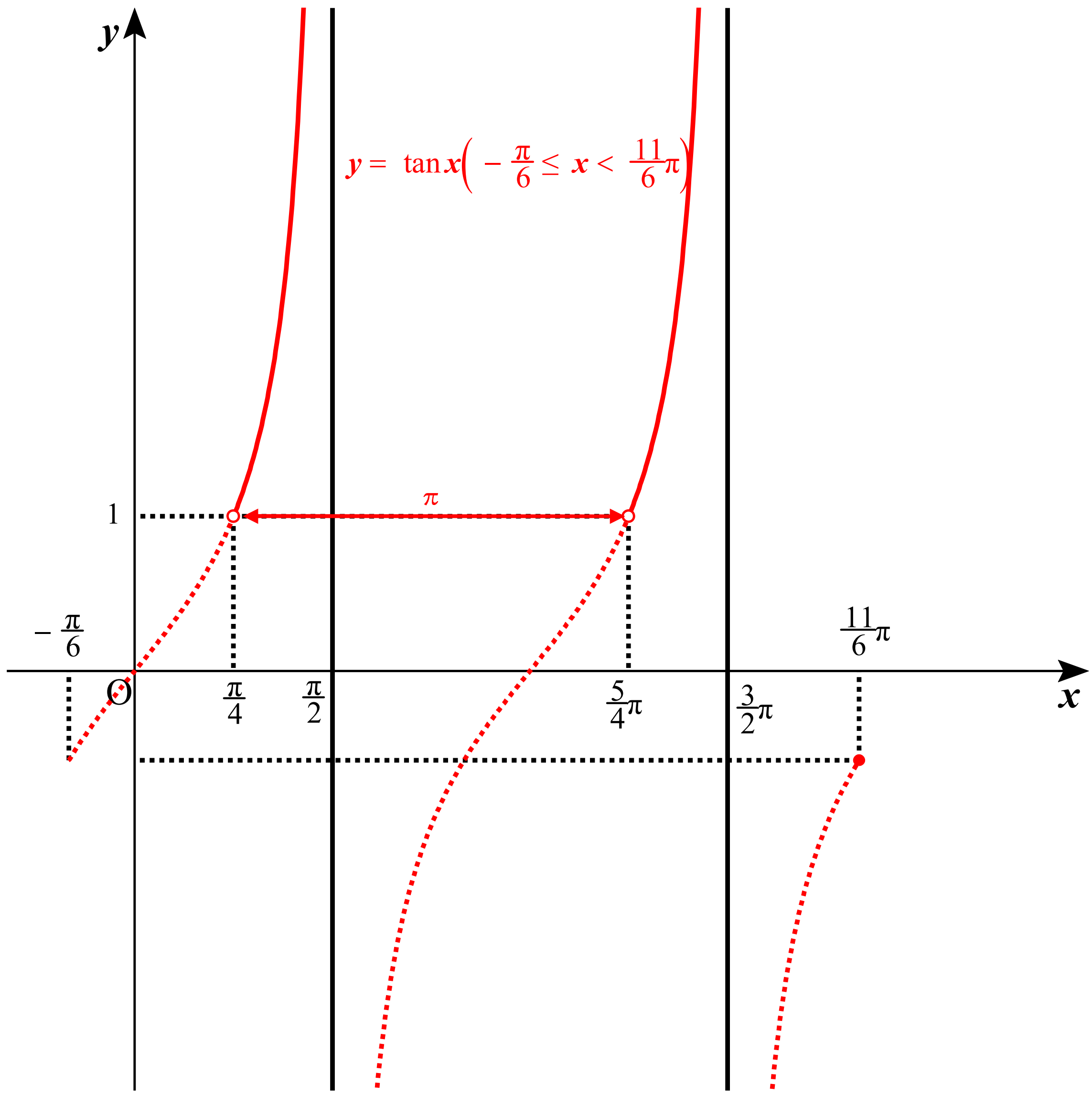
周期性（等差数列）に注目

$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$ より，$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

$\therefore \frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi$，$\frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

解説

$\theta - \frac{\pi}{6} = x$ とおいて，$y = \tan x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{11}{6}\pi \right)$ のグラフを利用すれば処理しやすい。

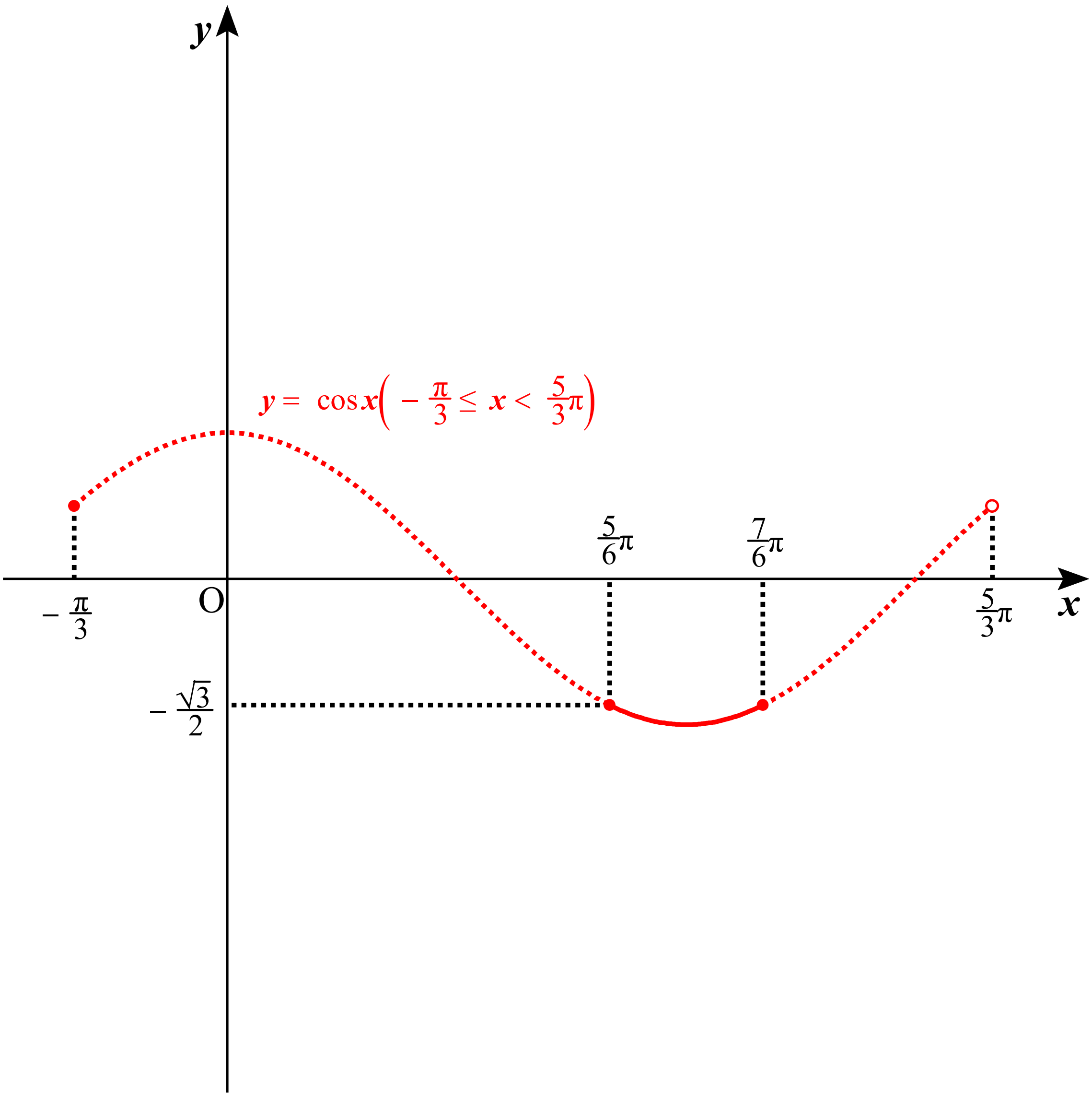


(3)

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ より，$\dfrac{5}{6}\pi < \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{6}\pi$　$\therefore \dfrac{7}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

解説

$\theta - \dfrac{\pi}{3} = x$ とおいて，$y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{3} \leqq x < \dfrac{5}{3}\pi \right)$ のグラフを利用すれば処理しやすい。



(4)

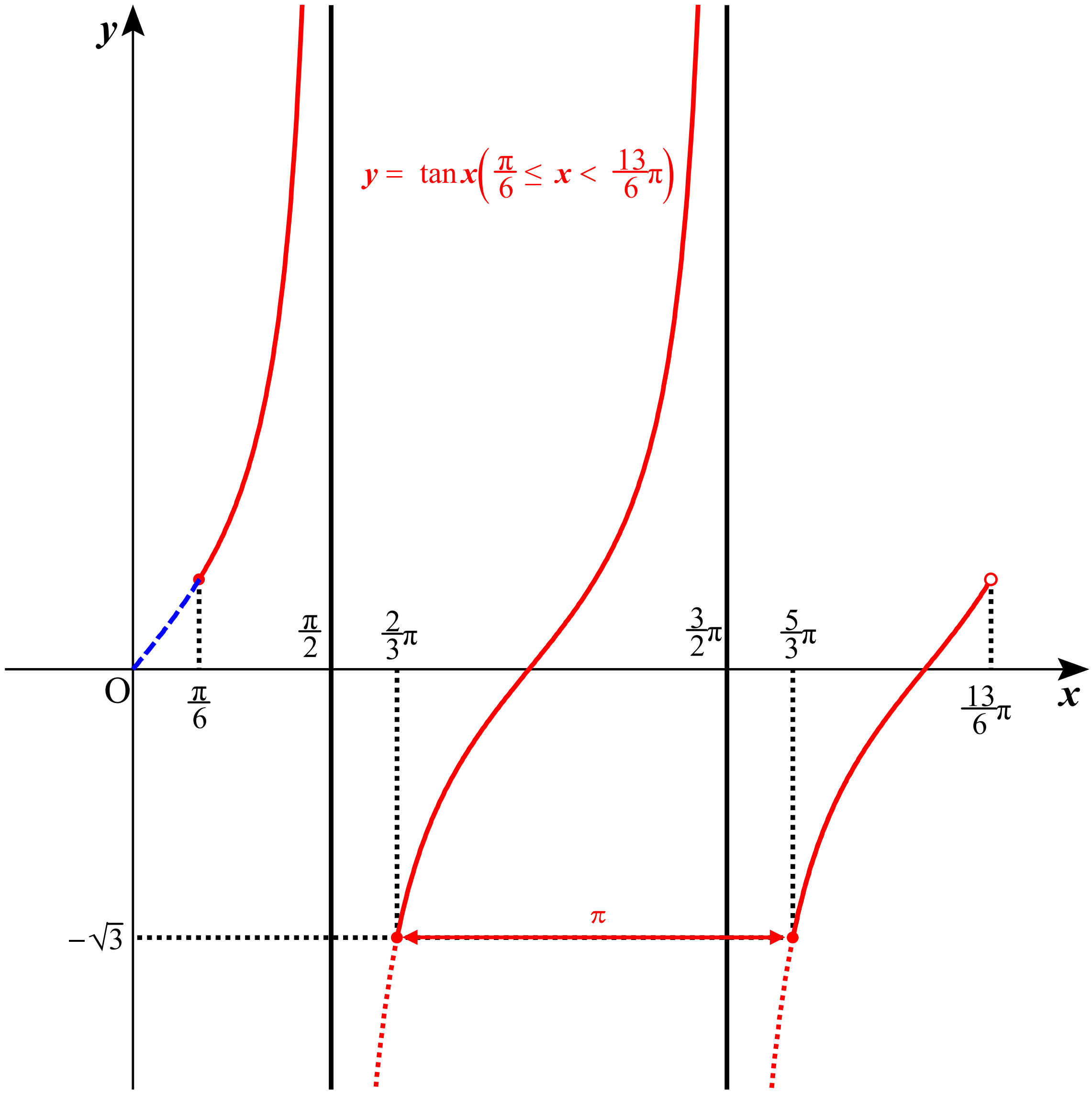
周期性（等差数列）に注目

$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ より，$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

$\therefore 0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi \leq \theta < 2\pi$

解説

$\theta + \frac{\pi}{6} = x$ とおいて，$y = \tan x \left(\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{13}{6}\pi\right)$ のグラフを利用すれば処理しやすい。



276

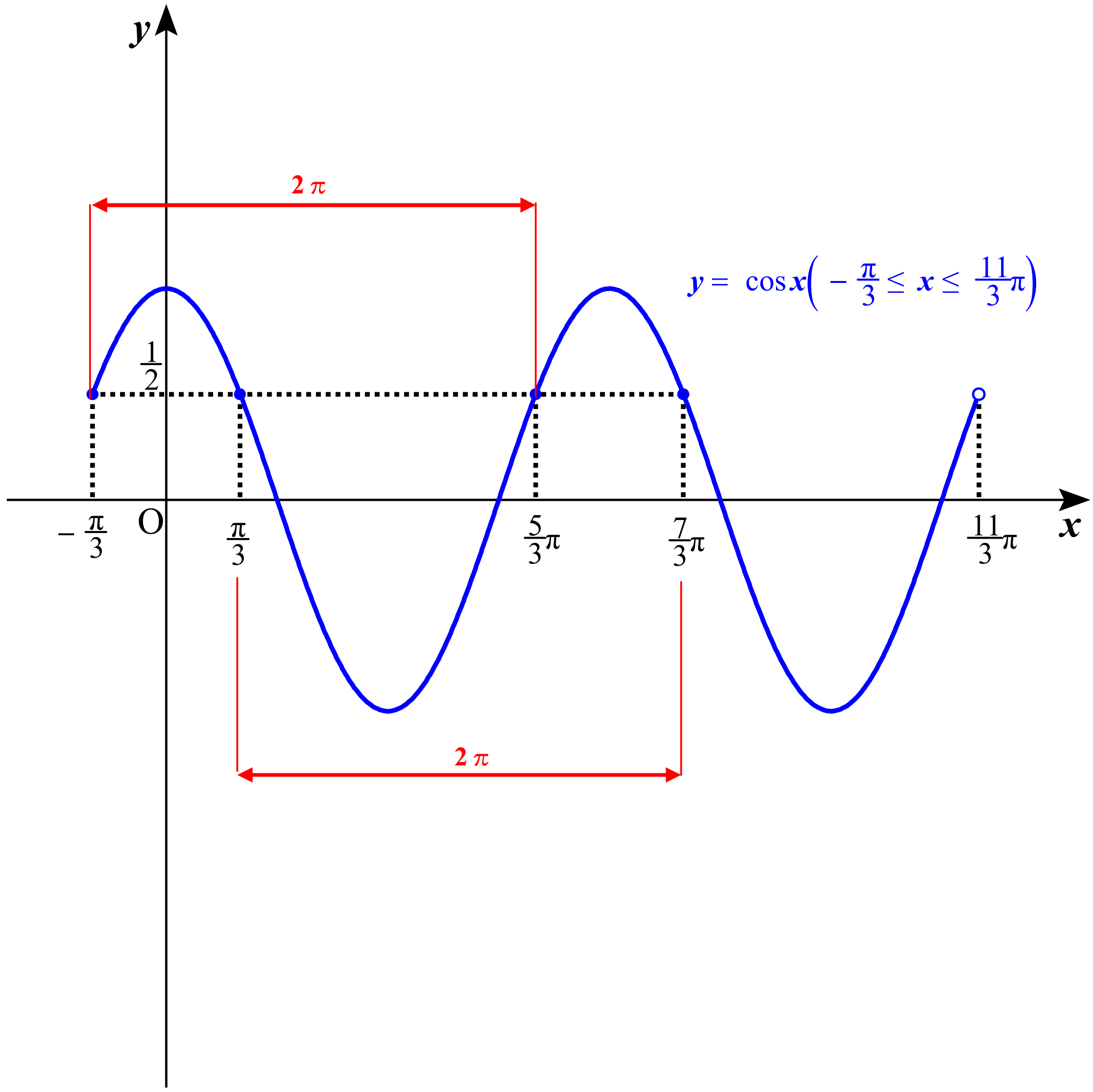
周期性（等差数列）に注目

(1)

$-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$ より，$2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$　$\therefore \theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$

解説

$2\theta - \frac{\pi}{3} = x$ とおいて，$y = \cos x \left(-\frac{\pi}{3} \leq x < 4\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを利用するとわかりやすい。



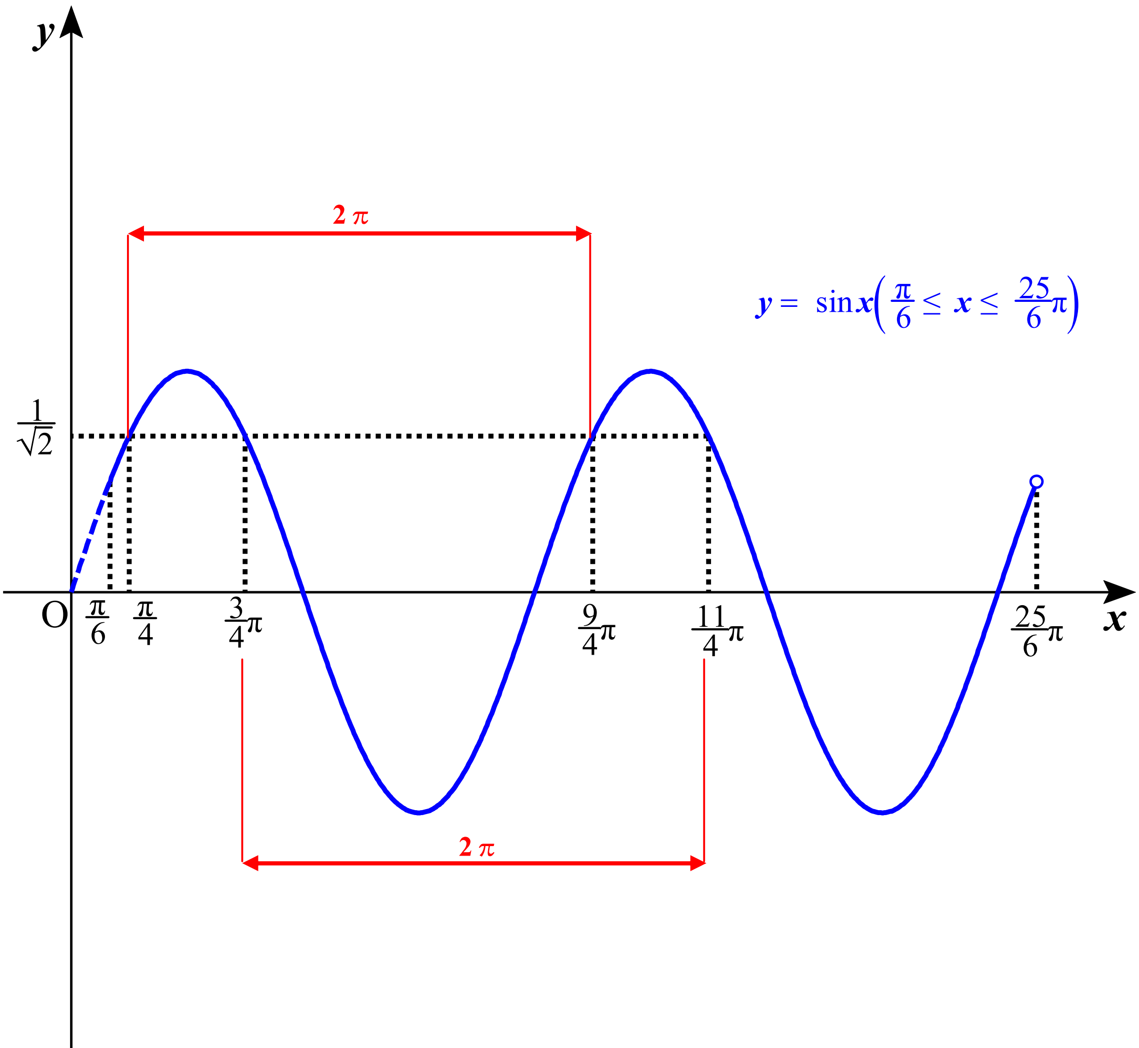
(2)

周期性（等差数列）に注目

$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$ より，$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$　$\therefore \theta = \frac{\pi}{24}, \frac{7}{24}\pi, \frac{25}{24}\pi, \frac{31}{24}\pi$

解説

$2\theta + \frac{\pi}{6} = x$ とおいて，$y = \sin x \left(\frac{\pi}{6} \leq x < 4\pi + \frac{\pi}{6} \right)$ のグラフを利用するとわかりやすい。



(3)

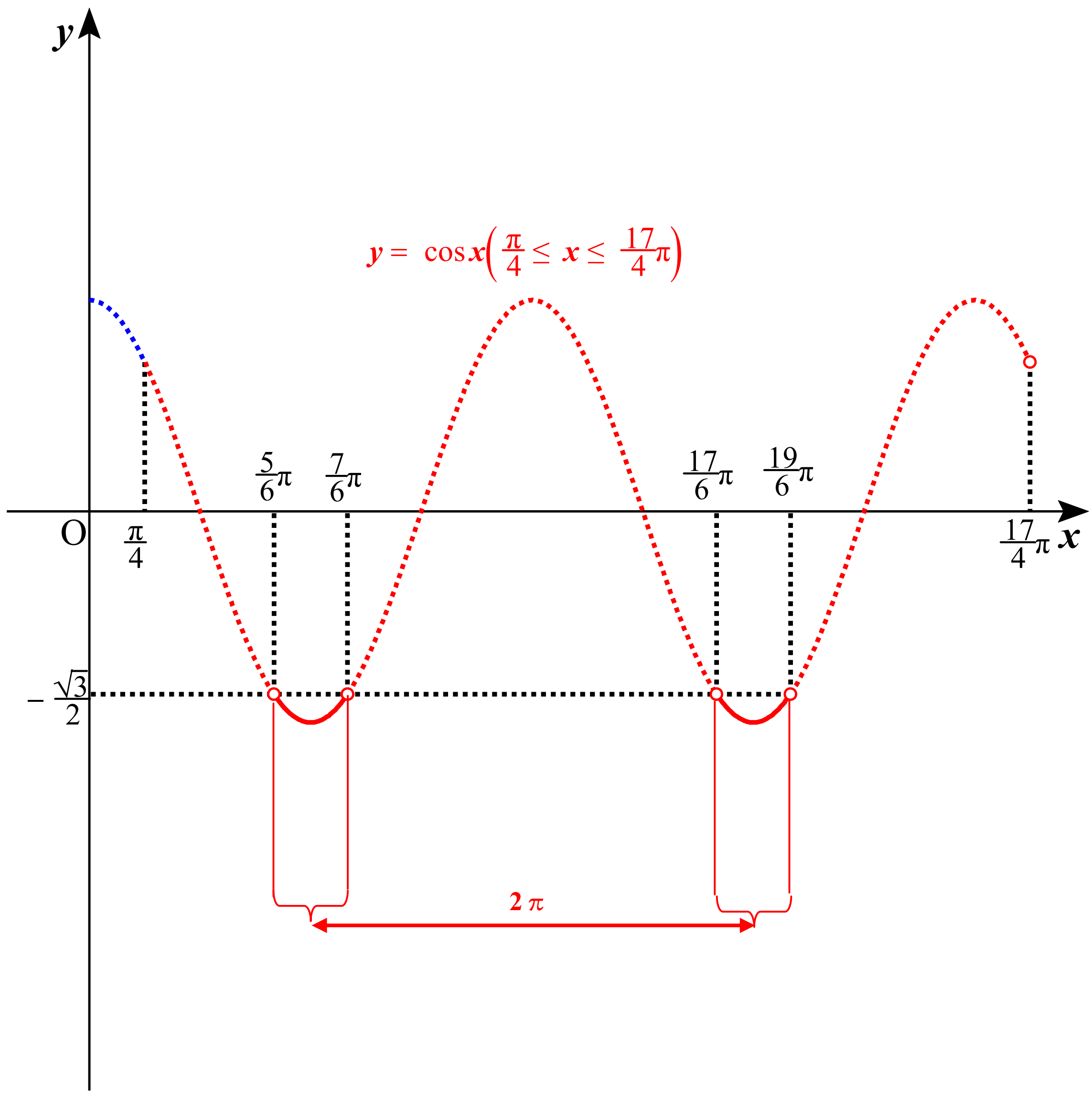
周期性（等差数列）に注目

$\dfrac{\pi}{4} \leq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} < 4\pi + \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{5}{6}\pi < 2\theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi < 2\theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{19}{6}\pi$

$\therefore \dfrac{7}{24}\pi < \theta < \dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi < \theta < \dfrac{35}{24}\pi$

解説

$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = x$ とおいて，$y = \cos x \left(\dfrac{\pi}{4} \leq x < 4\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフを利用するとわかりやすい。



(4)

周期性（等差数列）に注目

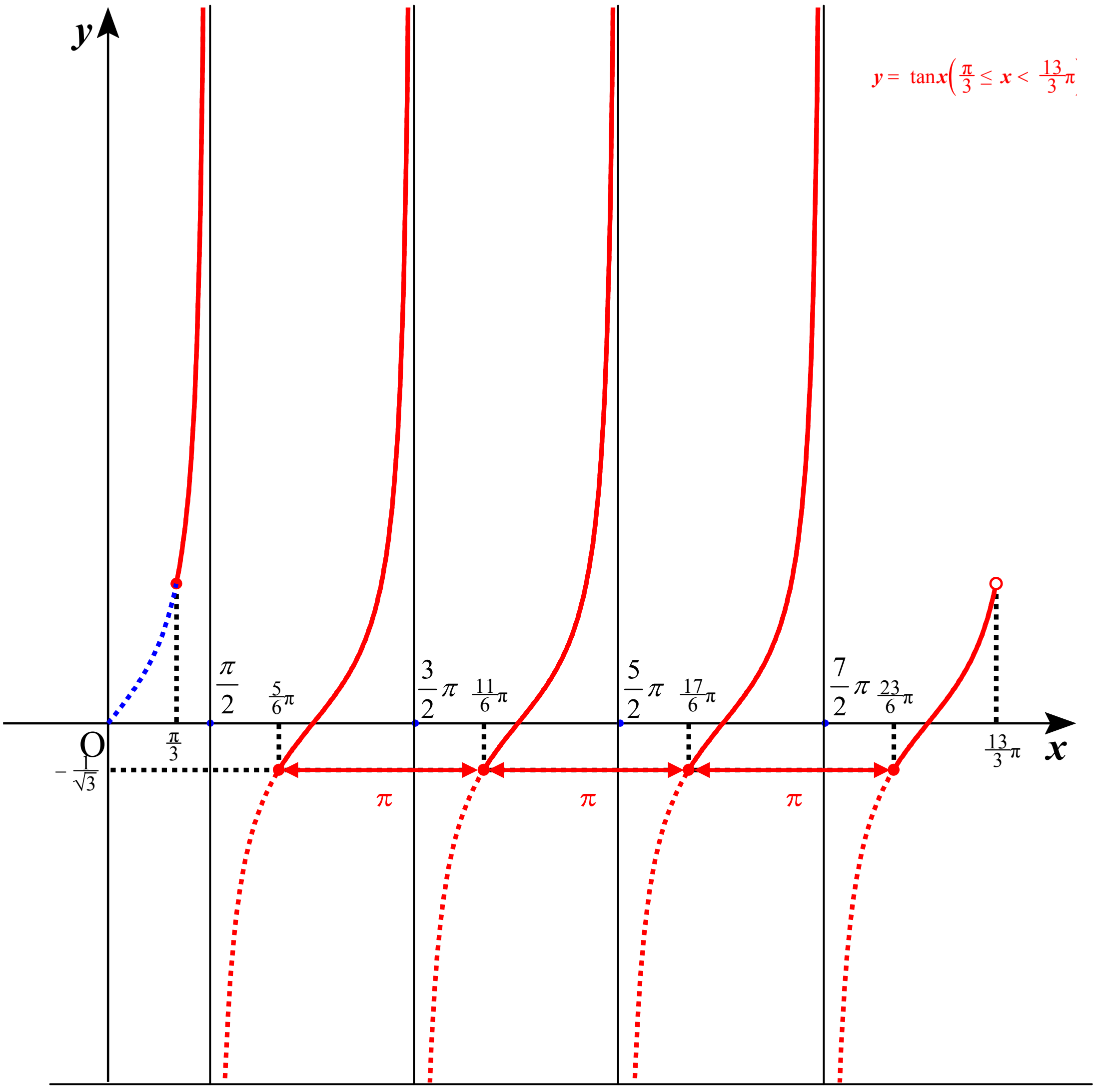
$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 4\pi + \frac{\pi}{3}$ より，

$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{2}\pi$, $\frac{17}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{2}\pi$,
$\frac{23}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$

$\therefore 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{7}{12}\pi$, $\frac{3}{4}\pi \leq \theta < \frac{13}{12}\pi$, $\frac{5}{4}\pi \leq \theta < \frac{19}{12}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leq \theta < 2\pi$

解説

$2\theta + \frac{\pi}{3} = x$ とおいて，$y = \tan x \left(\frac{\pi}{3} \leq x < 4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを利用するとわかりやすい。



277

(1)

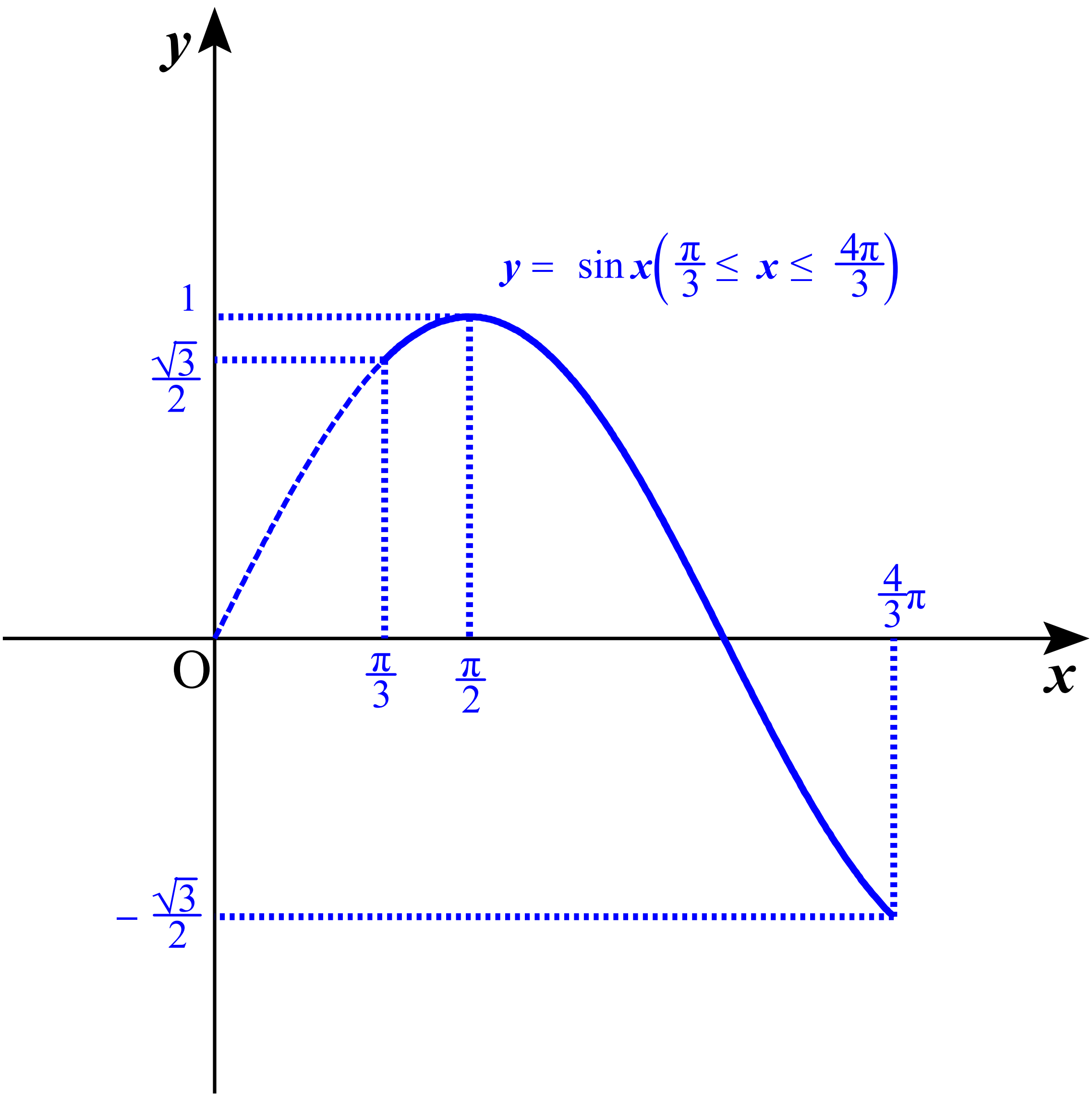
$\dfrac{\pi}{3} \leq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{4}{3}\pi$ より,

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 1

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，すなわち $\theta = \pi$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

$x = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおき， $y = \sin x \left(\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{4}{3}\pi\right)$ のグラフを描くとわかりやすい。



(2)

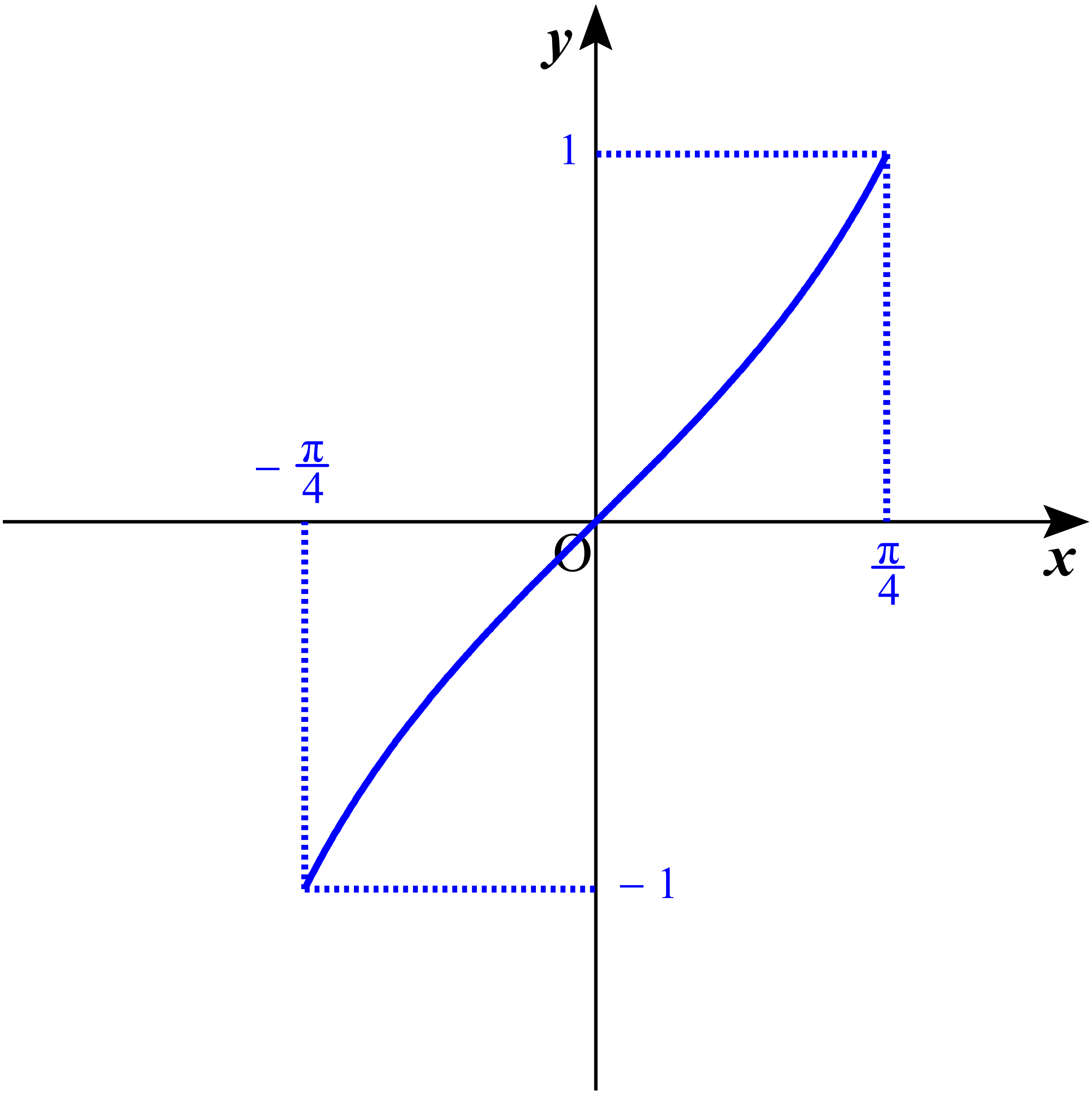
$-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ よいｒ，

$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ のとき，すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 1

$2\theta - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ のとき，すなわち $\theta = 0$ のとき最小値 -1

解説

$2\theta - \frac{\pi}{4} = x$ とおき，$y = \tan x \left(-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフを描くとわかりやすい。

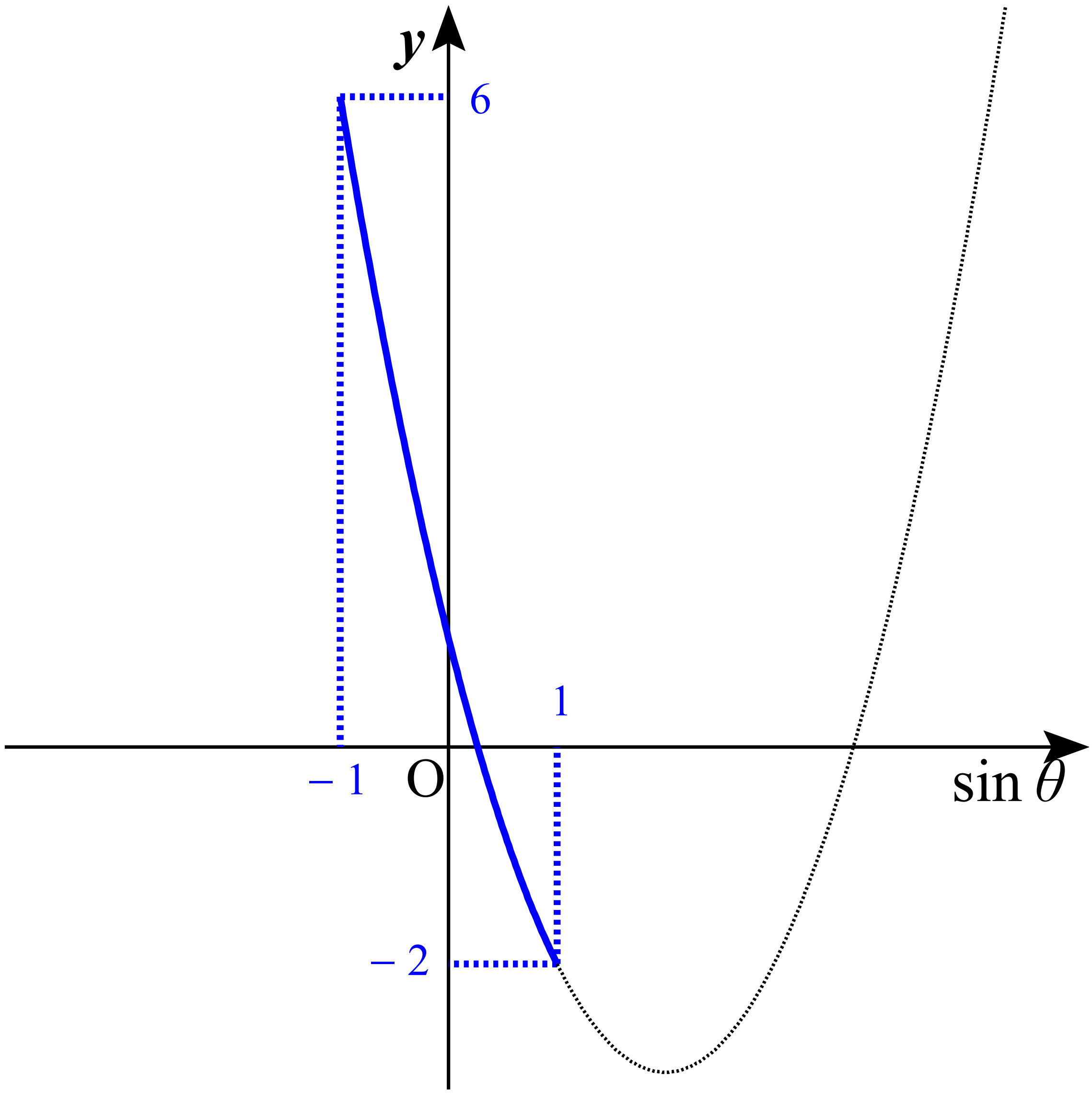


(3)

$y=(\sin\theta-2)^2-3\ (-1\le\sin\theta\le1,\ 0\le\theta<2\pi)$ より，

$\sin\theta=-1$ のとき，すなわち $\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最大値 6

$\sin\theta=1$ のとき，すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -2



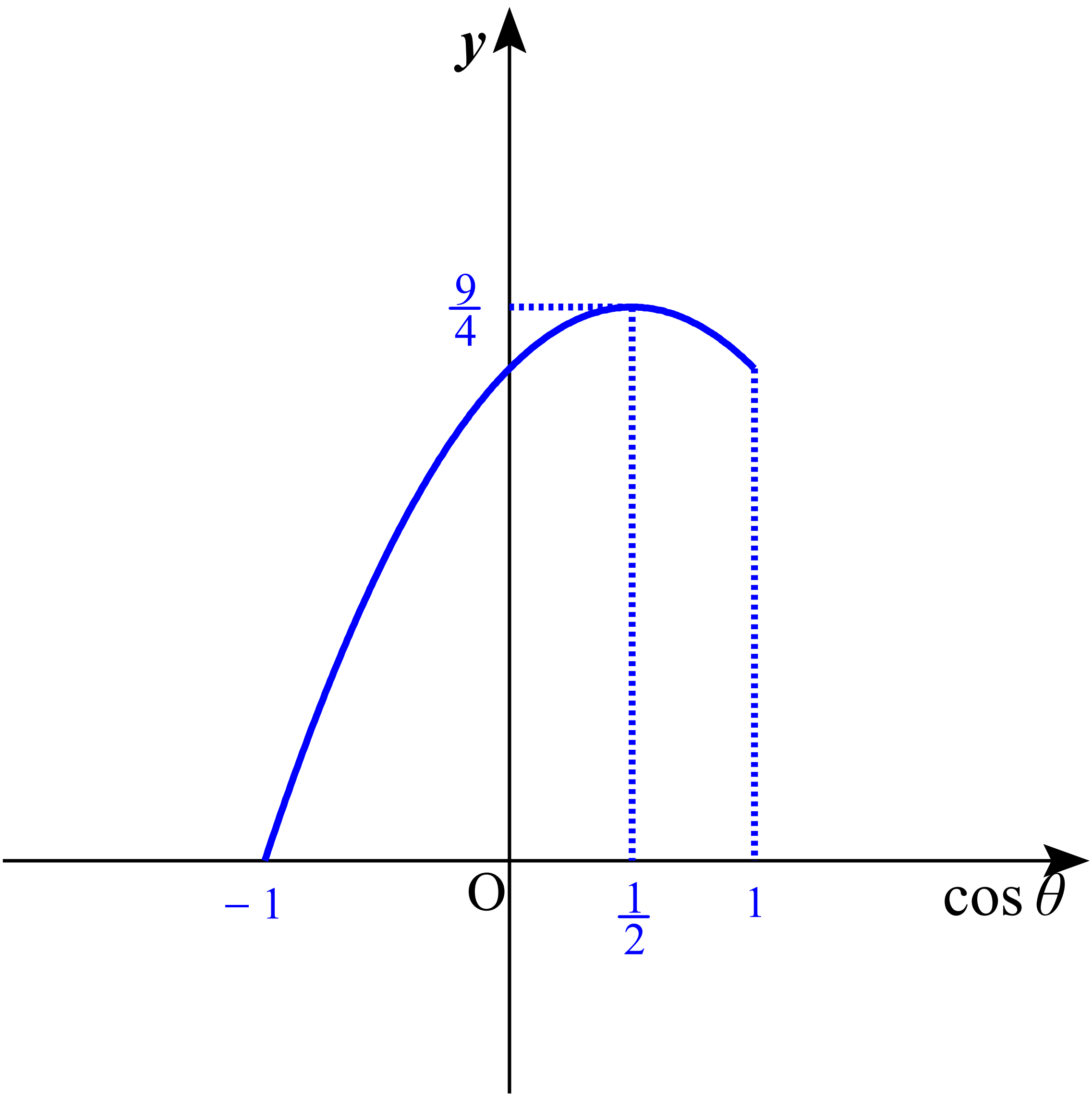
(4)

$$
\begin{aligned}
y &= \sin^2\theta + \cos\theta + 1 \\
&= 1 - \cos^2\theta + \cos\theta + 1 \\
&= -\cos^2\theta + \cos\theta + 2 \\
&= -\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

これと $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ より,

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$

$\cos\theta = -1$ のとき，すなわち $\theta = \pi$ のとき最小値 0



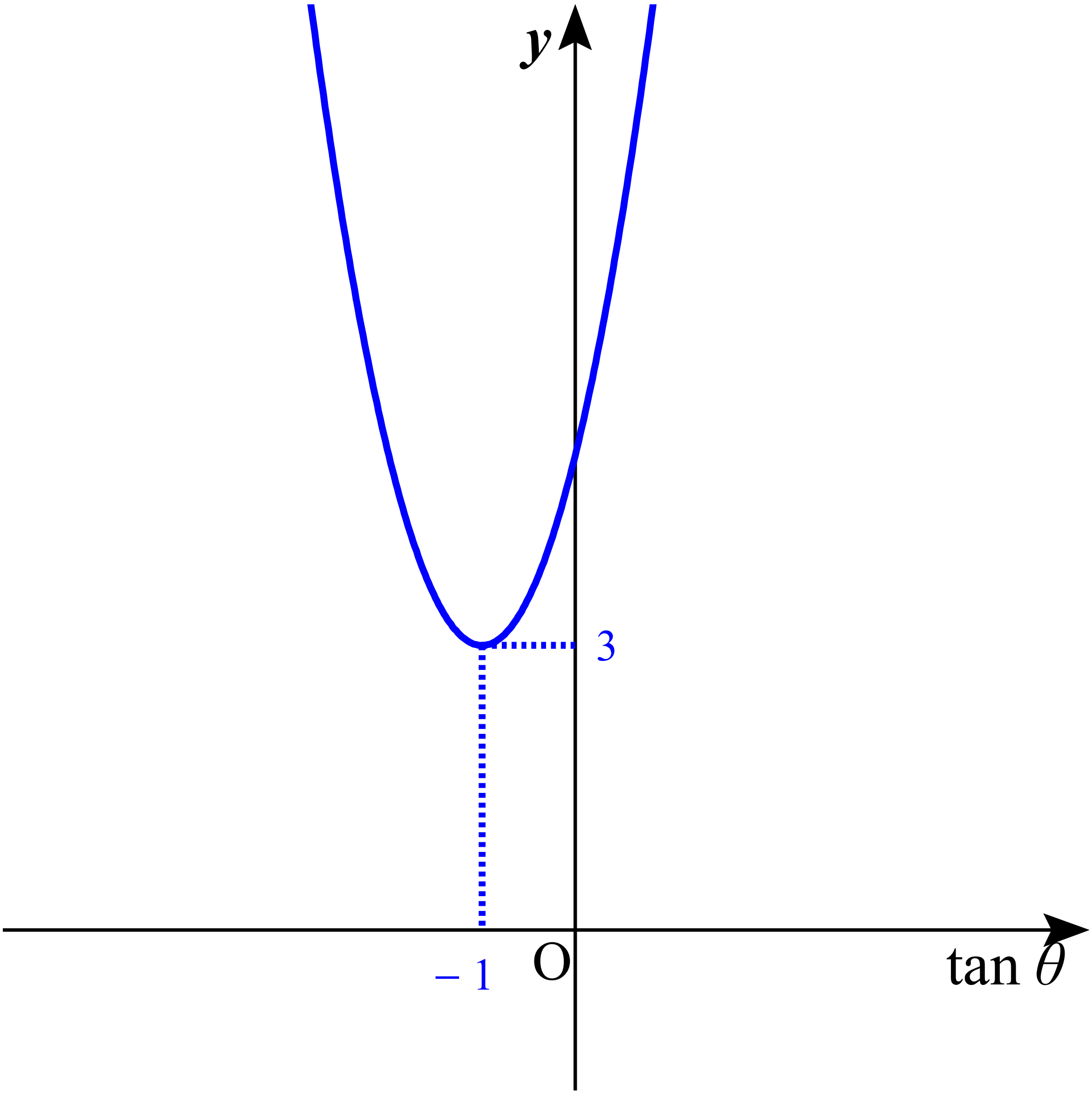
(5)

$y = 2\tan^2\theta + 4\tan\theta + 5$

$= 2(\tan\theta + 1)^2 + 3$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より， $\tan\theta$ はすべての実数

よって， $\tan\theta = -1$ ，すなわち $\theta = -\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 3



278

$y = 2a\sin\theta - \cos^2\theta$

$= 2a\sin\theta - (1 - \sin^2\theta)$

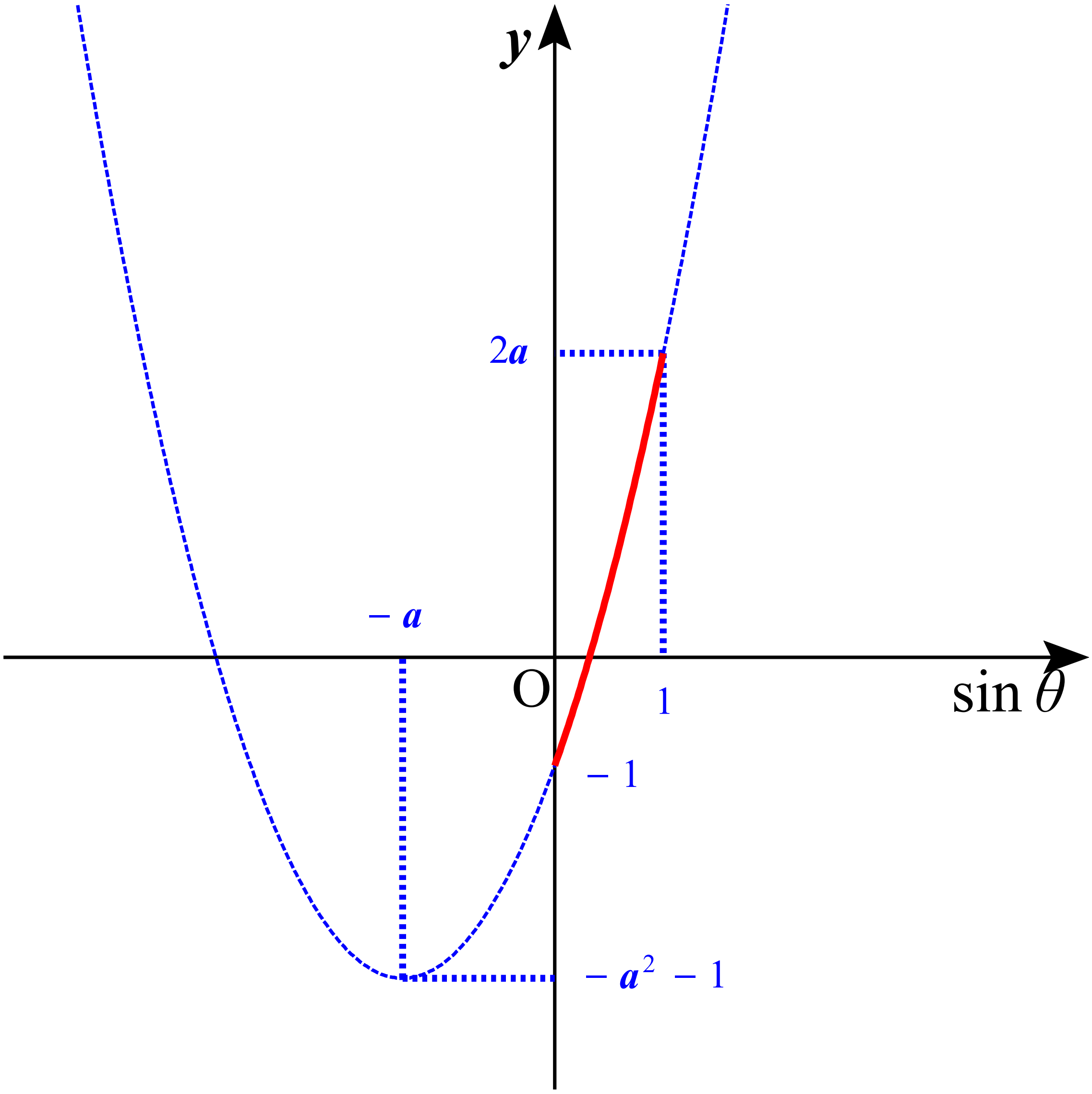
$= \sin^2\theta + 2a\sin\theta - 1$

$= (\sin\theta + a)^2 - a^2 - 1$

定義域は，$0 \leq \theta \leq \pi$ より，$0 \leq \sin\theta \leq 1$

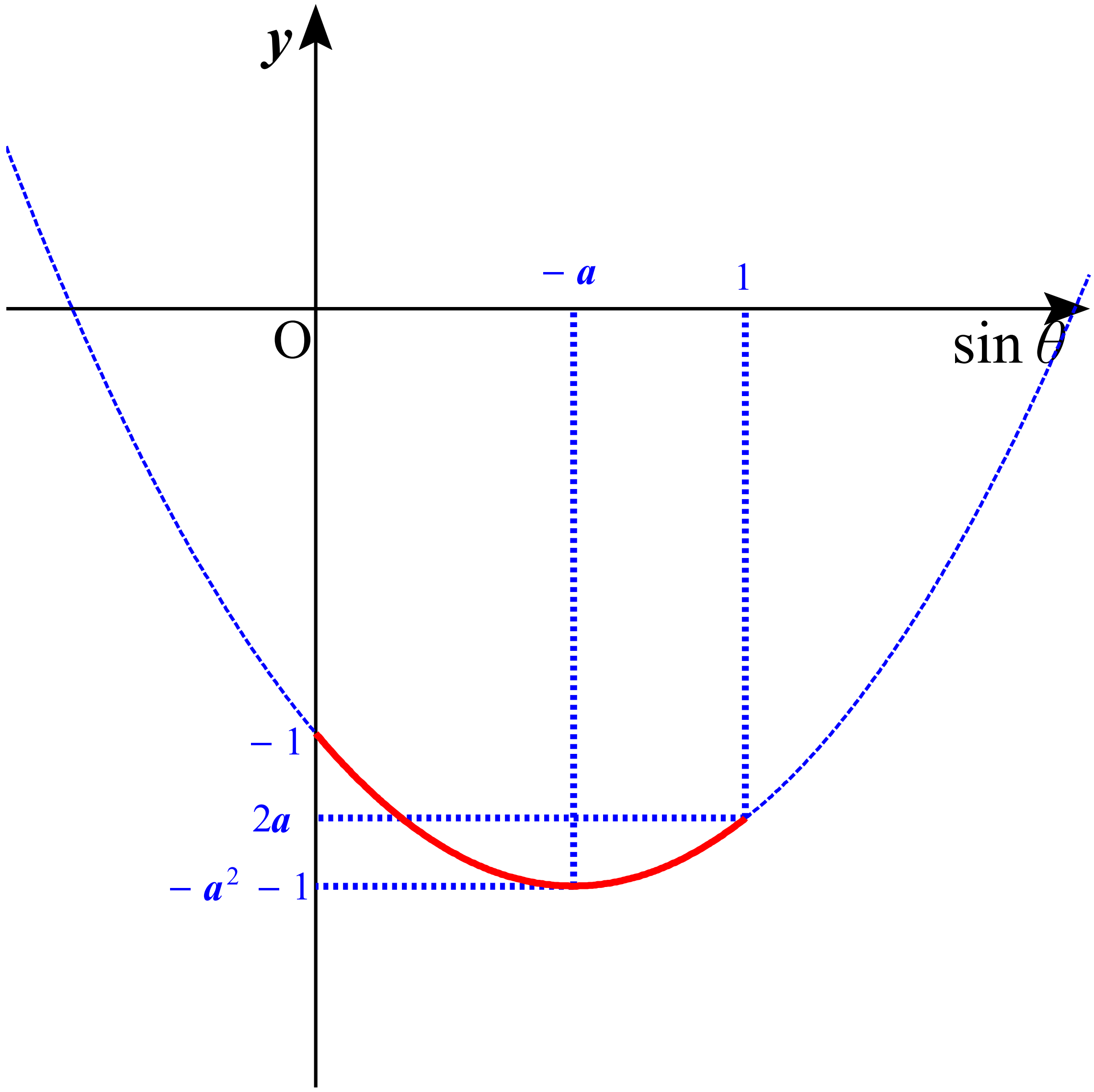
【1】$-a$ が定義域より小さい値をとるとき，すなわち $a > 0$ のとき

$\sin\theta = 0$，すなわち $\theta = 0, \pi$ のとき最小値 -1 をとる。



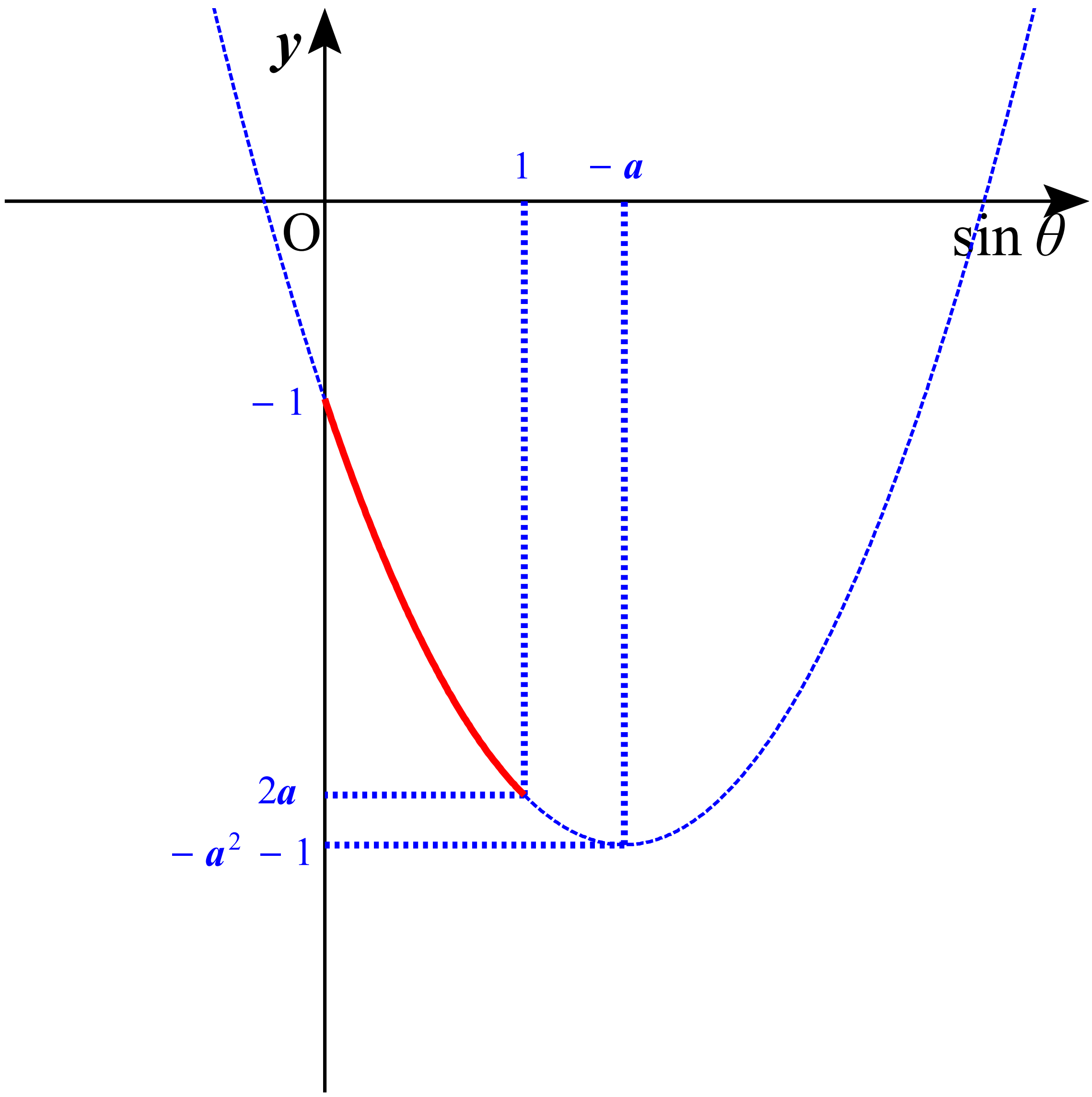
【2】$-a$ が定義域の値をとるとき，すなわち $-1 \leq a \leq 0$ のとき

$\sin\theta = -a$ を満たす θ で最小値 $-a^2-1$ をとる。



【3】$-a$ が定義域より大きい値をとるとき，すなわち $a<-1$ のとき

$\sin\theta=1$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $2a$ をとる。



279

(1)

$$2\sin^2\theta-3\cos\theta=2\left(1-\cos^2\theta\right)-3\cos\theta$$
$$=-2\cos^2-3\cos\theta+2$$
$$=-(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)$$

$2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ より， $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(2)

$$2\cos^2\theta-3\sin\theta-3=2\left(1-\sin^2\theta\right)-3\sin\theta-3$$
$$=-2\sin^2\theta-3\sin\theta-1$$
$$=-(2\sin\theta+1)(\sin\theta+1)$$

$2\cos^2\theta-3\sin\theta-3=0$ より， $\sin\theta=-1,\ -\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(3)

$2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\theta\left(\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta<0$ より， $0<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 0<\theta<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$

(4)

$2\sin^2\theta-4<5\cos\theta \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2\theta\right)-4<5\cos\theta \Leftrightarrow (2\cos\theta+1)(\cos\theta+2)>0$

$\cos\theta+2>0$ であるから，求める解は $2\cos\theta+1>0$， すなわち $\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$ の解である。

よって， $0\leq\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

(5)

$2\cos^2\theta\leq\sin\theta+1 \Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2\theta\right)\leq\sin\theta+1 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geq0 \Leftrightarrow (2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\geq0$

よって， $\sin\theta+1\geq0$ または $2\sin\theta-1\geq0$，

$\sin\theta+1\geq0$ より， $\sin\theta\geq-1$ $\quad\therefore\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

$2\sin\theta-1\geq0$ より， $\sin\theta\geq\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\dfrac{\pi}{6}\leq\theta\leq\dfrac{5}{6}\pi$

ゆえに， $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ または $\dfrac{\pi}{6}\leq\theta\leq\dfrac{5}{6}\pi$

(6)

$$\sin\theta<\tan\theta \Leftrightarrow \tan\theta-\sin\theta>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos\theta}>0$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)>0$$

$1-\cos\theta\geq 0$ より， $\sin\theta\cos\theta>0,\ \cos\theta\neq 0$

よって， $0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

280

$$\cos^2\theta+\sin\theta+a=0 \Leftrightarrow a=-\cos^2\theta-\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow a=-(1-\sin^2\theta)-\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow a=\sin^2\theta-\sin\theta-1$$
$$\Leftrightarrow a=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

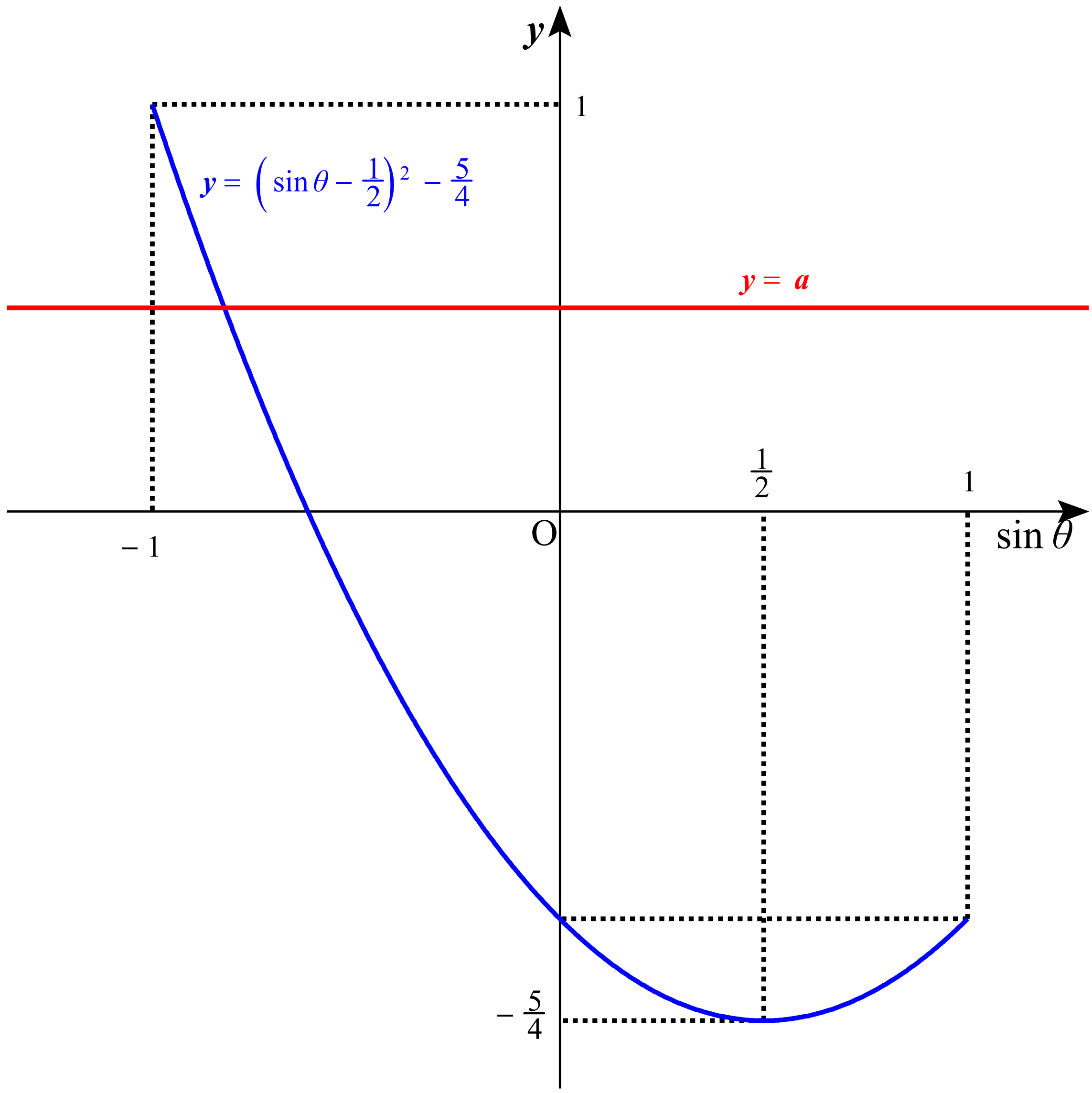
ここで， $y=a$， $y=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ とおくと，

$\cos^2\theta+\sin\theta+a=0$ を満たす θ が存在することと

$y=a$ と $y=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\ (-1\leq\sin\theta\leq 1)$ が共有点をもつことは同値であるから，

$y=a$ が $y=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\ (-1\leq\sin\theta\leq 1)$ と共有点をもつときの a の値の範囲を求めると，

$y=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\ (-1\leq\sin\theta\leq 1)$ の値域が $-\frac{5}{4}\leq y\leq 1$ であることから， $-\frac{5}{4}\leq a\leq 1$


y
1
$y = \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$
$y = a$
$\frac{1}{2}$
1
− 1
O
$\sin\theta$
$-\frac{5}{4}$