三角関数 8　三角関数の合成

合成公式 1

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　ただし，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

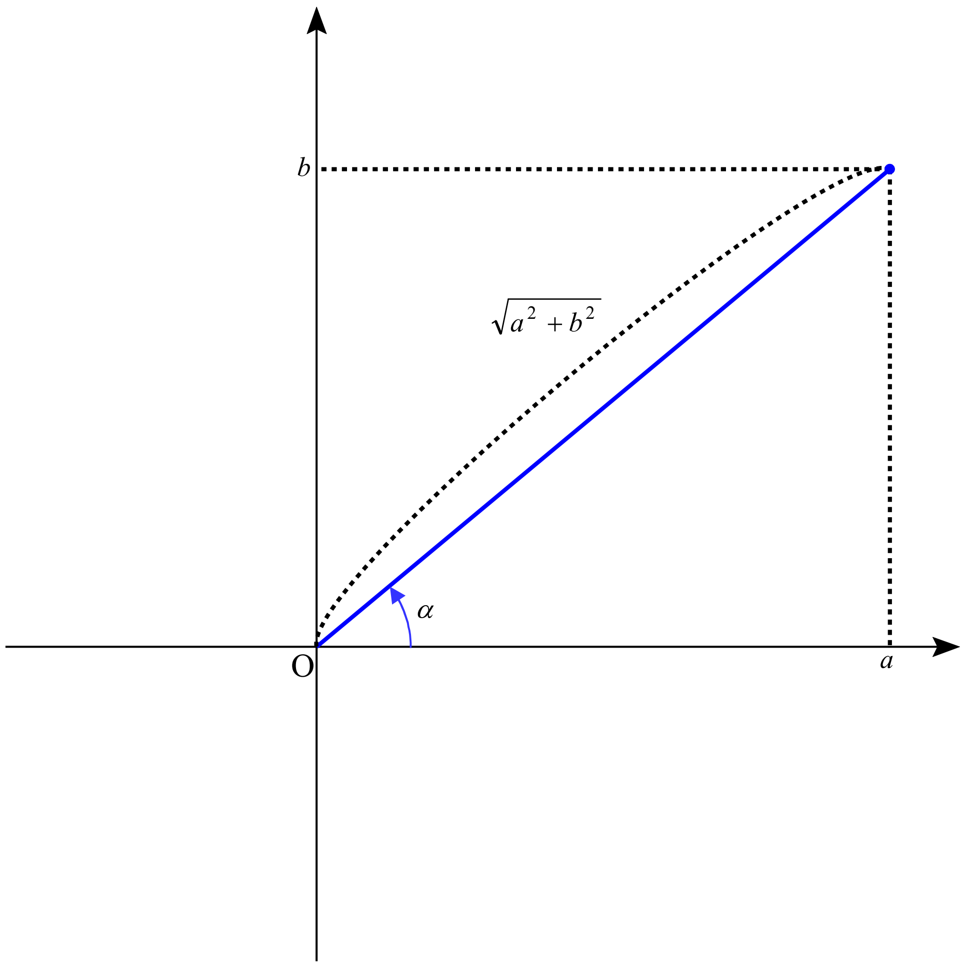
解説

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ だから，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

***a*, *b*, *α* の関係図**



合成公式 **2**

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$　ただし，$\sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

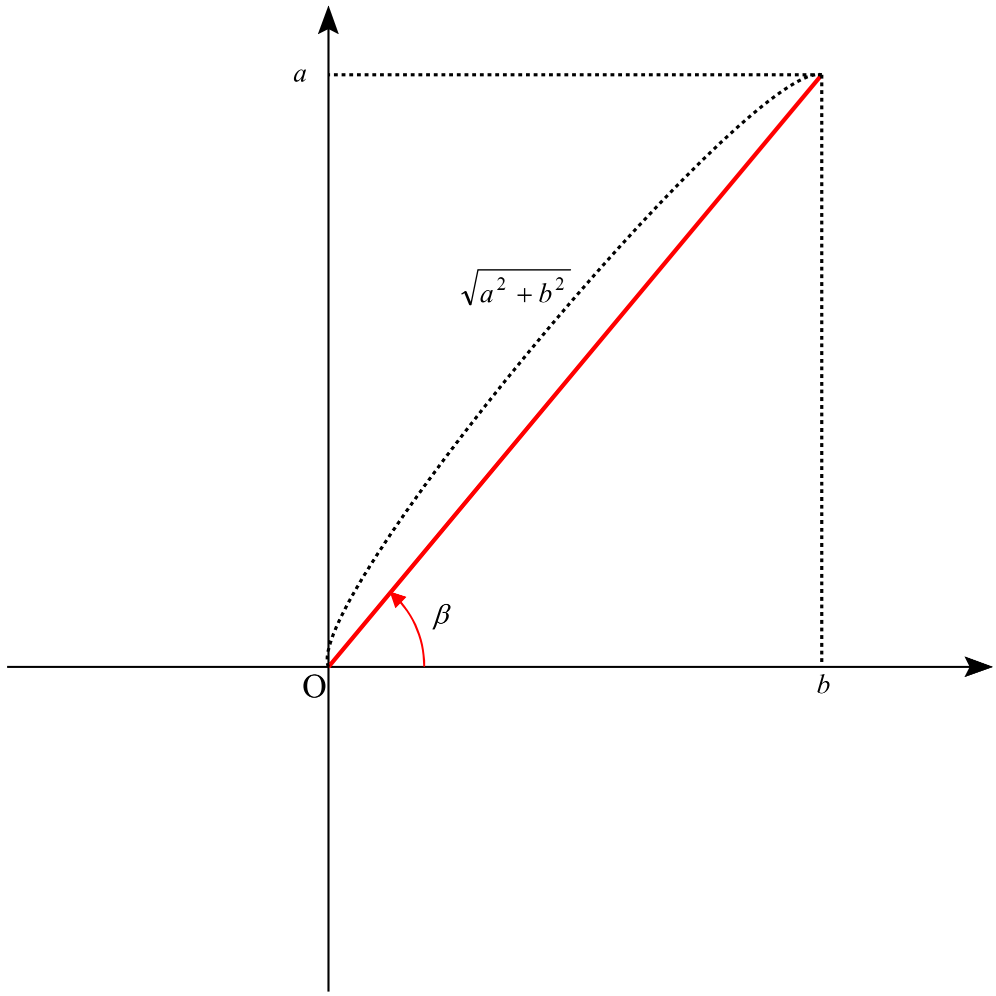
解説

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ だから，$\sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta) \end{aligned}$$

***a*, *b*, *β* の関係図**



315

(1)

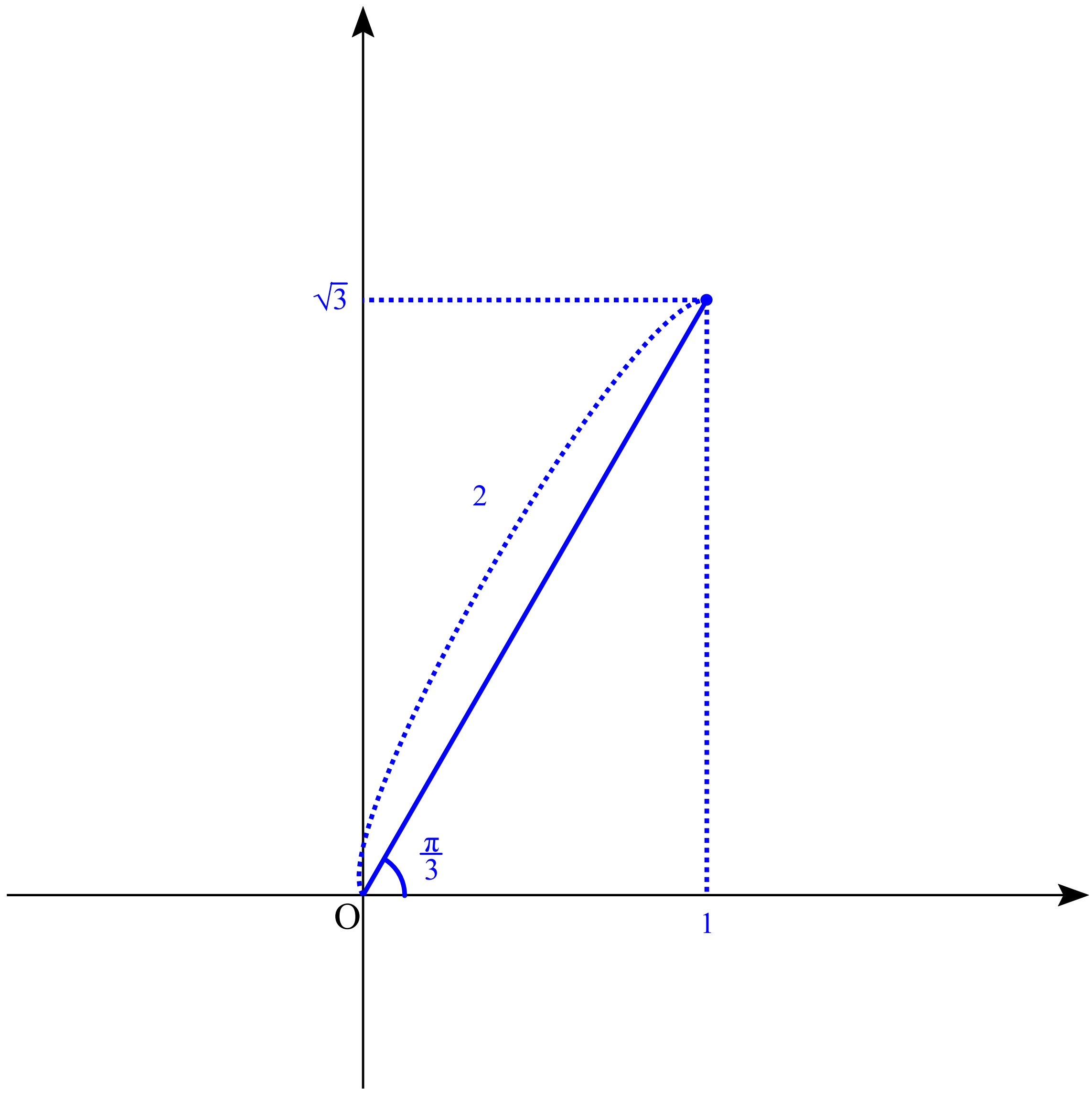
$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1^1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\cos x\right\}$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

より，$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \quad \therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

これと $\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$ より，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \quad \therefore x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

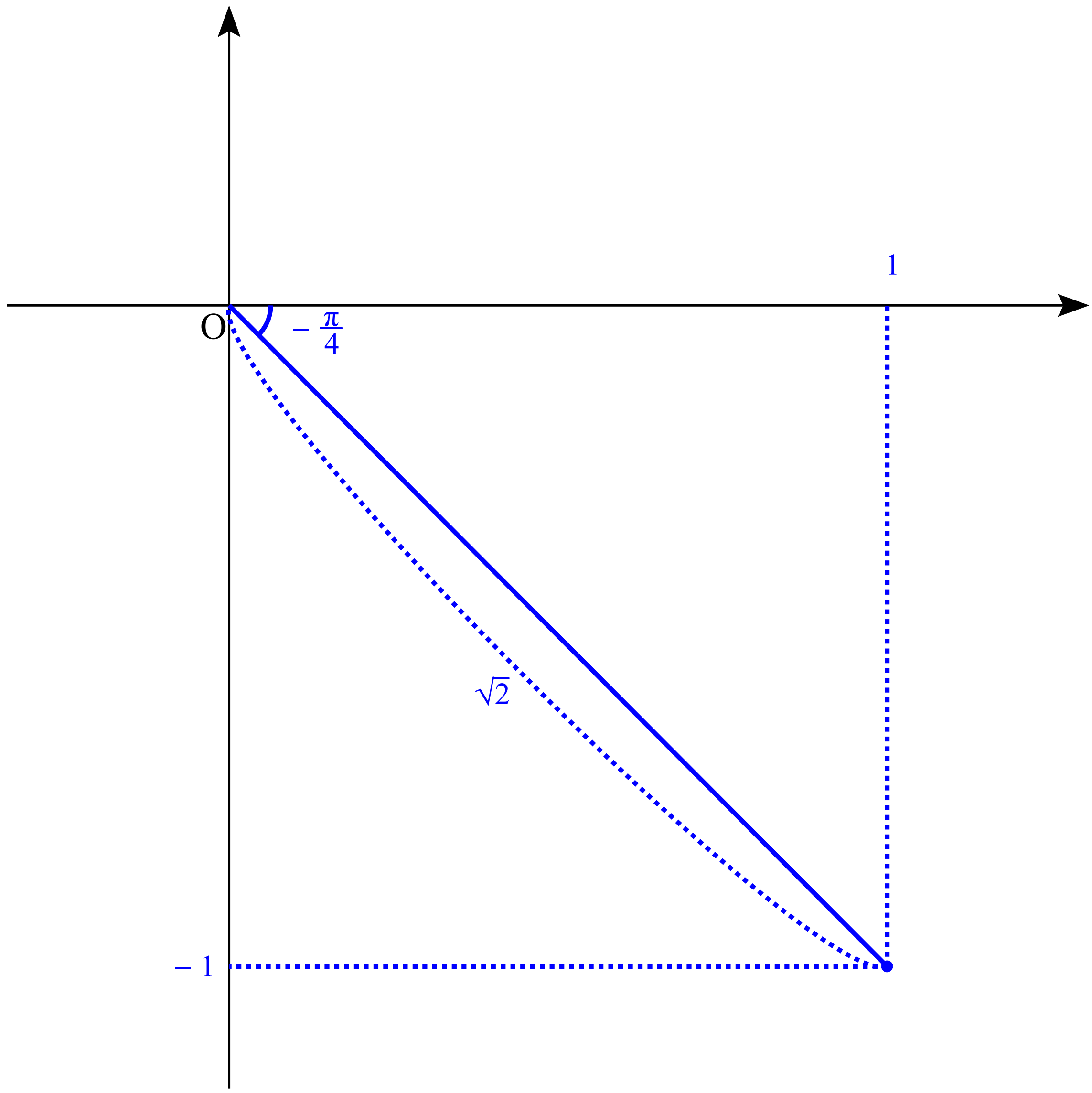
補足：図を利用すると一目瞭然



(2)

$2(\sin x-\cos x)=\sqrt{6}$， $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ より， $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

これと $-\frac{\pi}{4}\leq x-\frac{\pi}{4}<2\pi-\frac{\pi}{4}$ より， $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$ $\therefore x=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$



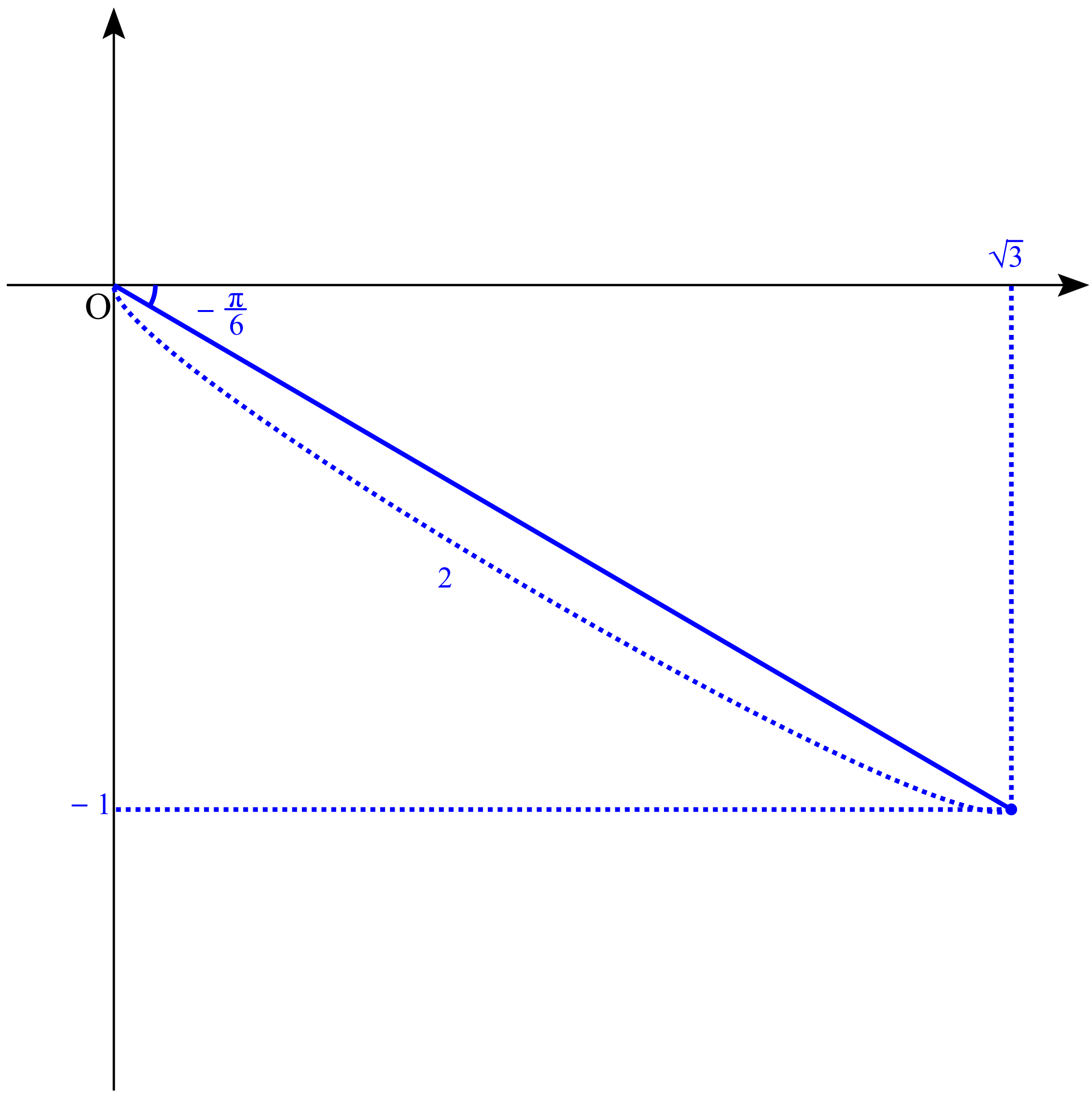
(3)

$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ より, $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$　$\therefore \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これと $-\dfrac{\pi}{6}\leq 2x-\dfrac{\pi}{6}<4\pi-\dfrac{\pi}{6}$ より, $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi+2\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi+2\pi$

$\therefore x=\dfrac{17}{24}\pi,\ \dfrac{23}{24}\pi,\ \dfrac{17}{24}\pi+\pi,\ \dfrac{23}{24}\pi+\pi$

ゆえに, $x=\dfrac{17}{24}\pi,\ \dfrac{23}{24}\pi,\ \dfrac{41}{24}\pi,\ \dfrac{47}{24}\pi$



316

(1)

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq\dfrac{1}{2}$

これと $\dfrac{\pi}{4}\leq x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{5}{6}\pi,\ 2\pi+\dfrac{\pi}{6}\leq x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore 0\leq x\leq\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi\leq x<2\pi$

(2)

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>0$　$\therefore\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>0$

これと $-\dfrac{\pi}{6}\leq x-\dfrac{\pi}{6}<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$ より，$0<x-\dfrac{\pi}{6}<\pi$　$\therefore\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{7}{6}\pi$

(3)

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，$\sqrt{2}\leq 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$　$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これと $-\dfrac{\pi}{3}\leq x-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<x-\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore\dfrac{7}{12}\pi\leq x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \pi<x\leq\dfrac{13}{12}\pi$

317

(1)

$-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$ より，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)\left(\dfrac{3}{4}\pi\leq x+\dfrac{3}{4}\pi<2\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって，

$x+\dfrac{3}{4}\pi=2\pi+\dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $x=\dfrac{7}{4}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，すなわち $x=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$

(2)

$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\left(-\dfrac{\pi}{3}\leq 2x-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，$2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $x=\dfrac{5}{12}\pi$ のとき最大値 2

$2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，すなわち $x=\dfrac{11}{12}\pi$ のとき最小値 -2

(3)

$4\sin x+3\cos x=5\sin(x+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$より，最大値 5，最小値 -5

(4)

$\sqrt{7}\sin x-3\cos x=4\sin(x+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4},\ \sin\alpha=-\frac{3}{4}\right)$より，最大値 4，最小値 -4

318

(1)

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{3}<\pi+\frac{\pi}{3}$ より，

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 2

$x+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$ のとき，すなわち $x=\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$

(2)

$2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\alpha\leq x+\alpha<\pi+\alpha$ について，$0\leq\alpha<2\pi$ とすると，

$\cos\alpha>0,\ \sin\alpha>0$ より，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\pi+\alpha<\frac{3}{2}\pi$

よって，$x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{5}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{5}$

$x+\alpha=\pi+\alpha$ のとき最小値 $\sqrt{5}\sin(\pi+\alpha)=-\sqrt{5}\sin\alpha=-1$

319

$$\begin{aligned}\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x&=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\\&=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2\\&=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\end{aligned}$$

これと $\frac{\pi}{6}\leq 2x+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$ より，

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ 2\pi+\frac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ のとき最大値 4

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi+\frac{3}{2}\pi$ のとき，すなわち $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 0

320

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$　$\left(\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$より，

$a\sin x+b\cos x$ の最小値は $-\sqrt{a^2+b^2}$

これと最小値が -5 であることから，$\sqrt{a^2+b^2}=5$

よって，

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a}{5}$　・・・①

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b}{5}$　・・・②

また，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値をとることから，$0\leq\alpha<2\pi$ とすると，$\dfrac{\pi}{6}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$　・・・③

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　・・・④

①，③より，$\dfrac{a}{5}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

②，④より，$\dfrac{b}{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore b=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

321

ポイント

一般に，$A+B$ と AB から成る式では，

$A+B=u,\ AB=v$ とおいてみるとうまくいく場合が多い。

解

$\sin x+\cos x=u,\ \sin x\cos x=v$ とおくと，$y=2u+2v+1$

また，$u^2-2v=1$ より，$v=\dfrac{u^2-1}{2}$

よって，

$$\begin{aligned}y&=2u+u^2-1+1\\&=u^2+2u\\&=(u+1)^2-1\end{aligned}$$

ここで，$u=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\le u\le\sqrt{2}$

よって，

$u=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2+2\sqrt{2}$，$u=-1$ のとき最小値 -1　・・・①

また，

$u=\sqrt{2}$ のとき

$\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

これと $\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ より，$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$　・・・②

$u=-1$ のとき

$-1=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これと $\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ より，$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　$\therefore x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　・・・②

①，②，③より，

$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2+2\sqrt{2}$

$x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -1