

三角関数 演習問題

25

(1)

解法 1 : 倍角の公式を利用

$$\begin{aligned}
 \cos 4\theta &= \cos(2\theta + 2\theta) \\
 &= \cos^2 2\theta - \sin^2 \theta \\
 &= (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - 2\sin^2 \theta \\
 &= 1 - 2\sin^2 2\theta \\
 &= 1 - 2(2\sin \theta \cos \theta)^2 \\
 &= 1 - 8\sin^2 \theta \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

よって, 8

解法 2 : 3 倍角の公式を利用

$$\begin{aligned}
 \cos 4\theta &= \cos(\theta + 3\theta) \\
 &= \cos \theta \cos 3\theta - \sin \theta \sin 3\theta \\
 &= \cos \theta (-3\cos \theta + 4\cos^3 \theta) - \sin \theta (3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) \\
 &= -3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 4(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 &= -3 + 4\{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta\}^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= -3 + 4(1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
 &= 1 - 8\sin^2 \theta \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{2\sin \theta}{\sin 2\theta} + \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{2\sin \theta}{2\sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta \cos \theta}
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 + 2\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2$$

より,

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{2\sin \theta}{\sin 2\theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 2\sqrt{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 2 \cos 2\theta - \cos \theta + 2 &= 2(-1 + 2 \cos^2 \theta) - \cos \theta + 2 \\
 &= 4 \cos^2 \theta - \cos \theta \\
 &= \cos \theta (4 \cos \theta - 1)
 \end{aligned}$$

より,

$$\cos \theta (4 \cos \theta - 1) = 0 \quad \therefore \cos \theta = 0, \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\
 &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}
 \end{aligned}$$

より,

$$\cos \theta = 0 \text{ のとき, } \tan^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad \therefore \tan \frac{\theta}{2} = \pm 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \text{ のとき, } \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} \quad \therefore \tan \frac{\theta}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$$

26

解法 1: 倍角の公式と三角関数の合成を利用

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$$

より,

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2} = 1 \quad \therefore \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\text{これと } \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \text{ より, } \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6} \text{ より, } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{ゆえに, } x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$$

解法 2: $\tan x$ の式に変換して解く

$\cos x = 0$ とすると等式が成り立たないから, $\cos x \neq 0$

そこで, 両辺を $\cos^2 x$ で割ると, $1 + \sqrt{3} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

これと $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ より, $1 + \sqrt{3} \tan x = 1 + \tan^2 x \quad \therefore \tan x (\tan x - \sqrt{3}) = 0$

ゆえに, $\tan x = 0, \sqrt{3}$

$0 \leq x < 2\pi$ より, $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$

(2)

$$\begin{aligned} \cos^2 x - 2 \cos x - \sin^2 x + 2 \sin x &= \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x + 2 \sin x \\ &= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 2(\cos x - \sin x) \\ &= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 2) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3}{4}\pi \right) \left\{ \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \right\} \end{aligned}$$

より,

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3}{4}\pi \right) \left\{ \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \right\} \geq 0$$

を解けばよい。

よって, $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 < 0$ より, $\sin \left(x + \frac{3}{4}\pi \right) \leq 0$

ゆえに, $\frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{3}{4}\pi < 2\pi + \frac{3}{4}\pi$ より, $\pi \leq x + \frac{3}{4}\pi \leq 2\pi$

すなわち, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$

27

解と係数の関係および $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ より,

$$\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) = \frac{a}{9} \quad \therefore a = 9 \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) = -\frac{11}{9} \quad \therefore \frac{(6 \sin \theta + 5)(3 \sin \theta - 4)}{9} = 0$$

これと $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より, $\sin \theta = -\frac{5}{6} \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } a = \frac{35}{12}$$

28

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) - (\sin \alpha + \cos \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha - \cos \beta \\ &= \cos \beta (\cos \alpha - 1) + \sin \alpha (\sin \beta - 1)\end{aligned}$$

ここで, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \sin \alpha < 1$, $0 < \sin \beta < 1$, $0 < \cos \alpha < 1$, $0 < \cos \beta < 1$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) - (\sin \alpha + \cos \beta) = \cos \beta (\cos \alpha - 1) + \sin \alpha (\sin \beta - 1) < 0$$

ゆえに, $\cos(\alpha - \beta) < \sin \alpha + \cos \beta$

29

$$\text{判別式を } D \text{ とすると, } \frac{D}{4} = 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta = 2 \cos \theta (2 \cos \theta - 1)$$

実数解をもつから, $D \geq 0$ より, $\cos \theta (2 \cos \theta - 1) \geq 0$

よって, $\cos \theta \leq 0$ または $\frac{1}{2} \leq \cos \theta$

これと $0 \leq \theta < 2\pi$ より, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi \leq \theta < 2\pi$

30

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(5\theta - 3\theta) \\ &= \sin(180^\circ - 3\theta) \\ &= \sin 3\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta = \sin 3\theta &\Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ &\Leftrightarrow \sin \theta (-4 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta \{-4(1 - \cos^2 \theta) - 2 \cos \theta + 3\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) = 0\end{aligned}$$

よって, $\sin 36^\circ (4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1) = 0$

$\sin 36^\circ \neq 0$ より, $4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$

これと $\cos 36^\circ > 0$ より, $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

31

(1)

四角形 POAB の面積は三角形 POB と三角形 OAB の和で表せる。

三角形 POB の面積

OB は x 軸と負方向に $\frac{\pi}{6}$ の角をなすから、 $\angle POB = \theta + \frac{\pi}{6}$

よって、三角形 POB の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \text{OP} \cdot \text{OB} \sin \angle POB &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

別解：ベクトルを学習済みなら

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\text{OB}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{より,}$$

三角形 POB の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\cos \theta \times (-1) - \sin \theta \times \sqrt{3}| &= \frac{1}{2} |\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta| \\ &= \frac{1}{2} \left| 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right| \\ &= \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right|\end{aligned}$$

これと $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

三角形 OAB の面積

$$\frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

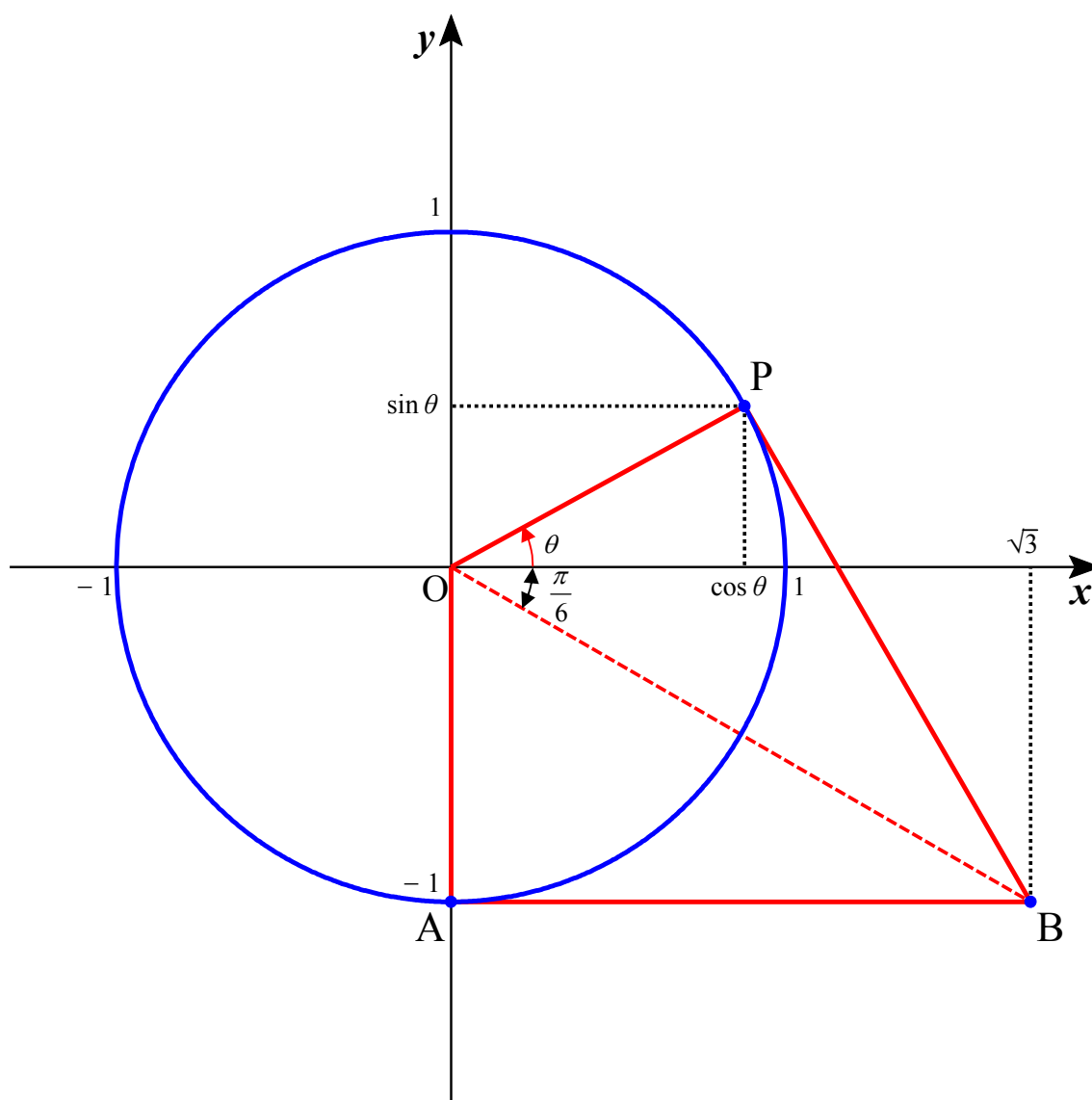
よって、 $S = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)

$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ より、

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、最大値 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ のとき、すなわち $\theta = 0$ のとき、最小値 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$



32

(1)

原点を O とすると, $\tan \angle APO = \frac{1}{a}$, $\tan \angle BPO = \frac{2}{a}$, $\theta = \angle BPO - \angle APO$ より,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\angle BPO - \angle APO) \\ &= \frac{\tan \angle BPO - \tan \angle APO}{1 + \tan \angle BPO \tan \angle APO} \\ &= \frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}{1 + \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2 + 2}{a^2}} \\ &= \frac{a}{a^2 + 2}\end{aligned}$$

(2)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\tan \theta$ が最大になるとき θ も最大になる。

したがって, $\tan \theta$ が最大になるとき a を求めればよい。

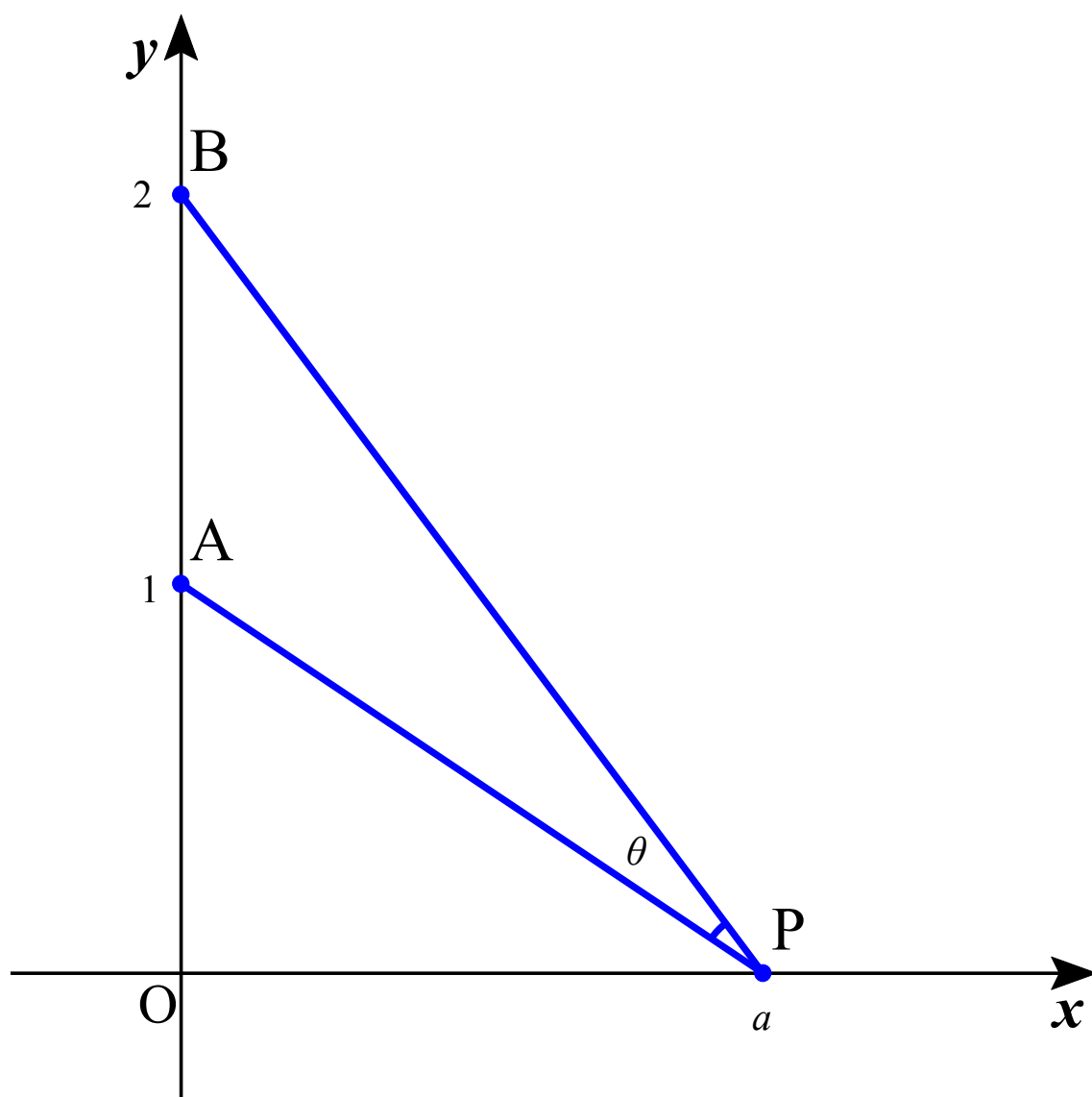
$$\tan \theta = \frac{a}{a^2 + 2} = \frac{1}{\frac{a^2 + 2}{a}} = \frac{1}{a + \frac{2}{a}}$$

ここで, $a + \frac{2}{a}$ について, $a > 0$ だから, 相加平均 $\geq$ 相乗平均 より, $a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = 2\sqrt{2}$

等号成立は $a = \frac{2}{a}$ のとき, すなわち $a = \sqrt{2}$ のとき

よって, $a = \sqrt{2}$ のとき $\tan \theta$ は最大になる。

ゆえに, θ が最大になる a の値は $\sqrt{2}$



33

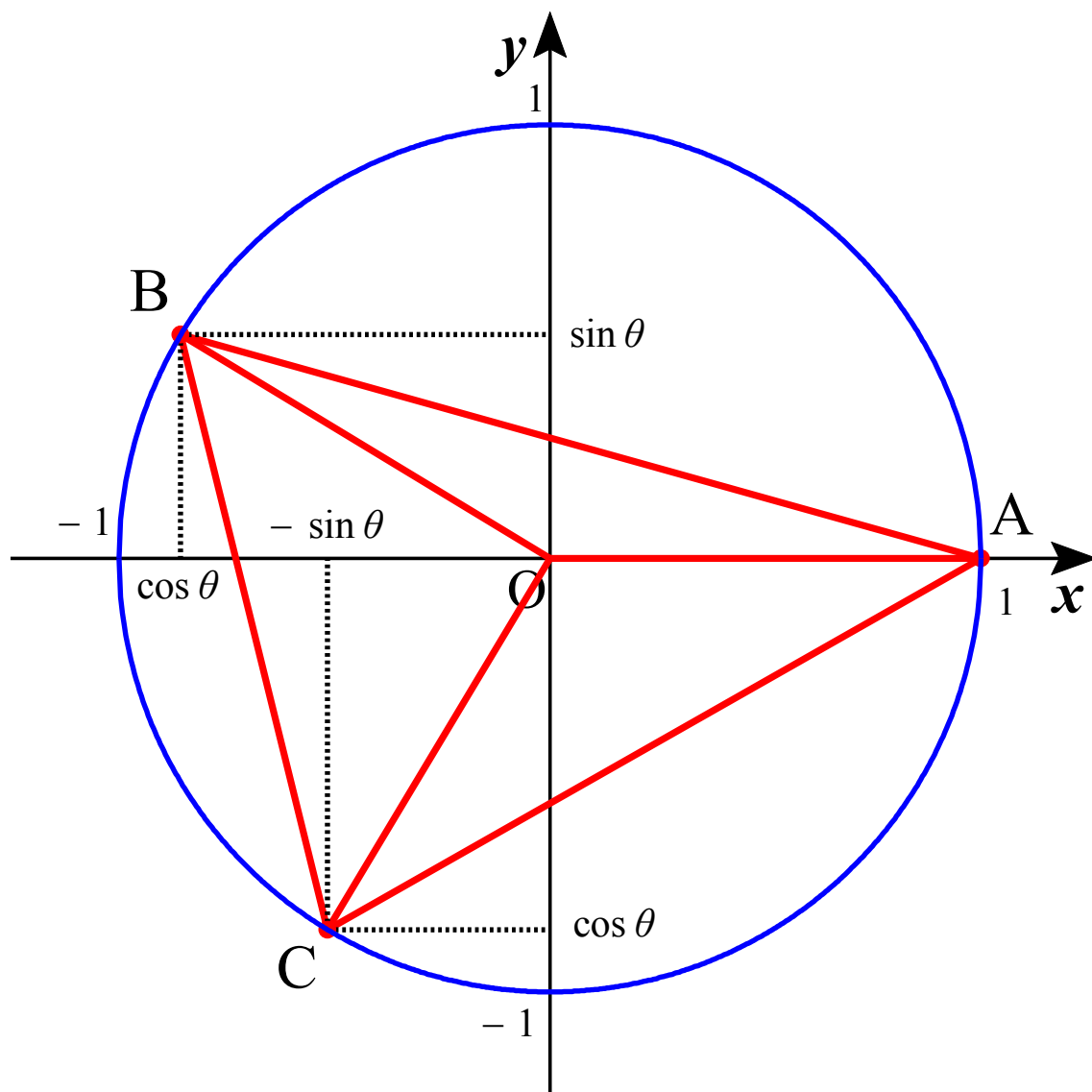
(1)

$$\triangle AOB \text{ の面積} = \frac{1}{2} AO |\sin \theta| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\triangle BOC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\triangle COA \text{ の面積} = \frac{1}{2} \cdot AO |\cos \theta| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-\cos \theta) = -\frac{1}{2} \cos \theta$$

$$\text{よって, } S = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \cos \theta\right) = \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta + 1)$$



(2)

$$S = \frac{1}{2}(\sin \theta - \cos \theta + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right\}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ より, } \frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$$

よって, $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき, すなわち $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき S は最大値 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

34

(1)

$$y = 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x$$

$$= (\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} \sin x - \cos x)$$

$$\text{より, } y = t^2 - 2\sqrt{3}t$$

(2)

$$y = t^2 - 2\sqrt{3}t$$

$$= (t - \sqrt{3})^2 - 3$$

$$t = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \text{ より, } -1 \leq t \leq 2$$

よって,

$$t = \sqrt{3} \text{ のとき最小値 } -3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$t = -1 \text{ のとき最大値 } 1 + 2\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$t = \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \text{ より, } \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

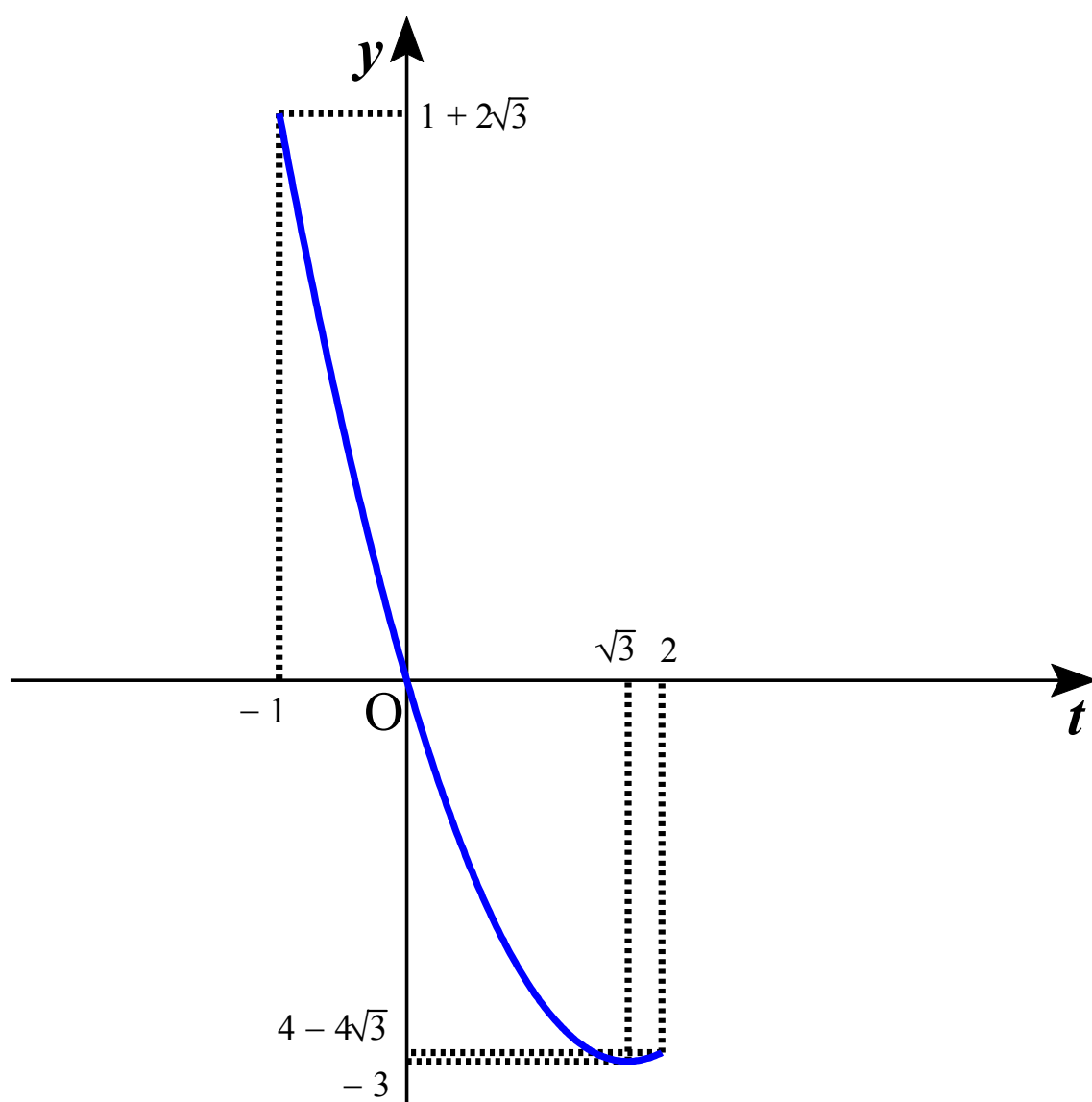
$$\text{これと } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ より, } x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$t = -1 \text{ のとき}$$

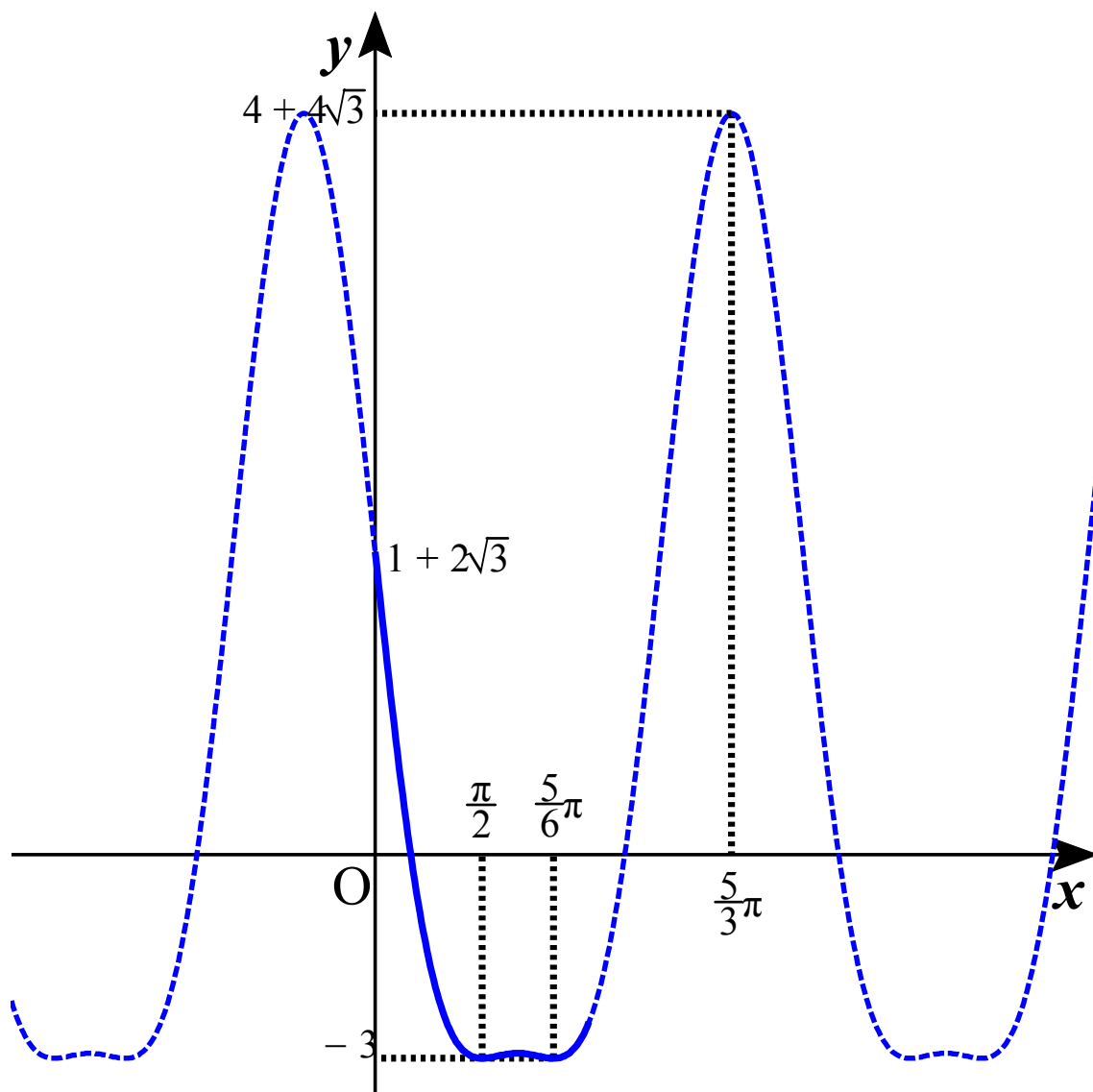
$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \text{ より, } \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{これと } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ より, } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \quad \therefore x = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ より, } x = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき最小値 } -3, \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } 1 + 2\sqrt{3}$$



おまけ

 $y = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x - 6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x$ のグラフ

35

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta - 2k \cos \theta - 3k - 1 &= 1 - \cos^2 \theta - 2k \cos \theta - 3k - 1 \\ &= -(\cos^2 \theta + 2k \cos \theta + 3k)\end{aligned}$$

これと $\sin^2 \theta - 2k \cos \theta - 3k - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ より,

$\cos^2 \theta + 2k \cos \theta + 3k = 0$ を満たす $\cos \theta$ が存在するための k の範囲を求めればよい。

これは $\cos \theta$ の 2 次関数 $y = \cos^2 \theta + 2k \cos \theta + 3k$ のグラフが $\cos \theta$ 軸 ($-1 \leq \cos \theta \leq 1$) と

共有点をもつときの k の範囲を求めることと同じであり,

簡単のため $\cos \theta = x$ とおけば, x の 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + 3k$ のグラフが $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸と共有点をもつときの k の範囲を求めることと同じである。

そこで, 共有点が $x = -1$ または $x = 1$ の場合と $-1 < x < 1$ の場合のそれぞれについて k の範囲を求めることにする。尚, $-1 < x < 1$ の場合については, 共有点の数が 1 つの場合と 2 つの場合にさらに分ける。

共有点が $x = -1$ または $x = 1$ の場合

$$y = f(x) = x^2 + 2kx + 3k \text{ とおくと, } f(-1) = 0 \text{ または } f(1) = 0$$

$$\text{これと } f(-1) = 1 + k, \quad f(1) = 1 + 5k \text{ より, } k = -1 \text{ または } k = -\frac{1}{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

共有点が $-1 < x < 1$ の場合

【1】共有点が 1 つの場合

$y = x^2 + 2kx + 3k$ が $-1 < x < 1$ の範囲で x 軸と接するとき

$x^2 + 2kx + 3k = 0$ が $-1 < x < 1$ の範囲で重解をもつ条件と同じだから,

$$\text{判別式を } D \text{ とすると, } \frac{D}{4} = k^2 - 3k = k(k - 3) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

重解を α とすると, 解と係数の関係より $\alpha + \alpha = -2k \quad \therefore \alpha = -k$

これと $-1 < \alpha < 1$ より, $-1 < k < 1 \quad \cdots \textcircled{3}$

②かつ③より, $k = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$

$y = x^2 + 2kx + 3k$ が $-1 < x < 1$ の範囲で x 軸と 1 点で交わる時

2 次関数であることと中間値の定理から, $f(-1)f(1) < 0$

これと $f(1) \cdot f(-1) = (1 + 5k)(1 + k)$ より, $(1 + 5k)(1 + k) < 0$

$$\text{よって, } -1 < k < -\frac{1}{5} \quad \cdots \textcircled{5}$$

【2】共有点が 2 つの場合

$y = f(x) = x^2 + 2kx + 3k = (x + k)^2 - k^2 + 3k$ より, 頂点の座標は $(-k, -k^2 + 3k)$

よって, $-1 < -k < 1$ かつ $-k^2 + 3k < 0$ かつ $f(1)f(-1) > 0$

$$\text{ゆえに, } -\frac{1}{5} < k < 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

①または④または⑤または⑥より, $-1 \leq k \leq 0$

別解

$$y = x^2 + 2kx + 3k \text{ が}$$

「 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸と共有点をもつ」の否定は

「 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸と共有点をもたない」だから、

まず $-1 \leq x \leq 1$ で x 軸と共有点をもたないときの k の範囲を求める。

x 軸と共有点をもたない場合

$x^2 + 2kx + 3k = 0$ が実数解を持たない場合だから、

$$\text{判別式を } D \text{ とすると, } \frac{D}{4} = k^2 - 3k = k(k-3) < 0 \quad \therefore 0 < k < 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

x 軸と $-1 \leq x \leq 1$ を除く範囲で共有点をもつ場合

$$y = f(x) = x^2 + 2kx + 3k = (x+k)^2 - k^2 + 3k \text{ より, 頂点の座標は } (-k, -k^2 + 3k)$$

よって、

$$-k < -1 \text{ または } 1 < -k, \text{ すなわち } k < -1 \text{ または } 1 < k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-k^2 + 3k \leq 0 \quad \therefore k \leq 0 \text{ または } 3 \leq k \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$f(-1)f(1) = (1+5k)(1+k) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ または } -\frac{1}{5} < k \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ かつ } \textcircled{3} \text{ かつ } \textcircled{4} \text{ より, } k < -1 \text{ または } 3 \leq k \quad \cdots \textcircled{5}$$

①または⑤より、

$k < -1$ または $0 < k$ のとき $y = x^2 + 2kx + 3k$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸と共有点をもたない。

よって、 $-1 \leq k \leq 0$ のとき $y = x^2 + 2kx + 3k$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸と共有点をもつ。

36

$$\begin{aligned}
 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 3 - a &= 2(-1 + 2 \cos^2 \theta) + 4 \cos \theta + 3 - a \\
 &= 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1 - a \\
 &= (2 \cos \theta + 1)^2 - a
 \end{aligned}$$

これと $2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 3 - a = 0$ より, $(2 \cos \theta + 1)^2 = a$

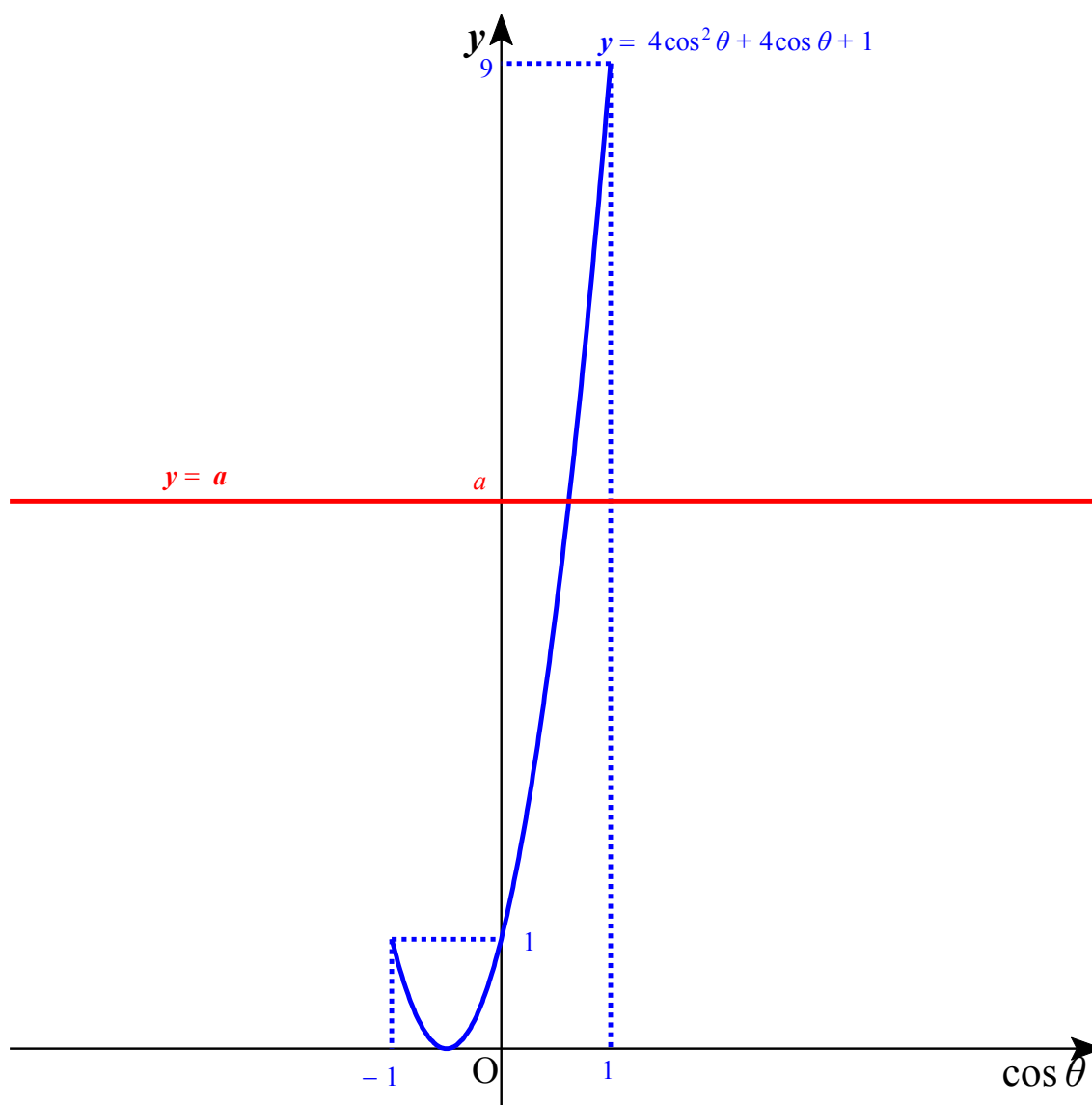
よって, $2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 3 - a = 0$ を満たす $\cos \theta$ の数は

$\cos \theta$ ($-1 \leq \cos \theta \leq 1$) の 2 次関数 $y = (2 \cos \theta + 1)^2$ と $y = a$ の交点の数と一致する。

また, $\cos \theta = \alpha$ とすると, $0 \leq \theta < 2\pi$ より,

$\alpha = -1, 1$ のとき θ それぞれ $\pi, 0$ の 1 つ

$-1 < \alpha < 1$ のとき θ は 2 つ存在する。



よって、グラフより、

$a < 0$ のとき 0 個, $a = 0$ のとき 2 個, $0 < a < 1$ のとき 4 個, $a = 1$ のとき 3 個,

$1 < a < 9$ のとき 2 個, $a = 9$ のとき 1 個, $a > 9$ のとき 0 個

補足

下図のように $y = f(\cos \theta) = (2 \cos \theta + 1)^2$ ($-1 \leq \cos \theta \leq 1$) と $g(\theta) = \cos \theta$ を $\cos \theta$ 軸を共有させて表すとわかりやすい。

