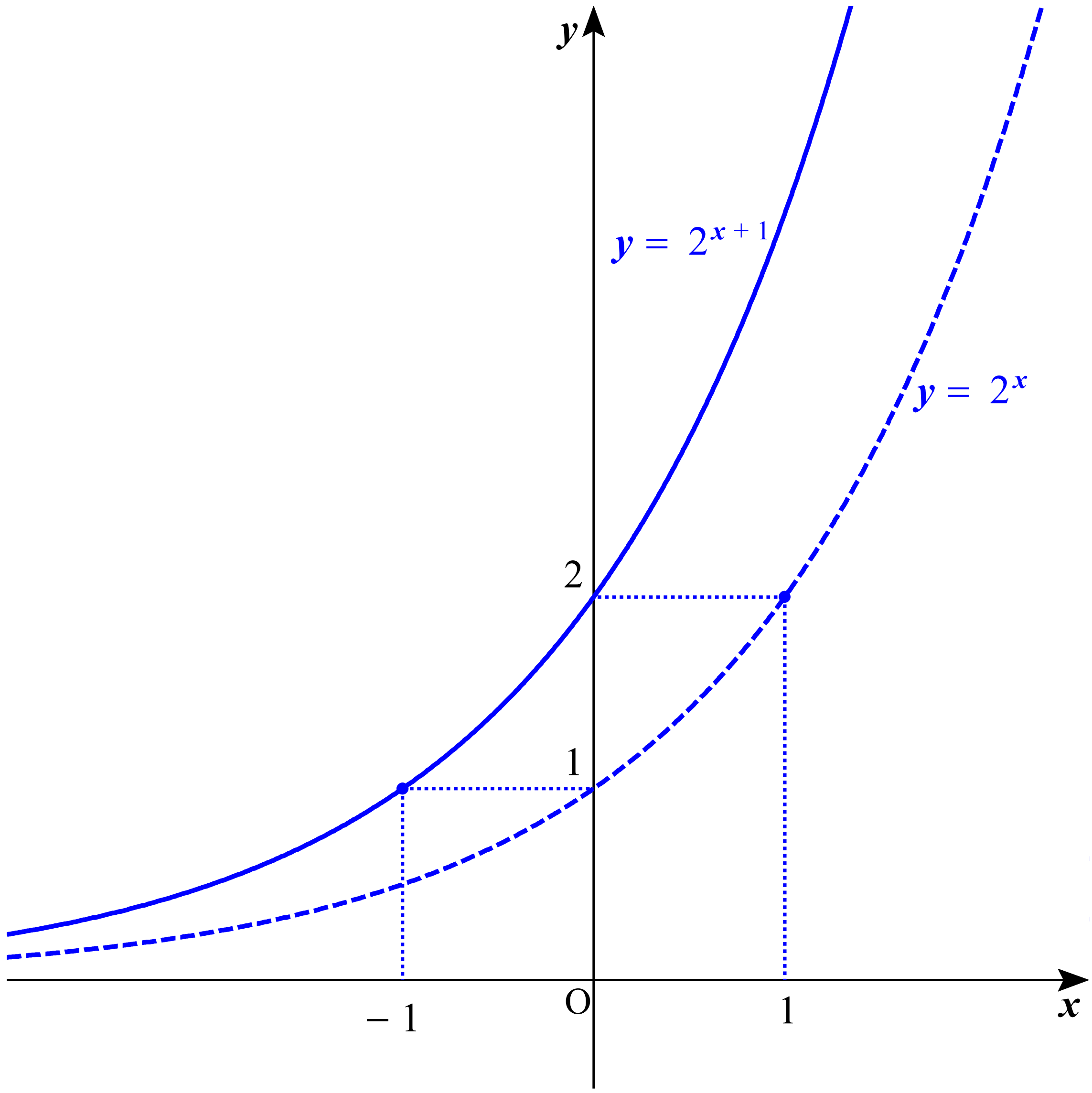
指数関数と対数関数 2　指数関数

343

$y=a^x$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q 平行移動したグラフの式は $y=a^{x-p}+q$

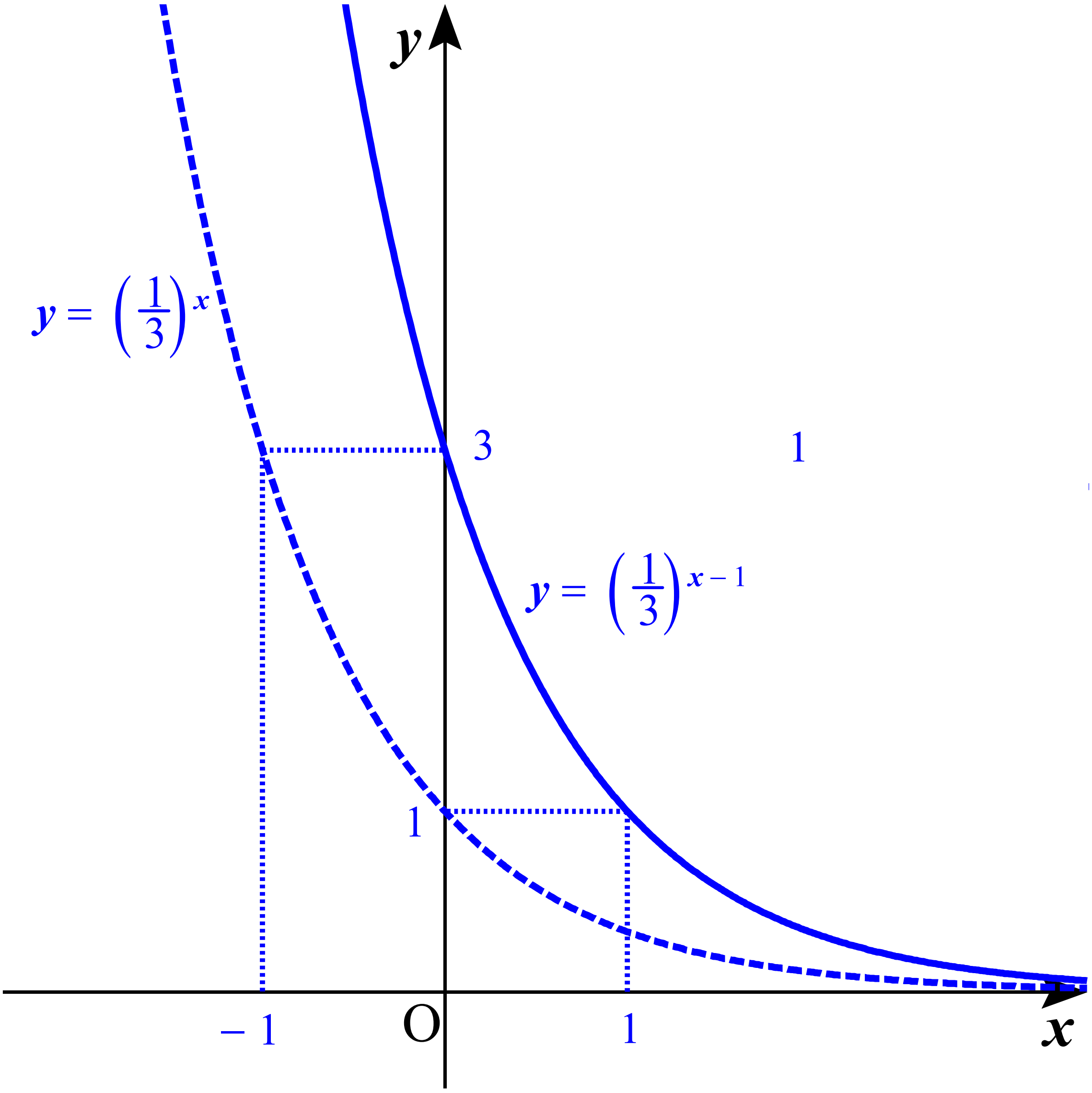
(1)

$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したグラフ



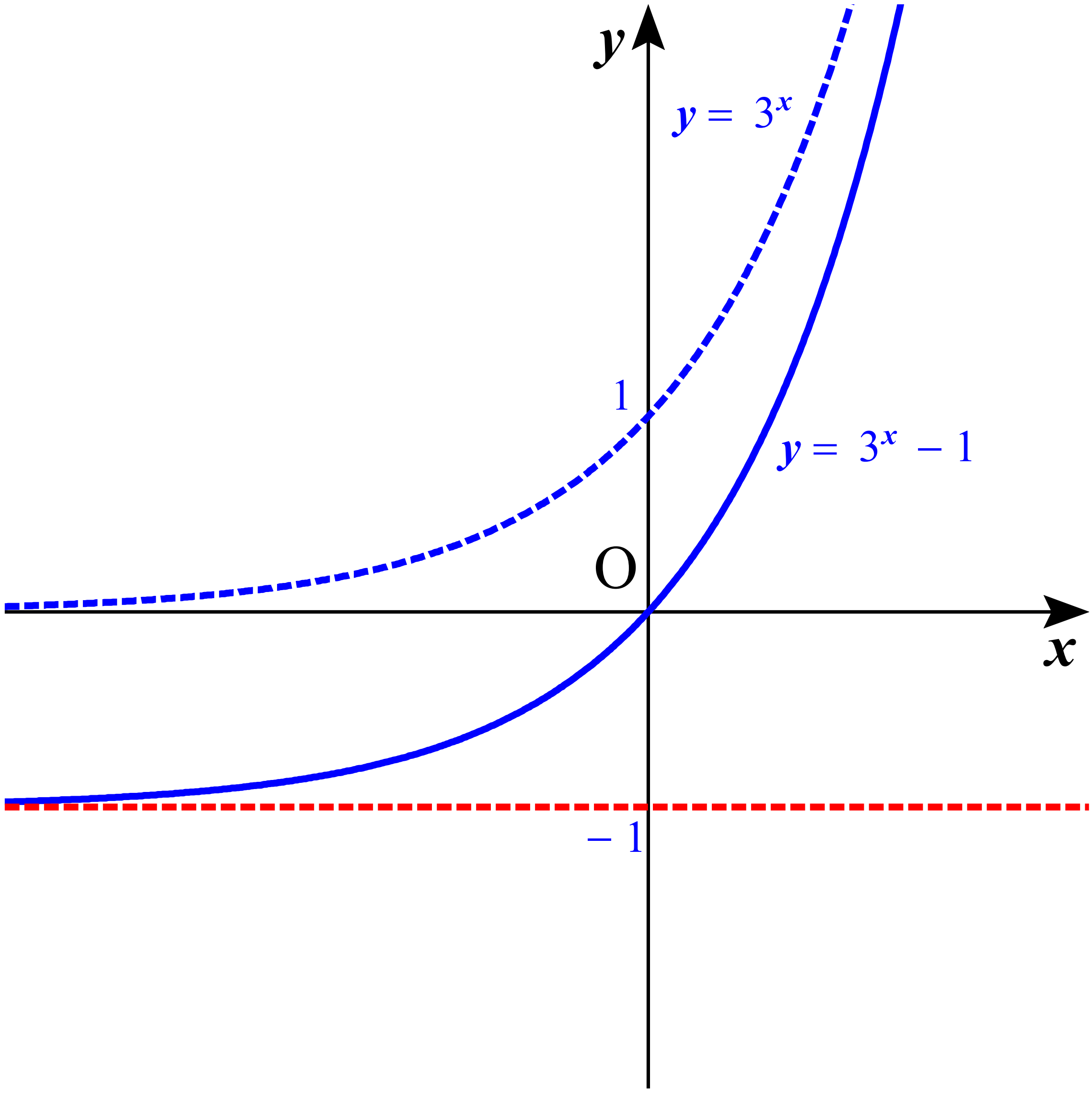
(2)

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 1 平行移動したグラフ



(3)

$y=3^x$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したグラフ



344

(1)

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$ より，指数の分母の最小公倍数が 6 であることと

いずれも正の数であることから，6 乗してから大小を比較すればよい。

つまり，$\left(\sqrt{2}\right)^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$\left(\sqrt[6]{7}\right)^6=\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^6=7$ より，

$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)

指数の最大公約数が 10 であることといずれも正の数であることから，

それぞれの指数を最大公約数で割った商を指数とする数の大小を比較すればよい。

つまり，$2^{30}=\left(2^3\right)^{10}$，$3^{20}=\left(3^2\right)^{10}$，$10^{10}=\left(10^1\right)^{10}$ だから，

2^3，3^2，10^1 を比較すると，$2^3<3^2<10^1$ である。

よって，$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

345

(1)

$4^x=\left(2^2\right)^x=\left(2^x\right)^2$，$2^{x+1}=2\cdot 2^x$ より，$\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x-24=0\Leftrightarrow\left(2^x-4\right)\left(2^x+6\right)=0$

これと $2^x>0$ より，$2^x=4=2^2\quad\therefore x=2$

(2)

$10^{2x}=\left(10^x\right)^2$ より，$\left(10^x\right)^2+10^x-2=0\Leftrightarrow\left(10^x-1\right)\left(10^x+2\right)=0$

これと $10^x>0$ より，$10^x=1=10^0\quad\therefore x=0$

(3)

$9^{x+1}=9^x\cdot 9=\left(3^2\right)^x\cdot 9=\left(3^x\right)^2\cdot 9=9\cdot\left(3^x\right)^2$ より，

$9\cdot\left(3^x\right)^2-28\cdot 3^x+3=0\Leftrightarrow\left(9\cdot 3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0\quad\therefore 3^x=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}=3^{-2},\ 3^x=3=3^1$

ゆえに，$x=-2,\ 1$

(4)

$16^x=\left(4^2\right)^x=\left(4^x\right)^2$ より，$\left(4^x\right)^2-3\cdot 4^x-4\geq 0\Leftrightarrow\left(4^x+1\right)\left(4^x-4\right)\geq 0$

これと $4^x+1>0$ より，$4^x-4\geq 0$ すなわち $4^x\geq 4=4^1\quad\therefore x\geq 1$

(5)

解法 1

$\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$ より，$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x-6<0 \Leftrightarrow \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x+2\right\}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x-3\right\}<0$

これと$\left(\frac{1}{3}\right)^x+2>0$より，$\left(\frac{1}{3}\right)^x-3<0$すなわち$\left(\frac{1}{3}\right)^x<3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x$の底は$0<\frac{1}{3}<1$だから$\left(\frac{1}{3}\right)^x$単調に減少する。つまり，$x$が増加すれば減少する。

よって，$\left(\frac{1}{3}\right)^x<3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ならば$x>-1$

解法 2

$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{1}{3^x}-6=\frac{1}{3^{2x}}-\frac{1}{3^x}-6=\frac{1}{3^{2x}}-\frac{3^x}{3^{2x}}-\frac{6\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=\frac{1}{3^{2x}}\left(1-3^x-6\cdot 3^{2x}\right)<0$

これと$\frac{1}{3^{2x}}>0$より，$1-3^x-6\cdot 3^{2x}<0$すなわち$6\cdot\left(3^x\right)^2+3^x-1>0$

よって，$\left(3\cdot 3^x-1\right)\left(2\cdot 3^x+1\right)>0$

これと$2\cdot 3^x+1>0$より，$3\cdot 3^x-1>0$すなわち$3^x>\frac{1}{3}=3^{-1}$

ゆえに，$x>-1$

(6)

解法 1

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x\cdot 4=4\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$ より，

$4\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2>0 \Leftrightarrow \left\{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2\right\}>0$

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x>2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$の底は$0<\frac{1}{2}<1$だから$\left(\frac{1}{2}\right)^x$は単調に減少する。つまり，$x$が増加すれば減少する。

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x>2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ならば$x>2,\ x<-1$

解法 2

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$$
$$=4\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^{x}-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$$
$$=4\cdot\frac{1}{2^{2x}}-9\cdot\frac{1}{2^x}+2$$
$$=\frac{4}{2^{2x}}-\frac{9\cdot2^x}{2^{2x}}+\frac{2\cdot2^{2x}}{2^{2x}}$$
$$=\frac{1}{2^{2x}}\left\{2\cdot\left(2^x\right)^2-9\cdot2^x+4\right\}$$
$$=\frac{1}{2^{2x}}\left(2\cdot2^x-1\right)\left(2^x-4\right)>0$$

よって，$2^x<\frac{1}{2}=2^{-1},\ 2^x>4=2^2\quad\therefore x<-1,\ 2<x$

346

(1)

$$y=2^{2x}-4\cdot2^x+1$$
$$=\left(2^x\right)^2-4\cdot2^x+1$$
$$=\left(2^x-2\right)^2-3$$

これと $2^x>0$ より，

$2^x=2$ のとき，すなわち $x=1$ のとき最小値 -3

(2)

$$y=-4^x+2^x+2$$
$$=-\left(2^2\right)^x+2^x+2$$
$$=-\left(2^x\right)^2+2^x+2$$
$$=-\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

また，$-1\leq x\leq 2$ より，$2^{-1}\leq 2^x\leq 2^2$

よって，

$2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$ のとき，すなわち $x=-1$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$

$2^x=2^2$ のとき，すなわち $x=2$ のとき最小値 -10

347

(1)

$2^x = X,\ 2^y = Y$ とおくと，　$X + Y = 6,\ XY = 8$

これは $X,\ Y$ が t の 2 次方程式 $t^2 - 6t + 8 = 0$ であることを示している。

$t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-4) = 0$ より，　$(X,\ Y) = (2,\ 4)$ または $(X,\ Y) = (4,\ 2)$

よって，　$(x,\ y) = (1,\ 2)$ または $(x,\ y) = (2,\ 1)$

(2)

$2^{x-1} = X,\ 3^{y-1} = Y$ とおくと，　$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^2 \cdot 3^{y-1} = 31 \\ 2^3 \cdot 2^{x-1} - 3^{y-1} = 29 \end{cases}$ より，　$\begin{cases} X + 9Y = 31 & \cdots① \\ 8X - Y = 29 & \cdots② \end{cases}$

①－②より，　$-7X + 10Y = 2$　・・・③

①＋②より，　$9X + 8Y = 60$　・・・④

④×10－③×8 より，　$146X = 584$　$\therefore X = 4$

これと②より，　$Y = 3$

よって，　$2^{x-1} = 2^2,\ 3^{y-1} = 3^1$

ゆえに，　$x = 3,\ y = 2$

347

$$
\begin{aligned}
4^x + 4^{-x} &= \left(2^2\right)^x + \left(2^2\right)^{-x} \\
&= \left(2^x\right)^2 + \left(2^{-x}\right)^2 \\
&= \left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + \left(2^{-x}\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \\
&= \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 - 2
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
y &= -\left\{\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 - 2\right\} + 4\left(2^x + 2^{-x}\right) \\
&= -\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 + 4\left(2^x + 2^{-x}\right) + 2 \\
&= -\left\{\left(2^x + 2^{-x}\right) - 2\right\}^2 + 6
\end{aligned}
$$

ここで，　$2^x > 0,\ 2^{-x} > 0$ だから，相加相乗平均より，

$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$　(等号成立は $2^x = 2^{-x}$ のとき，すなわち $x = 0$ のとき)

よって，　$2^x + 2^{-x} = 2$ のとき，すなわち $x = 0$ のとき最大値 6