指数関数と対数関数 3　対数とその性質

はじめに：指数と対数の関係について

対数の定義

$\boldsymbol{a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M}$　（**a は 1 でない正数，M は正数**）について

下図は $y=a^x\ (a>1)$ のグラフである。よって，x の値 p と対応する y の値は a^p である。

（以後の内容は $0<a<1$ としても同じなので，$a>1$ のグラフのみで扱う）

逆に，グラフから明らかなように，y の値 q と対応する x の値もただ 1 つ存在し，

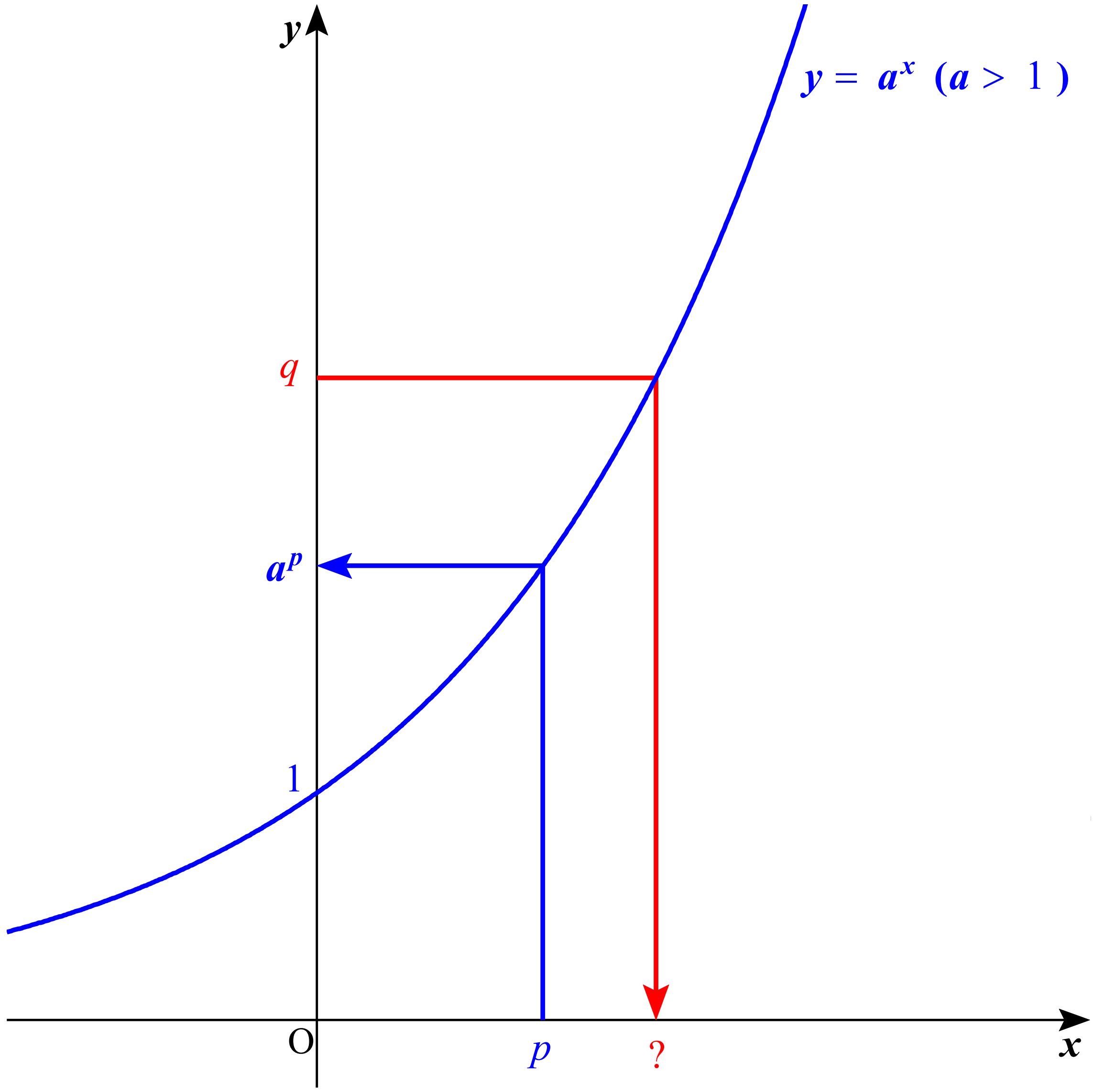
それを ? で示した。この ? を「a を底とする q の対数」といい，$\log_a q$ と表す。

つまり，$? = \log_a q$ であり，q を「対数 ? の真数」という。

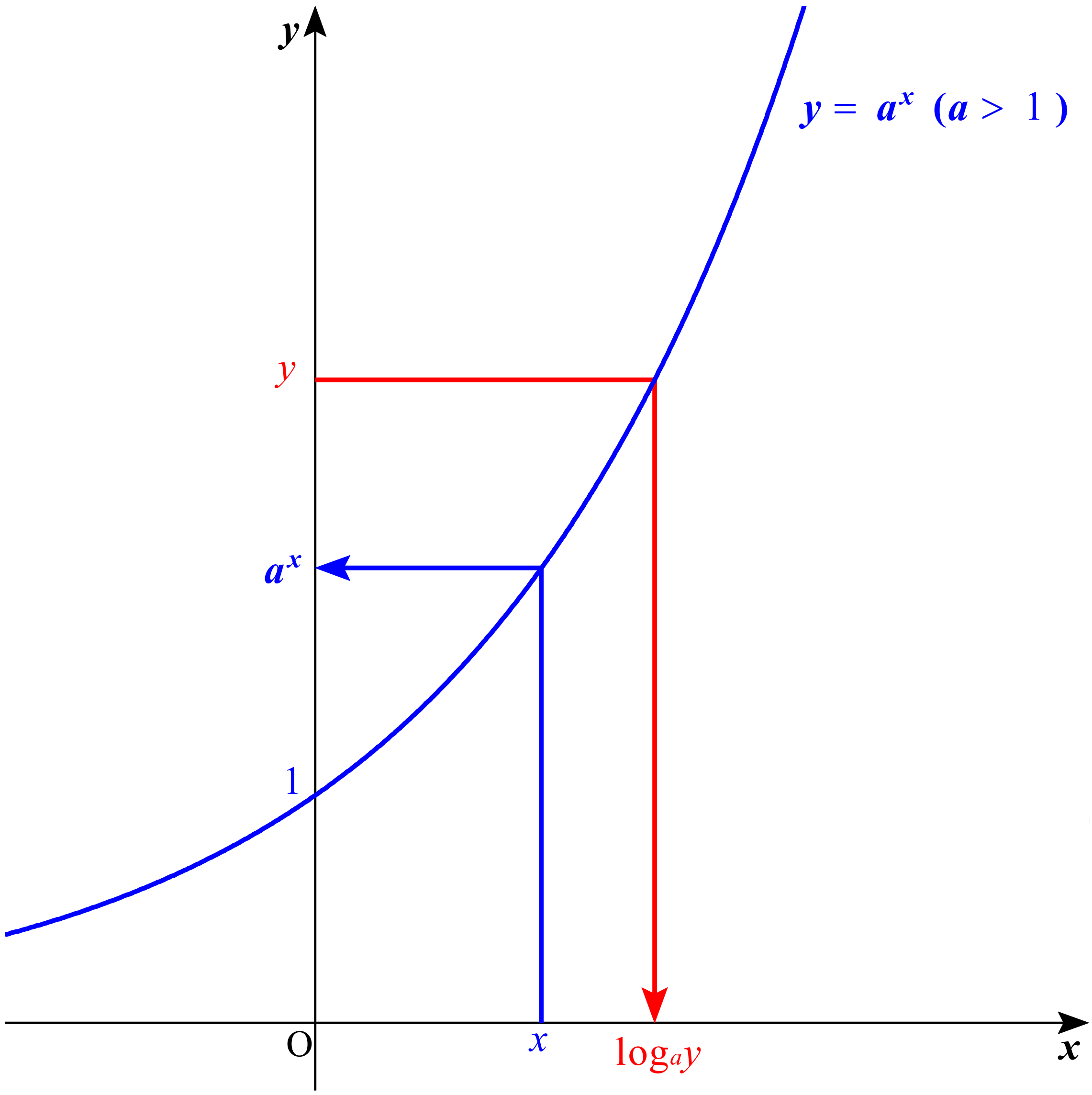
真数 q は指数関数 $y=a^x$ （a は 1 でない正数）の y の値だから，当然，正数である。

y の値 a^p については，それと対応する x の値は p だから，$p=\log_a a^p$ であり，

$a^p=M$ とおけば，$p=\log_a M$ となる。よって，$a^p=M \Leftrightarrow p=\log_a M$



x, y を用いて，指数と対数の関係を一般化すると，
a を底とする指数関数 $y=a^x$ を y から x へ逆向きに対応させると，x は $x=\log_a y$ と表され，
このときの x を「a を底とする y の対数」，y を「対数 x の真数」という。
指数関数の定義から，底 a は 1 でない正数，真数 y は正数であるのは明らかである。
また，$a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$

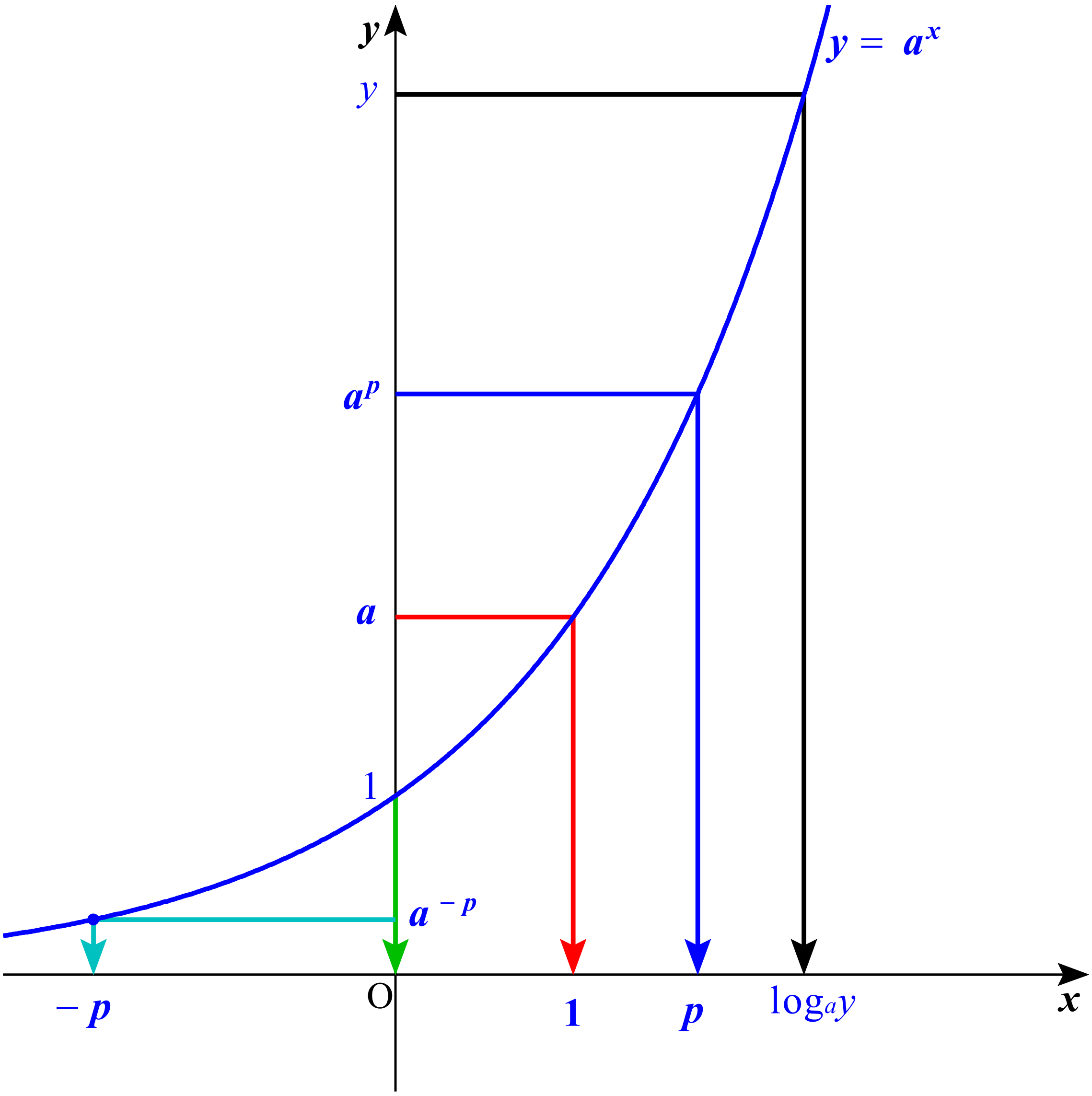


対数の性質 その 1

$-p=\log_a a^{-p}$， $0=\log_a 1$， $1=\log_a a$， $p=\log_a a^p$ について

$y=a^x$ を y から x へ対応させたのが $x=\log_a y$ であることから，

$-p=\log_a a^{-p}$， $0=\log_a 1$， $1=\log_a a$， $p=\log_a a^p$ 　の関係が成り立つ。



対数の性質 その **2**

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$，$\log_a M^k = k\log_a M$ について

$y = a^x$ を y から x へ対応させたのが $x = \log_a y$ であることから，

$p = \log_a a^p$，$q = \log_a a^q$，$p + q = \log_a a^{p+q} = \log_a a^p a^q$，$p - q = \log_a a^{p-q} = \log_a \dfrac{a^p}{a^q}$

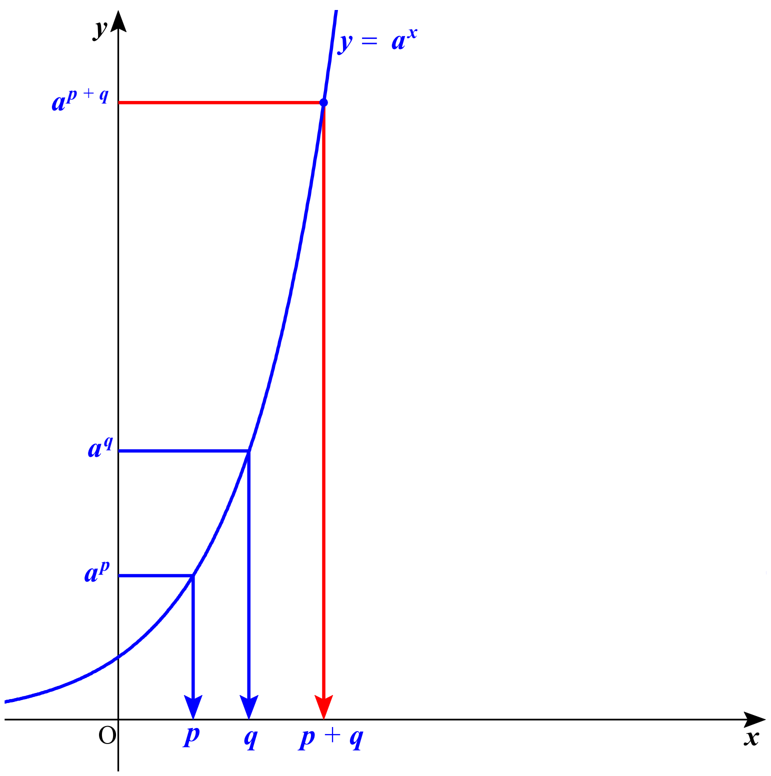
ここで，$a^p = M$，$a^q = N$ とおくと，

それぞれの式は $p = \log_a M$，$q = \log_a N$，$p + q = \log_a MN$，$p - q = \log_a \dfrac{M}{N}$ となるから，

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ の関係が成り立つ。

また，$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ より，

$$\begin{aligned}
\log_a M^k &= \log_a M^{k-1}M \\
&= \log_a M^{k-1} + \log_a M \\
&= \log_a M^{k-2}M + \log_a M \\
&= \log_a M^{k-2} + \log_a M + \log_a M \\
&\ \ \vdots \\
&= \log_a M + \cdots + \log_a M \\
&= k\log_a M
\end{aligned}$$



底の変換公式：**$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$** について

$M = a^p$ とすると， $p = \log_a M$ ・・・①

$\log_b M = \log_b a^p = p\log_b a \quad \therefore p = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ ・・・②

①，②より， $\log_a M == \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

354

コツ：底の変換公式を使って底をそろえる。

(1)

$$\text{与式}=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 7}$$
$$=\log_2 8$$
$$=\log_2 2^3$$
$$=3\log_2 2$$
$$=3\cdot 1$$
$$=3$$

(2)

$$\text{与式}=\left(\log_2 3^2+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$$
$$=\left(2\log_2 3+\frac{\log_2 3}{\log_2 2^3}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3^2}\right)$$
$$=\left(2\log_2 3+\frac{\log_2 3}{3\log_2 2}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{2\log_2 2}{2\log_2 3}\right)$$
$$=\left(2\log_2 3+\frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 3}\right)$$
$$=\frac{7}{3}\log_2 3\cdot\frac{2}{\log_2 3}$$
$$=\frac{14}{3}$$

(3)

$$\text{与式}=\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 25}{\log_2 9}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 5}$$
$$=\frac{\log_2 3}{\log_2 2^2}\cdot\frac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2}\cdot\frac{\log_2 2^3}{\log_2 5}$$
$$=\frac{\log_2 3}{2\log_2 2}\cdot\frac{2\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\frac{3\log_2 2}{\log_2 5}$$
$$=\frac{3}{2}$$

(4)

解法例 1

$$\text{与式} = \log_2 10 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 5} - \left(\log_2 5 + \frac{\log_2 2}{\log_2 5}\right)$$
$$= \frac{(\log_2 10)^2}{\log_2 5} - \frac{(\log_2 5)^2 + \log_2 2}{\log_2 5}$$
$$= \frac{(\log_2 5 \cdot 2)^2}{\log_2 5} - \frac{(\log_2 5)^2 + 1}{\log_2 5}$$
$$= \frac{(\log_2 5 + \log_2 2)^2 - (\log_2 5)^2 - 1}{\log_2 5}$$
$$= \frac{(\log_2 5 + 1)^2 - (\log_2 5)^2 - 1}{\log_2 5}$$
$$= \frac{2\log_2 5}{\log_2 5}$$
$$= 2$$

解法例 2

$$\text{与式} = \log_2(5 \cdot 2) \cdot \log_5(2 \cdot 5) - (\log_2 5 + \log_5 2)$$
$$= (\log_2 5 + \log_2 2)(\log_5 2 + \log_5 5) - (\log_2 5 + \log_2 5)$$
$$= (\log_2 5 + 1)(\log_5 2 + 1) - (\log_2 5 + \log_5 2)$$
$$= \log_2 5 \cdot \log_5 2 + 1$$
$$= \frac{\log_2 5}{\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} + 1$$
$$= 2$$

355

(1)

$$\text{与式} = \log_2(3 \cdot 5)$$
$$= \log_2 3 + \log_2 5$$
$$= a + b$$

(2)

$$\text{与式} = \log_2(3 \cdot 5^2)$$
$$= \log_2 3 + \log_2 5^2$$
$$= \log_2 3 + 2\log_2 5$$
$$= a + 2b$$

(3)

$$\text{与式} = \log_2(5 \cdot 2)$$
$$= \log_2 5 + \log_2 2$$
$$= b + 1$$

(4)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \frac{\log_2 45}{\log_2 4} \\
&= \frac{\log_2 (3^2 \cdot 5)}{\log_2 2^2} \\
&= \frac{\log_2 3^2 + \log_2 5}{2\log_2 2} \\
&= \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{2} \\
&= \log_2 3 + \frac{\log_2 5}{2} \\
&= a + \frac{b}{2}
\end{aligned}
$$

356

(1)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \log_a x + \log_a y + \log_a z \\
&= p + q + r
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \log_a x^2 + \log_a y^3 + \log_a z^4 \\
&= 2\log_a x + 3\log_a y + 4\log_a z \\
&= 2p + 3q + 4r
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \log_a x - \log_a (y^2 z^2) \\
&= \log_a x - (\log_a y^2 + \log_a z^2) \\
&= \log_a x - (2\log_a y + 2\log_a z) \\
&= p - (2q + 2r) \\
&= p - 2q - 2r
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
与式 &= \log_a x\sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z} \\
&= \log_a xy^{\frac{1}{2}} - \log_a z^{\frac{1}{3}} \\
&= \log_a x + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\log_a z \\
&= \log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z \\
&= p + \frac{q}{2} - \frac{r}{3}
\end{aligned}
$$

357

$\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 5}{a} \quad \therefore \log_2 5 = ab$

よって,

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{\log_2 80}{\log_2 20} \\
&= \frac{\log_2 (2^4 \cdot 5)}{\log_2 (2^2 \cdot 5)} \\
&= \frac{\log_2 2^4 + \log_2 5}{\log_2 2^2 + \log_2 5} \\
&= \frac{4\log_2 2 + \log_2 5}{2\log_2 2 + \log_2 5} \\
&= \frac{4 + ab}{2 + ab}
\end{aligned}
$$

358

$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

より,

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \log_{16}\left\{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\} \\
&= \log_{16} 2\sqrt{2} \\
&= \log_{16} 2^{\frac{3}{2}} \\
&= \log_{2^4}\left\{\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \log_{2^4}\left(2^4\right)^{\frac{3}{8}} \\
&= \frac{3}{8}\log_{2^4} 2^4 \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

あるいはオーソドックスに底の変換公式を利用して,

$$
\text{与式} = \log_{16}\left\{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\} = \log_{16} 2\sqrt{2} = \log_{16} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 16} = \frac{\frac{3}{2}\log_2 2}{\log_2 2^4} = \frac{\frac{3}{2}}{4\log_2 2} = \frac{3}{8}
$$

359　数学Ⅲの微積の計算処理で重宝されるテクニック

ポイント

$$M = a^{\boxed{\log_a M}} \longrightarrow \log_a M$$

指数の底が a ならば対数の底も a である。

つまり，指数の底と対数の底は同じ。

解説

$M = a^p$　・・・①とする。

底を a とする対数をとると，$\log_a M = \log_a a^p$　$\therefore \log_a M = p$　・・・②

②を①に代入することにより，$M = a^{\log_a M}$

(1)

$a^{\log_a M} = M$ より，$5^{\log_5 7} = 7$

補足

$M = 5^{\log_5 7}$ とすると，$\log_5 M = \log_5 5^{\log_5 7}$　$\therefore \log_5 M = \log_5 7$

ゆえに，$5^{\log_5 7'} = 7$

(2)

$$\begin{aligned} 与式 &= 10 \cdot 10^{\log_{10} 3} \\ &= 10 \cdot 3 \\ &= 30 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 与式 &= \left(6^2\right)^{\log_6 \sqrt{5}} \\ &= 6^{2\log_6 \sqrt{5}} \\ &= 6^{\log_6 \left(\sqrt{5}\right)^2} \\ &= 6^{\log_6 5} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} 与式 &= a^{\log_a x^2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} 与式 &= a^{\log_a x^{-1}} \\ &= x^{-1} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

360

$2^x = 5^y = 10^{\frac{z}{2}}$ について，底を 2 とする対数をとり，その値を k とすると，

$x = y\log_2 5 = \frac{z}{2}\log_2 10 = k$

よって，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{k}+\frac{\log_2 5}{k}$$
$$=\frac{\log_2 2+\log_2 5}{k}$$
$$=\frac{\log_2 10}{k}$$
$$=\frac{2}{z}$$