

指数関数と対数関数 5 常用対数

「対数の威力は煩雑な乗除を単純な加減にできることである」をもここで学び、これを脳裏に焼き付けよう。

はじめに：桁数に関する問題の解き方のまとめ

1. 正の数 N の整数部分が n 桁

$$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n \Leftrightarrow n-1 \leq \log_{10} N < n$$

解説

N の桁数	N の範囲
1	$10^0 \leq N < 10^1$
2	$10^1 \leq N < 10^2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$10^{n-1} \leq N < 10^n$

2. 正の数 N の整数部分が n 桁で、最高位の数が m

$$\Leftrightarrow m \times 10^{n-1} \leq N < (m+1) \times 10^{n-1} \Leftrightarrow (n-1) + \log_{10} m \leq \log_{10} N < (n-1) + \log_{10} (m+1)$$

3. 正の数 N が小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れる

$$\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1} \Leftrightarrow -n \leq \log_{10} N < -n+1$$

解説

N の小数点以下の位	N の範囲
1	$10^{-1} \leq N < 10^0$
2	$10^{-2} \leq N < 10^{-1}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$

4. a^n (a は自然数) の一の位の数を求める方法

a^{p+1} の一の位の数と a^p の一の位の数に a をかけた数の一の位は明らかに等しいから、これを利用して、一の位を $a^1, a^2, \dots$ と順に求めていったとき、 a^{m+1} の一の位の数と a^1 の一の位の数一致したとする。

すると、帰納的に

a^{m+2} の一の位の数と a^2 の一の位の数一致する。

a^{m+3} の一の位の数と a^3 の一の位の数一致する。

$\vdots$

a^{m+m} の一の位の数と a^m の一の位の数一致する。

a^{m+m+1} の一の位の数と a^1 の一の位の数一致する。

a^{m+m+2} の一の位の数と a^2 の一の位の数一致する。

a^{m+m+3} の一の位の数と a^3 の一の位の数一致する。

$\vdots$

となる。

つまり、同じ一の位の数が周期 m で繰り返される。

よって、 a^n の指数 n の値を $mk, mk+1, mk+2, \dots, mk+(m-1)$ でグループ分けすると、同じグループに属する数は同一の一の位の数をもつ。

たとえば、 7^{2014} の一の位の数を求めるのであれば、

7^p の一の位の数に 7 をかけることにより、 7^{p+1} の一の位の数を求めていけばよいから、

$$\begin{array}{cccccc} 7^m & 7^1 & 7^2 & 7^3 & 7^4 & 7^5 \\ \text{一の位の数} & 7 & 9 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

より、7,9,3,1 が繰り返される。繰り返し周期が 4 だから、これを一般化すると、

$$\begin{array}{cccccc} 7^n & 7^{4m} & 7^{4m+1} & 7^{4m+2} & 7^{4m+3} & \\ \text{一の位の数} & 1 & 3 & 9 & 7 & (m=0,1,2,3,\dots) \end{array}$$

これと $7^{2014} = 7^{4 \cdot 503 + 2}$ より、 7^{2014} の一の位の数は 9 となる。

5. a^n (a は自然数) の下 2 桁の数を求める方法

$a^1, a^2, a^3, \dots$ と調べ、数学的帰納法で証明する。

383

少数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れるとし、整数 n の値を求めることにする。

(1)

$$\begin{aligned}
 10^{-n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{100} < 10^{-n+1} &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} 2^{-100} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq -100 \log_{10} 2 < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow n-1 < 100 \log_{10} 2 \leq n
 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \text{ より, } n-1 < 30.10 \leq n \quad \therefore 30.10 \leq n < 31.10 \quad \text{ゆえに, 整数 } n = 31$$

(2)

$$\begin{aligned}
 10^{-n} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{25}} < 10^{-n+1} &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{25} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} (\sqrt{2})^{-25} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} 2^{-\frac{25}{2}} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq -\frac{25}{2} \log_{10} 2 < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow 2(n-1) < 25 \log_{10} 2 \leq 2n \\
 &\Leftrightarrow 8(n-1) < 100 \log_{10} 2 \leq 8n
 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \text{ より, } 8(n-1) < 30.10 \leq 8n \quad \therefore \frac{30.10}{8} \leq n < 1 + \frac{30.10}{8} \quad \text{ゆえに, 整数 } n = 4$$

(3)

$$\begin{aligned}
 10^{-n} \leq \sqrt[3]{(0.06)^{10}} < 10^{-n+1} &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} (0.06)^{\frac{10}{3}} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} (6 \cdot 10^{-2})^{\frac{10}{3}} < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \frac{10}{3} (\log_{10} 6 + \log_{10} 10^{-2}) < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq \frac{10}{3} (\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 2) < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow -n \leq -\frac{10}{3} (2 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -n+1 \\
 &\Leftrightarrow 3(n-1) < 10(2 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3) \leq 3n
 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ より, } 3(n-1) < 10(2 - 0.3010 - 0.4771) \leq 3n$$

$$\therefore \frac{12.219}{3} \leq n < 1 + \frac{12.219}{3} \quad \text{ゆえに, 整数 } n = 5$$

384

(1)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0.0001 \Leftrightarrow 3^{-n} < 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 3^{-n} < -4$$

$$\Leftrightarrow -n \log_{10} 3 < -4$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} 3 > 4$$

$$\log_{10} 3 = 0.4771 \text{ より, } n > \frac{4}{0.4771} \approx 8.3$$

よって, 最小の整数 $n = 9$

(2)

$$10^2 \leq 2.25^n < 10^3 \text{ より,}$$

$$2 \leq \log_{10} 2.25^n < 3 \Leftrightarrow 2 \leq n \log_{10} 2.25 < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq n \log_{10} 1.5^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq n \log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2n \log_{10} \frac{3}{2} < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2n(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \leq n < \frac{3}{2(\log_{10} 3 - \log_{10} 2)}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ より, } \frac{1}{0.1761} \leq n < \frac{3}{2 \cdot 0.1761}$$

よって, 整数 $n = 6, 7, 8$

385

$$10^9 \leq N^{10} < 10^{10} \text{ より, } 9 \leq 10 \log_{10} N < 10 \quad \therefore \log_{10} 7 < 0.9 \leq \log_{10} N < 1 = \log_{10} 10$$

$$\text{これと } \log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030, \log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3 = 0.9542 \text{ より,}$$

$$N = 8, 9$$

386

$$\begin{aligned}
 10(1.05)^x > 15 &\Leftrightarrow (1.05)^x > \frac{3}{2} \\
 &\Leftrightarrow \log_{10}(1.05)^x > \log_{10} \frac{3}{2} \\
 &\Leftrightarrow x \log_{10} 1.05 > \log_{10} 3 - \log_{10} 2
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 1.05 &= \log_{10}(105 \cdot 10^{-2}) \\
 &= \log_{10} 105 + \log_{10} 10^{-2} \\
 &= \log_{10} \frac{210}{2} - 2 \\
 &= \log_{10} \frac{3 \cdot 7 \cdot 10}{2} - 2 \\
 &= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 + 1 - \log_{10} 2 - 2 \\
 &= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 1 \\
 &= 0.4771 + 0.8451 - 0.3010 - 1 \\
 &= 0.0212
 \end{aligned}$$

より,

$$x > \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} = \frac{0.4771 - 0.3010}{0.0212} = \frac{0.1761}{0.0212} \approx 8.3$$

よって, 9 年後

補足

繁雑な掛け算や割り算も対数をとれば足し算や引き算になるので
計算処理を軽減できる。これが対数の威力である。

387

1 枚で残る花粉の割合は 0.3 だから,

n 枚のフィルターで除去したとき残る花粉の割合は 0.3^n

よって, 満たすべき条件は $0.3^n < 1 - 0.9999$

$$\begin{aligned}
 0.3^n < 1 - 0.9999 &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^n < 0.0001 \\
 &\Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{3}{10}\right)^n < -4 \\
 &\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{3}{10} < -4 \\
 &\Leftrightarrow n(\log_{10} 3 - 1) < -4 \\
 &\Leftrightarrow n(1 - \log_{10} 3) > 4
 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 3 = 0.4771 \text{ より, } n > \frac{4}{0.5229} \approx 7.6 \quad \text{よって 8 枚}$$

388

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 1.4 &= \log_{10} \frac{14}{10} \\
 &= \log_{10} 14 - \log_{10} 10 \\
 &= \log_{10} (2 \cdot 7) - 1 \\
 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 7 - 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \log_{10} 2 + \log_{10} 7 = 1.146 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 1.8 &= \log_{10} \frac{18}{10} \\
 &= \log_{10} 18 - \log_{10} 10 \\
 &= \log_{10} (2 \cdot 3^2) - 1 \\
 &= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 - 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 = 1.255 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2.1 &= \log_{10} \frac{21}{10} \\
 &= \log_{10} 21 - \log_{10} 10 \\
 &= \log_{10} (3 \cdot 7) - 1 \\
 &= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \log_{10} 3 + \log_{10} 7 = 1.322 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③の連立方程式を解くことにより, $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 7 = 0.845$

また, これより, $\log_{10} 63 = \log_{10} (3^2 \cdot 7) = 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 7 = 1.799$

389

(1)

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると, $\log_2 3 > \log_2 1 = 0$ より,

適当な互いに素な自然数 p, q を用いて, $\log_2 3 = \frac{q}{p}$ と表せる。

よって, $\log_2 3 = \frac{q}{p} \Leftrightarrow 3 = 2^{\frac{q}{p}}$ より, $3^p = 2^q$ が成り立つ。

ところが, 3^p と 2^q は共通な素因数にもたないから, 3^p と 2^q は互いに素である。

これは $3^p = 2^q$ が成り立つことと矛盾する。

(あるいは 3^p は奇数, 2^q は偶数である。これは $3^p = 2^q$ が成り立つことと矛盾する。)

よって, $\log_2 3$ は有理数でない。すなわち, 無理数である。

(2)

$$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = 1 + \log_2 3 \quad \therefore \log_2 3 = \log_2 6 - 1$$

ここで, $\log_2 6$ が有理数であると仮定すると, 右辺は有理数である。

ところが左辺は無理数だから, 矛盾する。よって, $\log_2 6$ は無理数である。

(3)

$$\log_6 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 6} = \frac{2}{\log_2 6}$$

ここで、 $\log_6 4$ が有理数 r であると仮定すると、 $r = \frac{2}{\log_2 6}$ より、 $\log_2 6 = \frac{2}{r}$

右辺は有理数、ところが左辺は無理数だから、矛盾する。

よって、 $\log_6 4$ は無理数である。