微分法と積分法 2　導関数

400

(1)

$f'(x)=2x-1$ より，$f'(a)=2a-1$

$2a-1=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ より，$2a-1=\dfrac{2-0}{1}$　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

(2)

$f'(x)=3x^2-2x$ より，$f'(a)=3a^2-2a$

$3a^2-2a=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ より，$3a^2-2a=\dfrac{5-1}{1}$　$\therefore 3a^2-2a-4=0$

ゆえに，$a=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

401

$f'(x)=2x-3$ より，$f'(b)=2b-3$

$2b-3=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}$ より，$2b-3=\dfrac{a^2-3a-(-2)}{a-1}$

$$\therefore 2b-3=\frac{(a-1)(a-2)}{a-1}=a-2$$

ゆえに，$b=\dfrac{a+1}{2}$

402

(1)

$$y'=2\cdot 2(2x+1)=4(2x+1)$$

(2)

$$y'=3\cdot 1(x-1)^2=3(x-1)^2$$

(3)

$$y'=3\cdot(-2)(-2x+1)^2=-6(-2x+1)^2$$

403

(1)

$S=4\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 60°=\sqrt{3}x^2$

(2)

$S(x)=\sqrt{3}x^2$ とすると，$S'(x)=2\sqrt{3}x$　$\therefore S'(5)=10\sqrt{3}$

404

(1)

$f(x)=ax^2+bx+c$ （$a\neq0$）とおくと，$f'(x)=2ax+b$

これらを与えられた等式に代入すると，$ax^2+bx+c+(x+2)(2ax+b)=9x^2+8x-3$

左辺を x について整理すると，$3ax^2+2(2a+b)x+2b+c=9x^2+8x-3$

これが x についての恒等式であるから，$3a=9,\ 2(2a+b)=8,\ 2b+c=-3$

これを解くと，$a=3,\ b=-2,\ c=1$

よって，$f(x)=3x^2-2x+1$

(2)

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ （$a\neq0$）とおくと，$g'(x)=3ax^2+2bx+c$

これらを与えられた等式に代入すると，

$ax^3+bx^2+cx+d+x(3ax^2+2bx+c)=4x^3+6x^2+4x+1$

左辺を x について整理すると，$4ax^3+3bx^2+2cx+d=4x^3+6x^2+4x+1$

これが x についての恒等式であるから，$4a=4,\ 3b=6,\ 2c=4,\ d=1$

これを解くと，$a=1,\ b=2,\ c=2,\ d=1$

よって，$g(x)=x^3+2x^2+2x+1$

405

$f(x)$ の最高次の項を ax^n （$a\neq0$），$n-1$ 次以下の部分の整式を $g(x)$ とすると，

$f(x)=ax^n+g(x)$ と表せる。また，これより $f'(x)=nax^{n-1}+g'(x)$

これらを(B)に代入すると，$(x+1)(nax^{n-1}+g'(x))=2(ax^n+g(x))-4$

よって，$nax^n+nax^{n-1}+xg'(x)+g'(x)=2ax^n+2g(x)-4$

これが x についての恒等式であるから，最高次の項について $na=2a$（$a\neq0$）が成り立つ。

よって，$n=2$

ゆえに，$f(x)$ は 2 次式である。

そこで，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，(A)より $f(0)=0$ だから，$f(0)=c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$　また，これより $f'(x)=2ax+b$

これらを(B)に代入すると，

$(x+1)(2ax+b)=2(ax^2+bx)-4$　$\therefore 2ax^2+(2a+b)x+b=2ax^2+2bx-4$

これが x についての恒等式であるから，$2a+b=2b,\ b=-4$

これを解くと，$a=-2,\ b=-4$　$\therefore f(x)=-2x^2-4x$