

微分法と積分法 3 接線 接線問題は「接点から始める」が原則

407

(1)

 $y = f(x) = x^2 + 3x + 4$, 接点の座標を $(t, t^2 + 3t + 4)$ とすると,接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + t^2 + 3t + 4$ これと $f'(t) = 2t + 3$ より, $y = (2t + 3)x - t^2 + 4$ これが $(x, y) = (0, 0)$ を満たすから, $0 = -t^2 + 4 \quad \therefore t = \pm 2$ $t = -2$ のとき接線の方程式: $y = -x$ 接点の座標: $(-2, 2)$ $t = 2$ のとき接線の方程式: $y = 7x$ 接点の座標: $(2, 14)$

(2)

 $y = f(x) = x^2 - x + 3$, 接点の座標を $(t, t^2 - t + 3)$ とすると,接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + t^2 - t + 3$ これと $f'(t) = 2t - 1$ より, $y = (2t - 1)x - t^2 + 3$ これが $(x, y) = (1, -1)$ を満たすから, $-1 = -t^2 + 2t + 2 \quad \therefore (t + 1)(t - 3) = 0$ これを解くと, $t = -1, 3$ $t = -1$ のとき接線の方程式: $y = -3x + 2$ 接点の座標は $(-1, 5)$ $t = 3$ のとき接線の方程式: $y = 5x - 6$ 接点の座標: $(3, 9)$

(3)

 $y = f(x) = x^3 + 2$, 接点の座標を $(t, t^3 + 2)$ とすると,接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + t^3 + 2$ これと $f'(t) = 3t^2$ より, $y = 3t^2x - 2t^3 + 2$ これが $(x, y) = (0, 4)$ を満たすから, $4 = -2t^3 + 2 \quad \therefore t = -1$ ゆえに, 接線の方程式: $y = 3x + 4$, 接点の座標は $(-1, 1)$

408

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$, 接点の座標を $(t, t^3 + 3t^2 - 6)$ とすると,

接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + t^3 + 3t^2 - 6$

$$f'(t) = 3t^2 + 6t, \quad f'(t) = 9 \text{ より, } 3t^2 + 6t = 9 \quad \therefore 3(t+3)(t-1) = 0$$

これを解くと $t = -3, 1$

よって, 接点の座標は $(-3, -6), (1, -2)$

これと接線の傾きが 9 であることから,

求める接線の方程式は

$$y = 9(x + 3) - 6, \text{ すなわち } y = 9x + 21$$

$$y = 9(x - 1) + (-2), \text{ すなわち } y = 9x - 11$$

409

$$y' = -3x^2 + 4 \text{ より, } (-2, 0) \text{ における接線の傾きは } y' = -3(-2)^2 + 4 = -8$$

$$\text{よって, 接線の方程式は } y = -8\{x - (-2)\} + 0, \text{ すなわち } y = -8x - 16$$

これより, 接線と曲線の共有点の x 座標は x の方程式 $-x^3 + 4x = -8x - 16$ の,
すなわち $x^3 - 12x - 16 = 0$ の解である。

$x = -2$ はこの方程式の重解または 3 重解であるから,

組立除法または $x^3 - 12x - 16$ を $(x + 2)^2$ で割ることを利用して,

$$\text{この方程式を因数分解すると, } (x + 2)^2(x - 4) = 0$$

よって, 求める交点の x 座標は 4

410

$$y' = -4x - 4 \text{ より, 点 A における接線の傾きは } y' = -4$$

よって, 点 A を通り傾きが $\frac{1}{4}$ の直線の方程式を求めればよい。

$$\text{ゆえに, } y = \frac{1}{4}x + 3$$

411

接点の x 座標を t とすると, 接点は曲線と直線の共有点だから, $t^3 + at + 2 = 9t - 14$

$$\therefore t^3 + (a - 9)t + 16 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = f(x) = x^3 + ax + 2 \text{ とすると, 接線の傾きは } f'(t) = 3t^2 + a$$

$$\text{条件より, 接線の傾きは 9 だから, } 3t^2 + a = 9 \quad \therefore a = -3t^2 + 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して整理すると, } 2t^3 = -16 \quad \therefore t = -2$$

これを $\textcircled{2}$ に代入することにより, $a = -3$

412

(1)

曲線は点 A, B を通るから,

$$1 = d \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$4 = 27a + 9b + 3c + d \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \text{ より,}$$

点 A における接線の傾きは c , 点 B における接線の傾きは $27a + 6b + c$

条件より, 点 A における接線の傾きは 1, 点 B における接線の傾きは -2 だから,

$$c = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$27a + 6b + c = -2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } a = -\frac{1}{3}, b = 1, c = 1, d = 1$$

(2)

$$\text{放物線が点 } (1, -3) \text{ を通るから, } -3 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{放物線と曲線は点 } (2, 6) \text{ を共有するから, } 4a + 2b + c = 8 + 2d = 6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

点 $(2, 6)$ における接線の傾きが等しいことと

放物線の導関数が $y' = 2ax + b$, 曲線の導関数が $y' = 3x^2 + d$ となることから,

$$4a + b = 12 + d \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } a = 2, b = 3, c = -8, d = -1$$

413

共通接線の $y = x^2$ における接点を (t, t^2) とすると, $y' = 2x$ より,

$$\text{接線の方程式は } y = 2t(x - t) + t^2, \text{ すなわち } y = 2tx - t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが $y = -(x - 2)^2$ と接することから,

$$y = -(x - 2)^2 \text{ と } y = 2tx - t^2 \text{ の接点の } x \text{ 座標の値は } x \text{ の 2 次方程式 } -(x - 2)^2 = 2tx - t^2,$$

すなわち $x^2 + 2(t - 2)x - t^2 + 4 = 0$ の重解である。

$$\text{よって, 判別式を } D \text{ とすると, 重解条件より, } \frac{D}{4} = (t - 2)^2 + t^2 - 4 = 0$$

これを解くと, $t = 0, 2$

これと $\textcircled{1}$ より, $y = 0, y = 4x - 4$

414

$y = f(x) = x^2 + 2$, $y = g(x) = x^2 + ax + 3$, 交点 P の x 座標を t とすると,

$$f(t) = g(t) \text{ より, } t^2 + 2 = t^2 + at + 3 \quad \therefore at = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

接線が直交するから, $f'(t) \cdot g'(t) = -1$

$$\text{よって, } 2t(2t + a) = -1, \text{ すなわち } 4t^2 + 2at = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入し, 整理すると, } 4t^2 = 1 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

これと $\textcircled{1}$ より, $a = 2, -2$

415

接点の座標を $(t, t^3 + 3t^2 + 6t - 10)$ とすると,

$y' = 3x^2 + 6x + 6$ より, 接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 6t + 6)(x - t) + t^3 + 3t^2 + 6t - 10, \text{ すなわち } y = (3t^2 + 6t + 6)x - 2t^3 - 3t^2 - 10$$

傾きは $3t^2 + 6t + 6 = 3(t + 1)^2 + 3$ より, $t = -1$ のとき最小値 3 をとる。

よって, 接線 l の方程式は $y = 3x - 11$

曲線と接線の共有点の x 座標は方程式 $x^3 + 3x^2 + 6x - 10 = 3x - 11$ の,

すなわち $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ の解であり, 接点の x 座標が -1 だから,

-1 を重解または 3 重解にもつ。

よって, 組立除法または $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ を $(x + 1)^2$ で割ることを利用して,

この方程式を因数分解すると, $(x + 1)^3 = 0$

ゆえに, 接線 l はこの曲線と接点以外に共有点をもたない。