微分法と積分法 4　関数値の変化

419

(1)

$y'=4x^3-10x=2x(2x^2-5)$ より，$y'=0$ のとき $x=0$ または $2x^2-5=0$　$\therefore x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

これより，増減表は次のようになる。

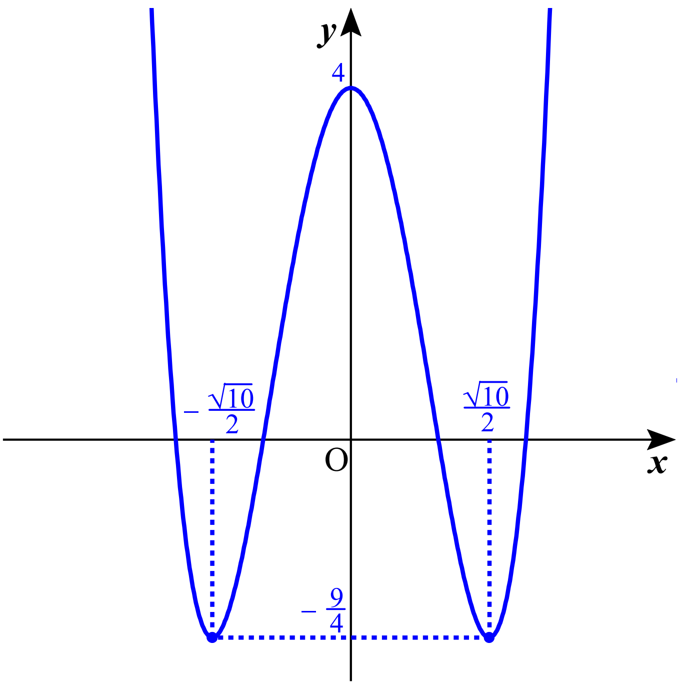
x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↓	極小値 $-\dfrac{9}{4}$	↑	極大値4	↓	極小値 $-\dfrac{9}{4}$	↑

極小値の求め方

$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ は $2x^2-5=0$ を満たすから，$x^2=\dfrac{5}{2}$

よって，

$$\begin{aligned}y&=x^4-5x^2+4\\&=(x^2)^2-5x^2+4\\&=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+4\\&=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+4\\&=-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

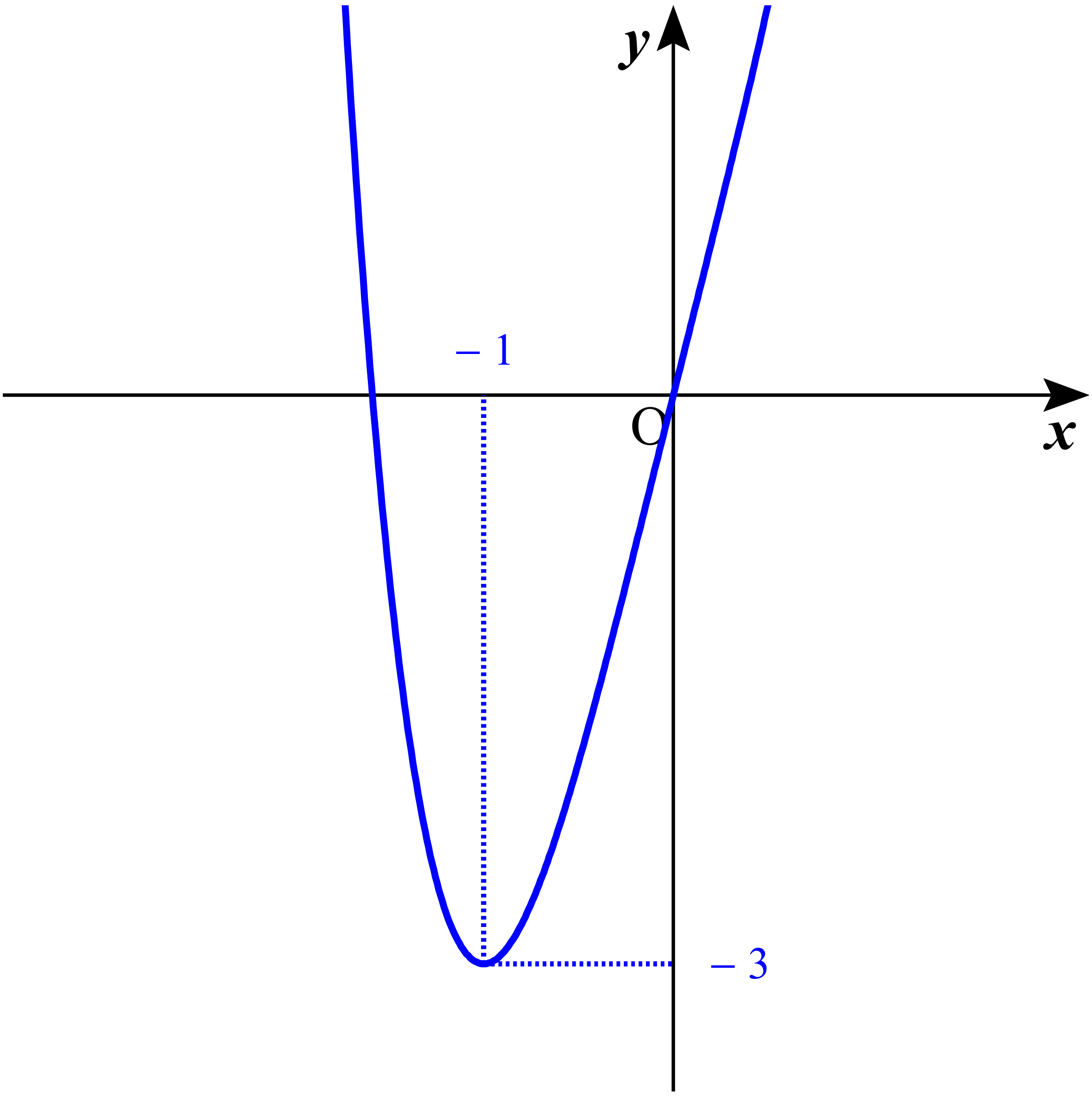


(2)

$y' = 4x^3 + 4 = 4(x+1)(x^2 - x + 1)$ より，$y' = 0$ となる実数解は $x = -1$

これより，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↓	極小値 -3	↑

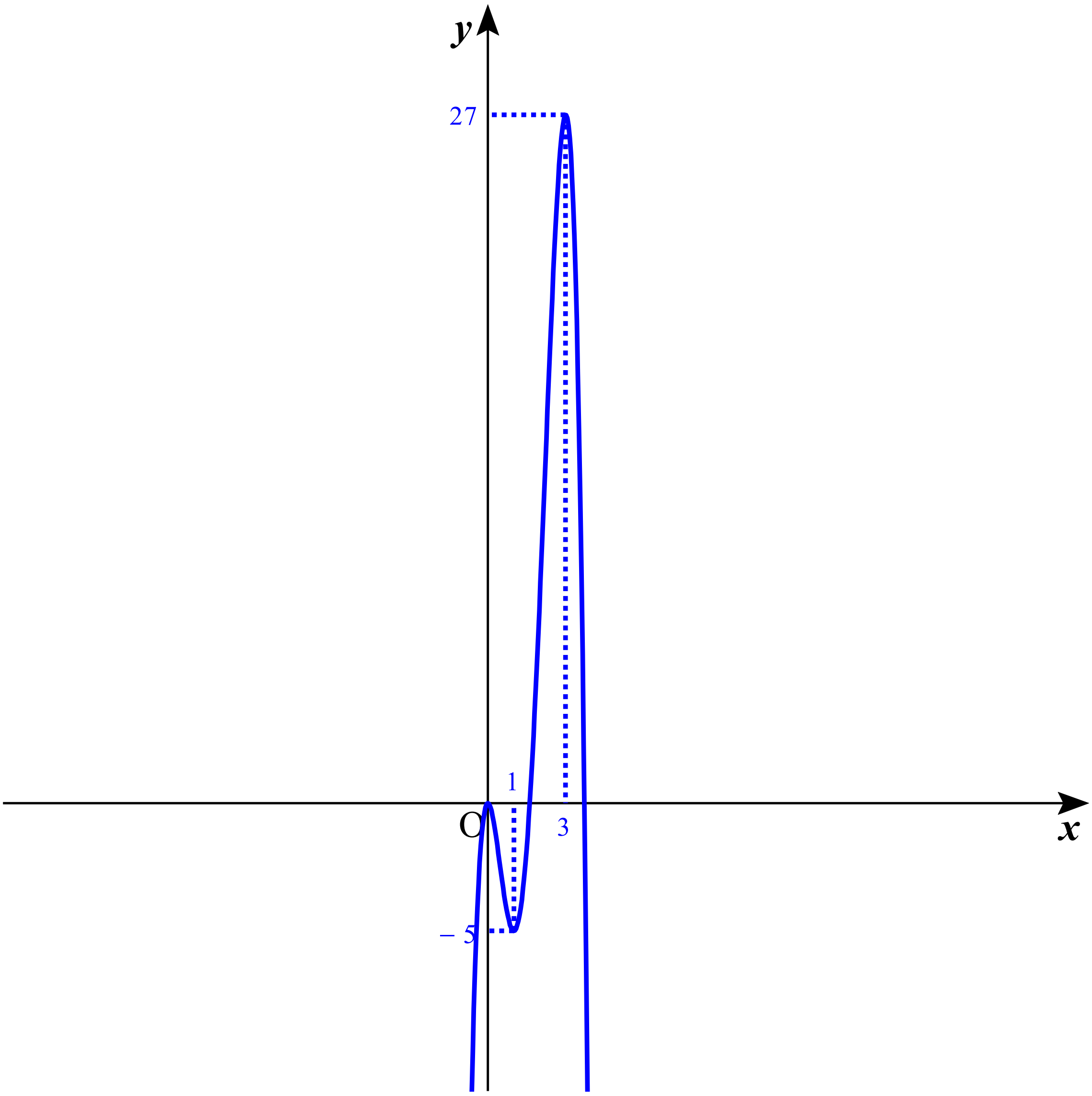


(3)

$y'=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$ より，　$y'=0$ のとき $x=0,\ 1,\ 3$

これより，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↑	極大値0	↓	極小値 -5	↑	極大値27	↓



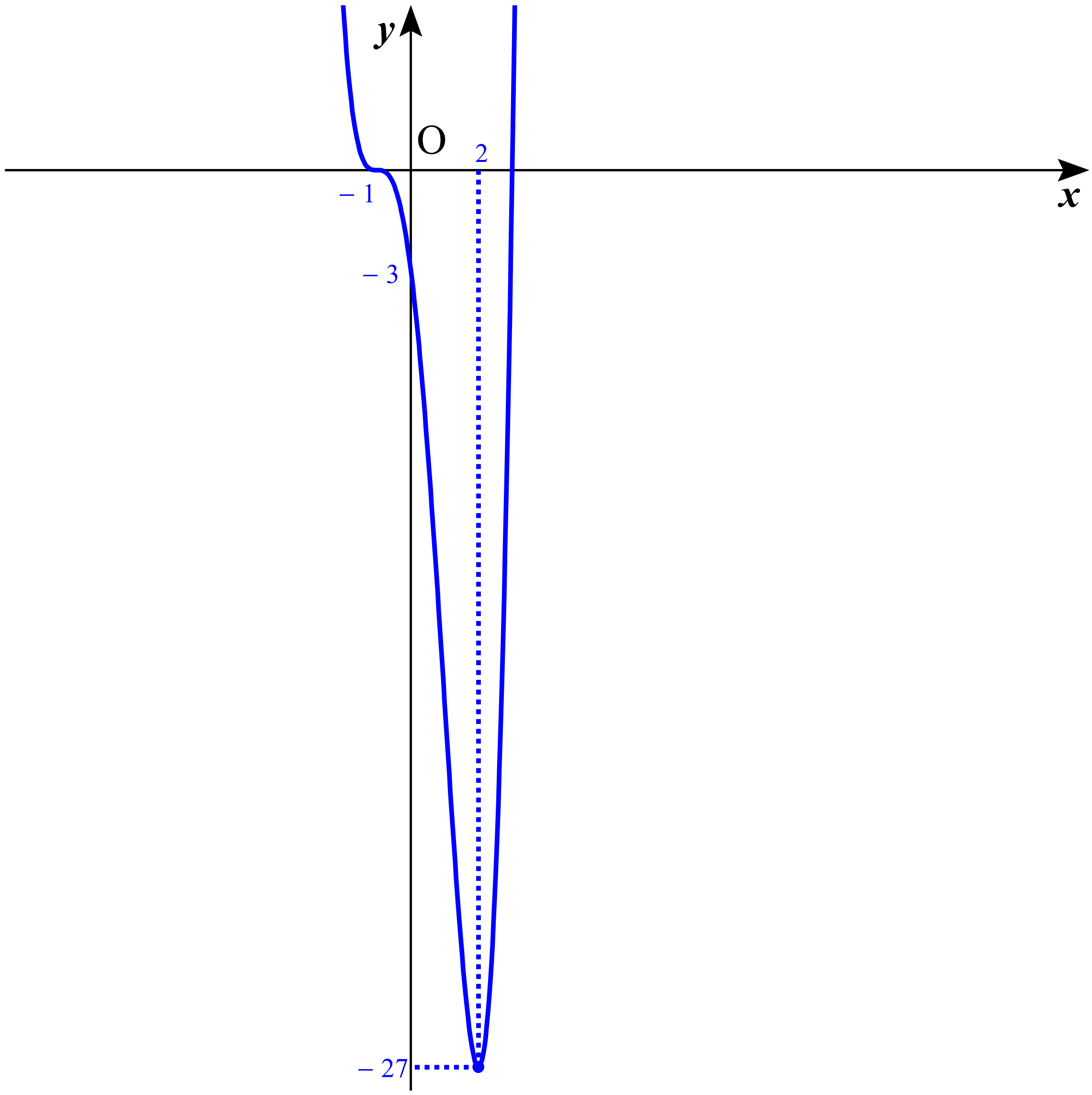
(4)

$y'=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$ より，

$y'=0$ のとき $x=0,\ 1,\ 3$

これより，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	0	$\downarrow$	極小値 -27	$\uparrow$



420

$x=3$ で極小値をとるための必要条件は $f'(3)=0$

これと $f'(x)=3x^2-6x+a$ より $27-18+a=0$　$\therefore a=-9$

ゆえに，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$　・・・①

また，$f(x)=x^3-3x^2-9x+b$

$f(3)=-26$ より，$27-27-27+b=-26$　$\therefore b=1$

ゆえに，$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$　・・・②

①，②より，$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	6	↓	-26	↑

これより，$x=3$ で極小値 -26 をとるから，

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ は条件を満たす。

よって，$a=-9,\ b=1$ また $f(x)$ は $x=-1$ のとき極大値 6 をとる。

421

解法 1（略解）

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であり，

$f'(x)=0$ の解，すなわち $3x^2+2ax+b=0$ の解が $x=-1,\ 5$ であることから，

解と係数の関係より，

$$-1+5=-\frac{2a}{3}\quad \therefore a=-6$$

$$-1\cdot 5=\frac{b}{3}\quad \therefore b=-15$$

よって，$f(x)=x^3-6x^2-15x+c$

これと $f(-1)=34$ より，$-1-6+15+c=34$　$\therefore c=26$

これより，$f(x)=x^3-6x^2-15x+26$

逆に，$f(x)=x^3-6x^2-15x+26$ は $x=-1$ で極大値 34 をとり，$x=5$ で極小値 -74 をとる。

ゆえに，$a=-6,\ b=-15,\ c=26,\ d=-74$

解法 2（略解）

$x=-1$ で極大値をとるための必要条件は $f'(-1)=0$

これと $f'(x)=3x^2+2ax+b$ より，$3-2a+b=0$　$\therefore 2a-b=3$　・・・①

また，$f(-1)=34$ より，$-1+a-b+c=34$　$\therefore a-b+c=35$　・・・②

$x=5$ で極大値をとるための必要条件は $f'(5)=0$

これと $f'(x)=3x^2+2ax+b$ より，$75+10a+b=0$　$\therefore 10a+b=-75$　・・・③

また，$f(5)=d$ より，$125+25a+5b+c=d$　・・・④

①，②，③の連立方程式を解くと，$a=-6,\ b=-15,\ c=26$

これらを④に代入すると，$d=-74$

逆に，$f(x)=x^3-6x^2-15x+26$ は $x=3$ で極大値 34 をとり，$x=5$ で極小値 -74 をとる。

ゆえに，$a=-6,\ b=-15,\ c=26,\ d=-74$

422

解法 1（略解）

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とすると，$x=1,\ 2$ で極値をとるから $f'(1)=f'(2)=0$

これと $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ より，

$3a+2b+c=0$　・・・①　$12a+4b+c=0$　・・・②

また，$f(1)=6$ より，$a+b+c+d=6$　・・・③

$f(2)=5$ より，$8a+4b+2c+d=5$　・・・④

① ～ ④の連立方程式を解くと，$a=2,\ b=-9,\ c=12,\ d=1$

よって，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

逆に，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$ は与えられた条件を満たす。　$\therefore f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

解法 2　積分を利用（略解）

$x=1$ で極大値，$x=2$ で極小値をとることから，

$f'(1)=f'(2)=0$，$1<x<2$ のとき $f'(x)<0$，$x<1,\ 2<x$ のとき $f'(x)>0$

よって，$f'(x)$ は a を正の実数とすると，$f'(x)=a(x-1)(x-2)$ と表せる。

これより $f'(x)=ax^2-3ax+2a$ だから，

$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+2ax+b$（$b$ は実数）　・・・①とすると，

$f(1)=6$ より，$\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}a+2a+b=6$　$\therefore 5a+6b=36$　・・・②

$f(2)=5$ より，$\dfrac{8}{3}a-6a+4a+b=5$　$\therefore 2a+3b=15$　・・・③

②，③より，$a=6,\ b=1$

これを①に代入すると，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

逆に，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$ は与えられた条件を満たす。

よって，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

423

$y' \geq 0$ であればよい。

$y' = 3x^2 + 2(p+1)x + p^2$ の判別式を D とすると，

$y' \geq 0$ であるための必要十分条件は $D \leq 0$

すなわち，$\dfrac{D}{4} = (p+1)^2 - 3p^2 = -2p^2 + 2p + 1$ より，$2p^2 - 2p - 1 \geq 0$

よって，$p \leq \dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq p$

424

(1)

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a+2)x + 1$ より，$f'(x) = x^2 + 2ax + a + 2$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は

$f'(x) = 0$ を満たす x が存在し且つその x の前後で $f'(x)$ の正負が変わることである。

したがって，$f'(x) = x^2 + 2ax + a + 2$ では,

$x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ を満たす x の値の前後で $f'(x)$ の符号が変わればよい。

すなわち $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ が異なる 2 実数解をもてばよい。

よって，判別式を D とすると,

$D > 0,\ \dfrac{D}{4} = a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$ より，$(a+1)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -1,\ 2 < a$

(2)

$g'(x) = 3x^2 + 2ax - 3a$ において $g'(x)$ の符号が変わらない場合である。

すなわち $3x^2 + 2ax - 3a = 0$ が実数解をもたないまたは重解をもつ場合である。

よって，判別式を D とすると,

$D \leq 0,\ \dfrac{D}{4} = a^2 + 9a = a(a+9)$ より，$a(a+9) \leq 0 \quad \therefore -9 \leq a \leq 0$

425

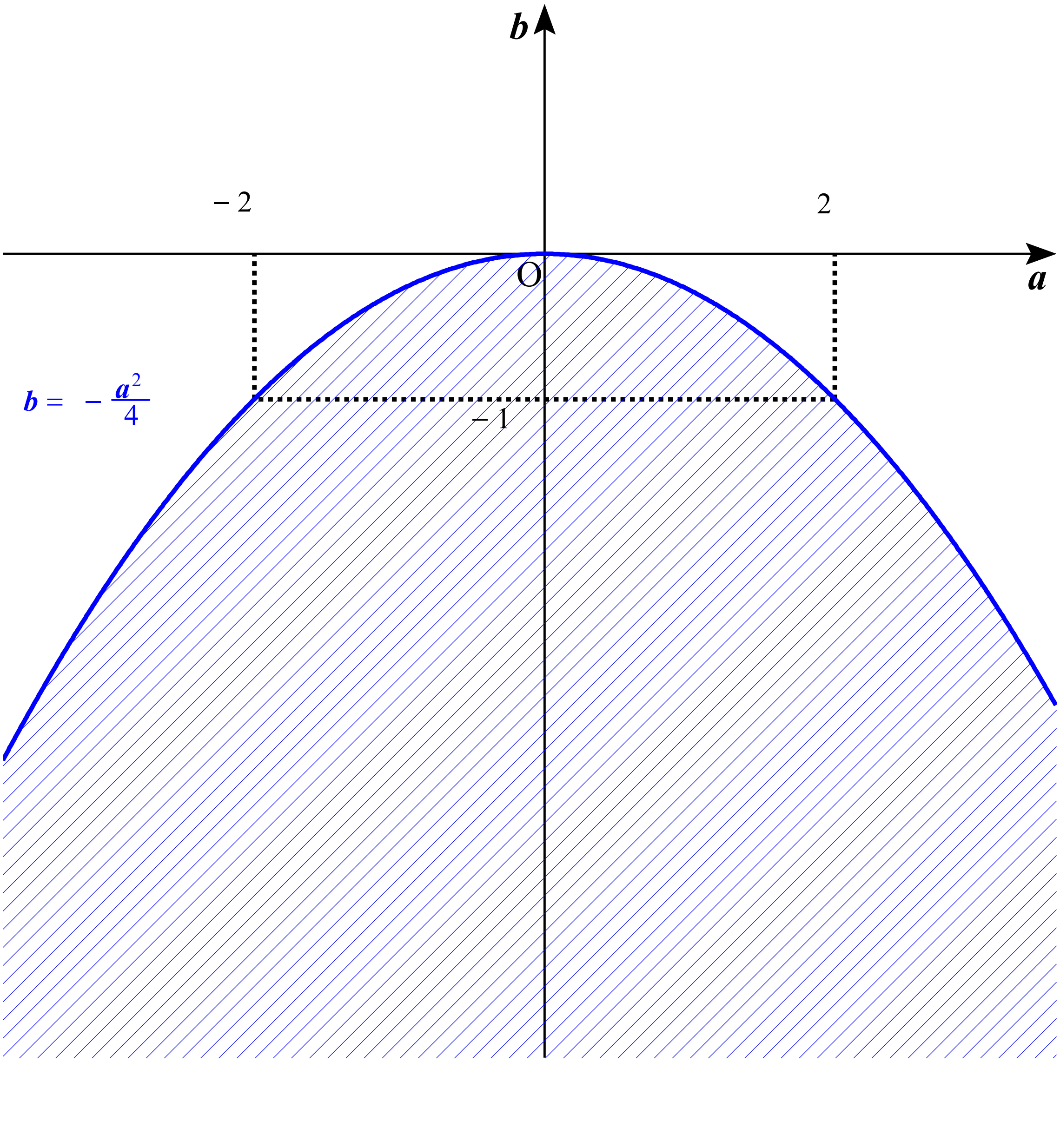
極値をもたないための必要十分条件は

$f'(x)=6x^2+6ax-6b=6(x^2+ax-b)$において $f'(x)$ の符号が変わらないことである。

すなわち $x^2+ax-b=0$ が実数解をもたないまたは重解をもつことである。

よって，判別式を D とすると，$D\leq 0,\ D=a^2+4b$ より，$a^2+4b\leq 0 \quad \therefore b\leq -\dfrac{a^2}{4}$

ゆえに，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は下図の $b=-\dfrac{a^2}{4}$ を含む斜線部である。



426

$y=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$ より， $y'=3x^2-4ax+a^2$

(1)

$3x^2-4ax+a^2=0$ の解は $\dfrac{2a\pm\sqrt{a^2}}{3}=\dfrac{2a\pm|a|}{3}=\dfrac{2a\pm(-a)}{3}=\dfrac{a}{3},\ a$

よって，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	極大値0	$\downarrow$	極小値 $\dfrac{4}{27}a^3$	$\uparrow$

(2)

$y=x^3$ より， $y'=3x^2\geq 0$

よって， y は単調に増加する。

したがって，極値は存在しない。

(3)

$3x^2-4ax+a^2=0$ の解は $\dfrac{2a\pm\sqrt{a^2}}{3}=\dfrac{2a\pm|a|}{3}=\dfrac{2a\pm a}{3}=a,\ \dfrac{a}{3}$

よって，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	極大値 $\dfrac{4}{27}a^3$	$\downarrow$	極小値0	$\uparrow$

427

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{3b-a^2}{3}$

(1)

$x=1$ で極大となるための必要十分条件は

$y=f'(x)=3x^2+2ax+b$ と x 軸との共有点が $x=1$ であり，

軸 $x=-\dfrac{a}{3}$ が $1<x$ を満たすことである。

よって， $f'(1)=3+2a+b=0$ かつ $-\dfrac{a}{3}>1$ $\quad\therefore 2a+b+3=0$ かつ $a<-3$

(2)

(1)と同様に， $x=-2$ で極小となるための必要十分条件は $f'(-2)=12-4a+b=0$ かつ

$-\dfrac{a}{3}<-2$ $\quad\therefore 4a-b-12=0$ かつ $a>6$

428

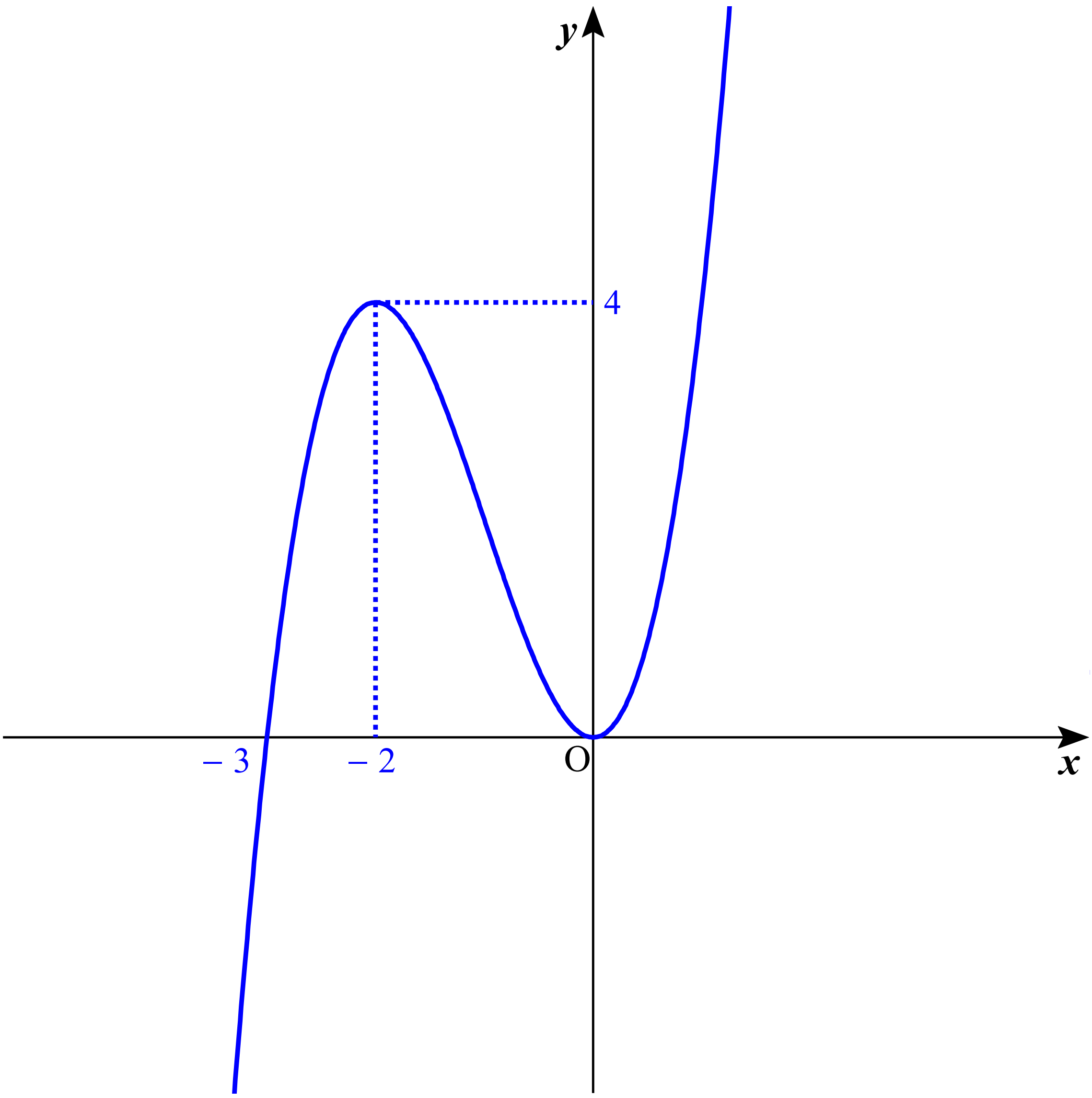
(1)

$y = x^3 + 3x^2$ とすると，$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ より，y の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	4	$\downarrow$	0	$\uparrow$

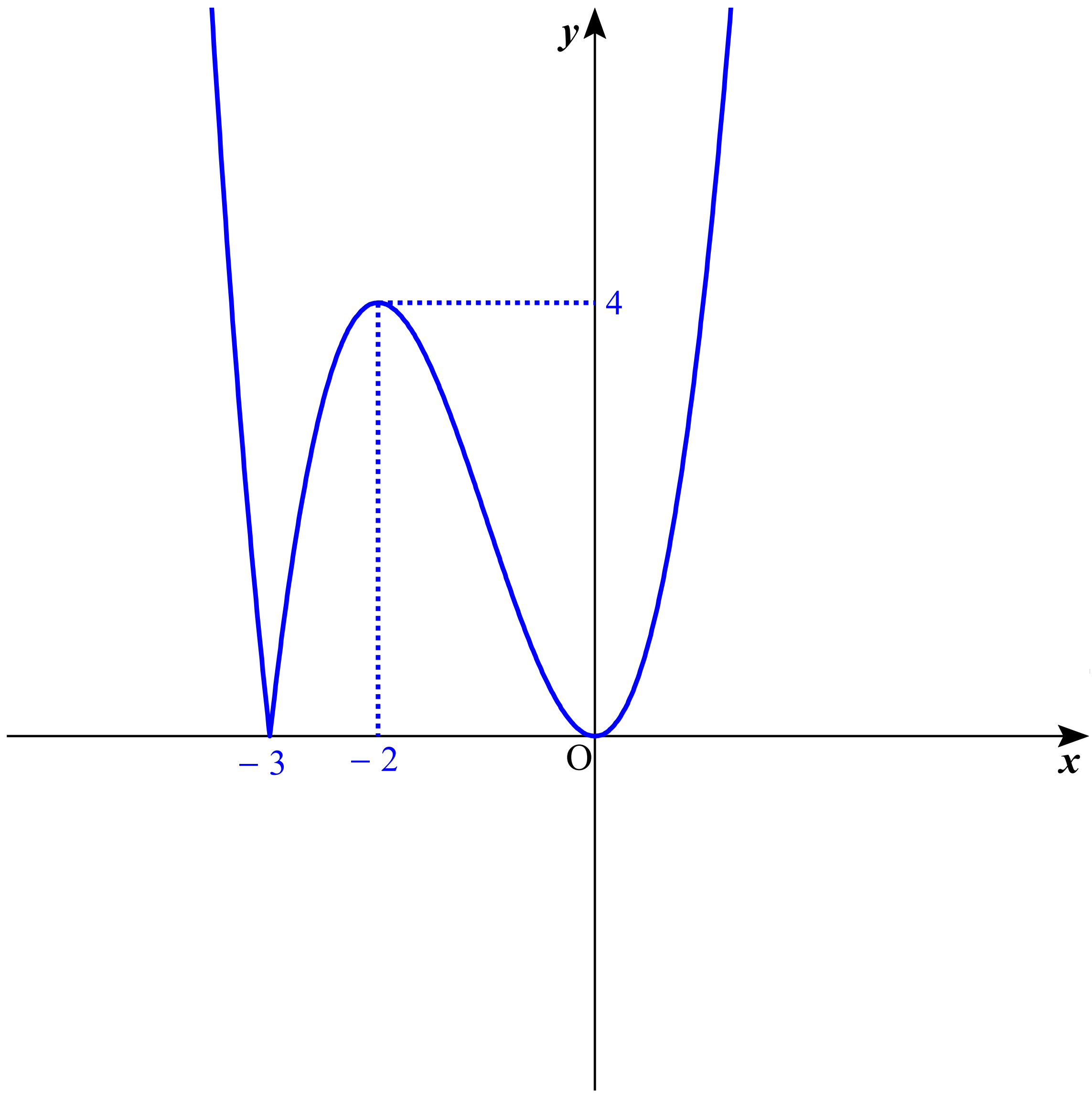
また，x 軸との共有点は $y = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$ より，$x = -3, 0$

よって，グラフは次のようになる。



したがって，$y=x^3+3x^2$ の $x\leqq -3$ の部分を x 軸に関して対称移動すれば

$y=\left|x^3+3x^2\right|$ のグラフが得られる。

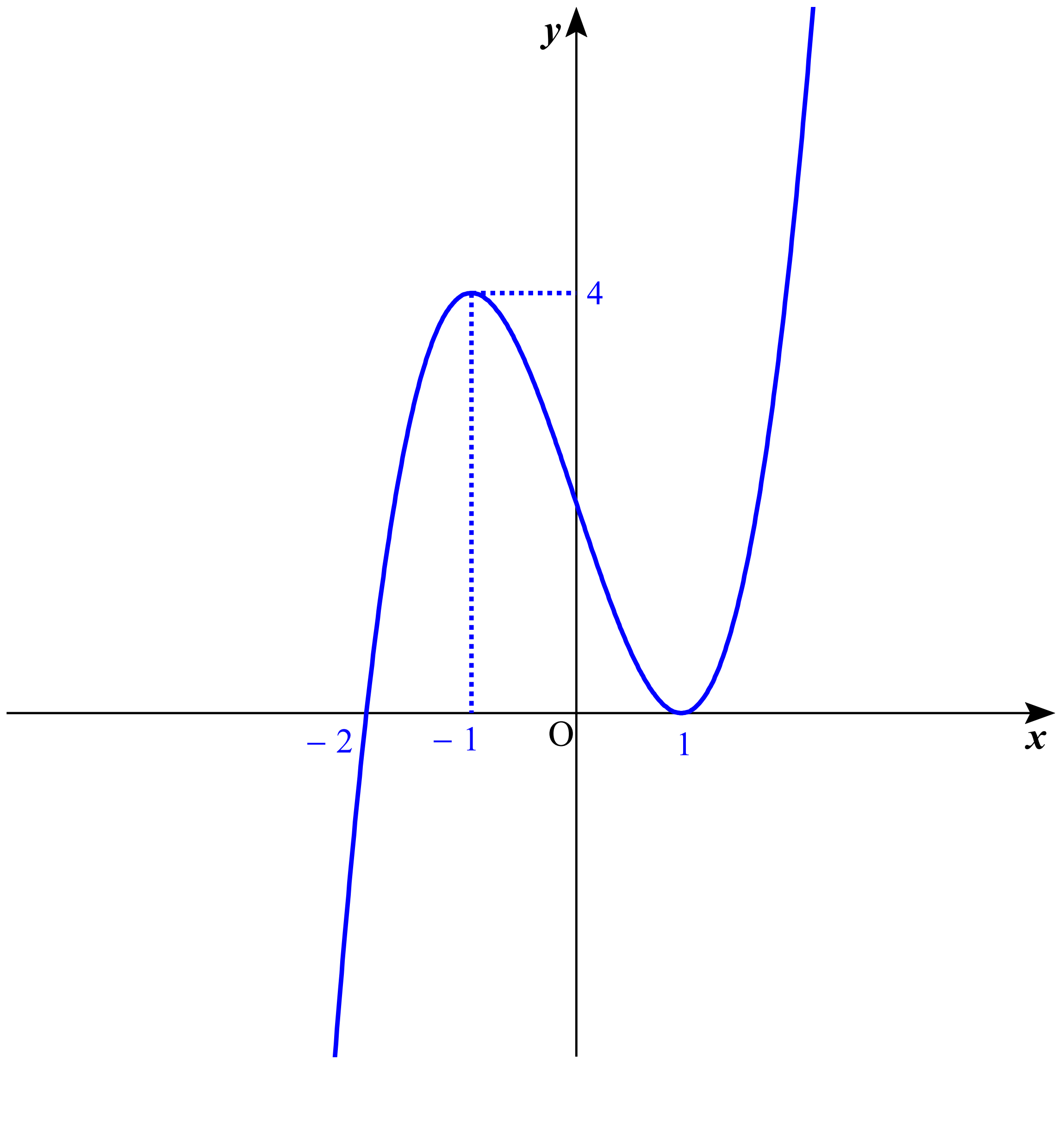


(2)

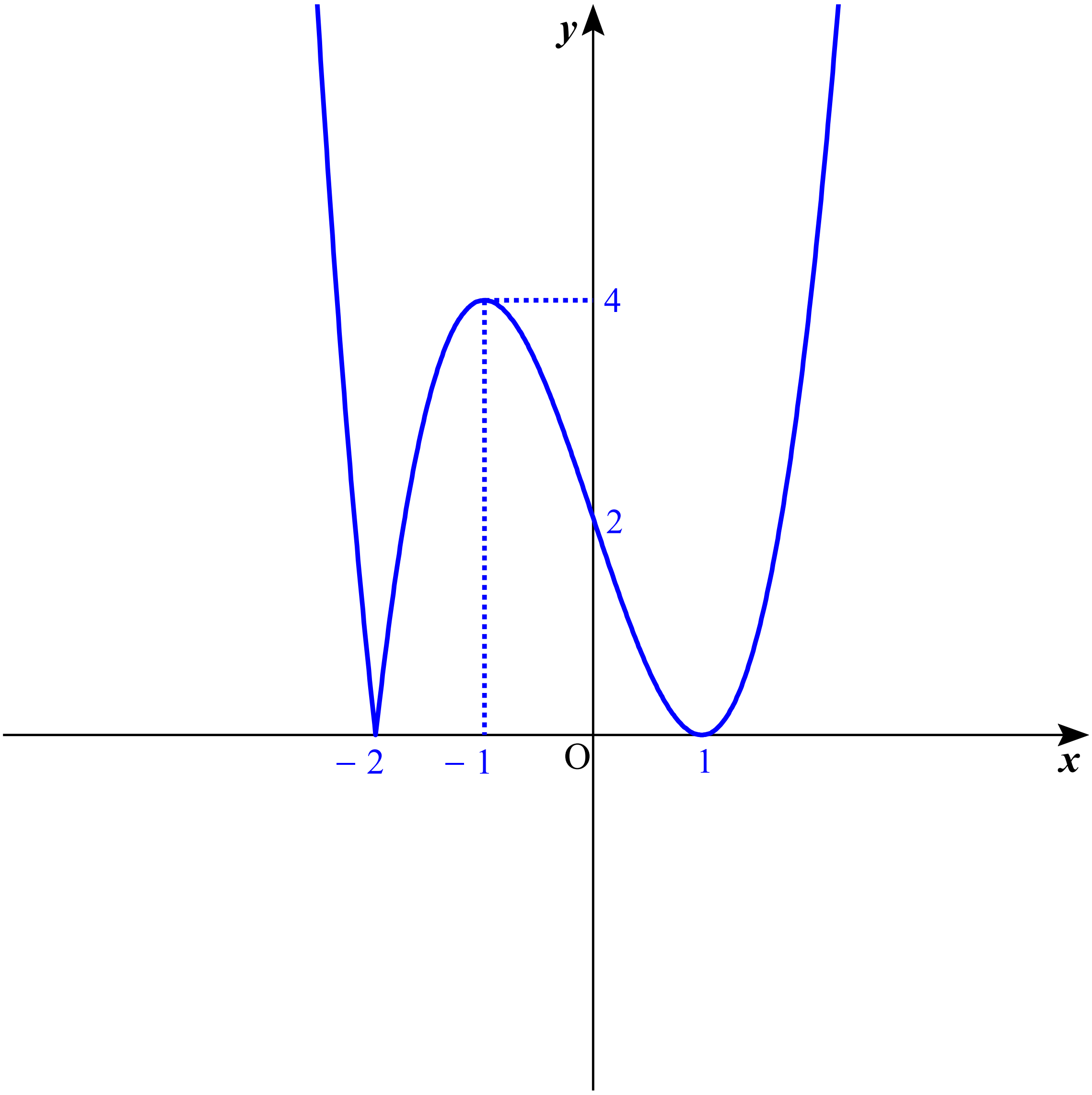
$x<-2$ のとき $y=-(x+2)(x-1)^2$， $-2\leq x$ のとき $y=(x+2)(x-1)^2$ であり，
$y=-(x+2)(x-1)^2$ と $y=(x+2)(x-1)^2$ は x 軸に関して対称だから，
$y=(x+2)(x-1)^2$ のグラフを描いた後，$x<-2$ の部分を x 軸に関して対称移動すればよい。
$y=(x+2)(x-1)^2=x^3-3x+2$， $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ より
y の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	4	$\downarrow$	0	$\uparrow$

また， x 軸との共有点は $(x+2)(x-1)^2=0$ の解より， $x=-2,\ 1$
よって，グラフは次のようになる。



ゆえに，$y=|x+2|(x-1)^2$ のグラフは次のようになる。



430

(1)

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left(\alpha^3-\beta^3\right)+p\left(\alpha^2-\beta^2\right)+q(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)+p(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+q(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\left\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+p(\alpha+\beta)+q\right\}$$

ここで，$f'(x)=3x^2+2px+q$，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ より，

α, β は x の 2 次方程式 $3x^2+2px+q=0$ の解である。

よって，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}p,\ \alpha\beta=\dfrac{q}{3}$ $\quad\therefore p=-\dfrac{3}{2}(\alpha+\beta),\ q=3\alpha\beta$

ゆえに，

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\left\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)^2+3\alpha\beta\right\}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

(2)

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\alpha^3+\beta^3\right)+p\left(\alpha^2+\beta^2\right)+q(\alpha+\beta)+2r\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+p\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}+q(\alpha+\beta)+2r\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2}{3}p\right)^3-3\cdot\frac{q}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}p\right)+p\left\{\left(-\frac{2}{3}p\right)^2-2\cdot\frac{q}{3}\right\}+q\cdot\left(-\frac{2}{3}p\right)+2r\right]$$
$$=\frac{2}{27}p^3-\frac{pq}{3}+r$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(-\frac{p}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r$$
$$=\frac{2}{27}p^3-\frac{pq}{3}+r$$

$$\therefore\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

431

$y'=3x^2+6px+3p=3(x^2+2px+p)$ より，曲線が極値をもつための必要十分条件は

$x^2+2px+p=0$ が異なる 2 実数解をもつことであるから，

判別式を D とすると，$D>0,\ \dfrac{D}{4}=p^2-p=p(p-1)$ より，$p<0,\ 1<p$　・・・①

①のとき，$x^2+2px+p=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ （$\alpha<\beta$）とすると，

増減は次のようになるから，$\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↑	極大値$f(\alpha)$	↓	極小値$f(\beta)$	↑

よって，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると，$(X,\ Y)=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2p,\ \alpha\beta=p$ だから，

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=-p$$

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\alpha^3+\beta^3\right)+3p\left(\alpha^2+\beta^2\right)+3p(\alpha+\beta)+2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3p\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}+3p(\alpha+\beta)+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(-2p)^3-3p(-2p)+3p\left\{(-2p)^2-2p\right\}+3p\cdot(-2p)+2\right]\\&=2p^3-3p^2+1\end{aligned}$$

より，

$X=-p\quad\therefore p=-X$　・・・②

$Y=2p^3-3p^2+1$

よって，

$$\begin{aligned}Y&=2(-X)^3-3(-X)^2+3(-X)+1\\&=-2X^3-3X^2-3X+1\end{aligned}$$

また，①，②より，$X>0,\ X<-1$

ゆえに，M の軌跡は

$y=-2x^3-3x^2+1$ （$x<-1,\ 0<x$）