微分法と積分法 5　最大値・最小値

433

A,B の一方の座標を$\left(a,\ 3-a^2\right)$（$a>0$，$3-a^2>0$），

すなわち$\left(a,\ 3-a^2\right)$（$0<a<\sqrt{3}$）とすると，

条件より，A と B は $y=3-x^2$ の軸，すなわち y 軸に関して対称だから，
もう一方の座標は$\left(-a,\ 3-a^2\right)$

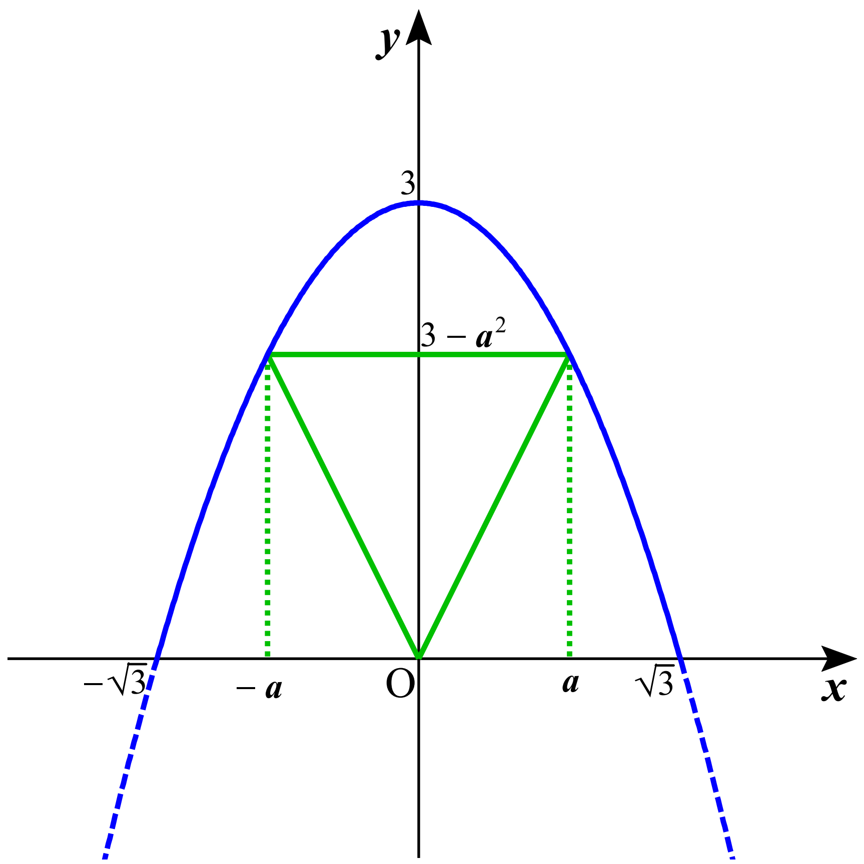
よって，三角形 OAB の面積を $S(a)$ とすると，$S(a)=\dfrac{1}{2}\{a-(-a)\}\left(3-a^2\right)$ より，

$S(a)=-a^3+3a$（$0<a<\sqrt{3}$）

これと $S'(a)=-3a^2+3=-3(a+1)(a-1)$ より，
$S(a)$ の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$	/	$+$	0	$-$	/
$S(a)$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0

ゆえに，$a=1$ のとき，すなわち 2 点の座標が $(1,\ 2)$，$(-1,\ 2)$ のとき，
三角形 OAB の面積は最大値 2 をとる。



434

高さを x，体積を $V(x)$ とすると，$V(x)=x(8-x)(6-2x)$

ただし，$x>0,\ 8-x>0,\ 6-2x>0$ より，$0<x<3$

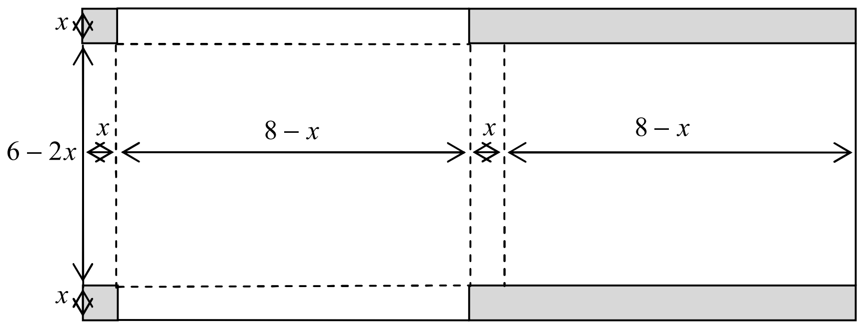
また，$V(x)=x(8-x)(6-2x)=2x^3-22x^2+48x$ より，

$V'(x)=6x^2-44x+48=2(x-6)(3x-4)$

よって，$V(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
$V'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(x)$	0	$\uparrow$	$\frac{800}{27}$	$\downarrow$	0

ゆえに，高さが $\frac{4}{3}$ cm のとき容積は最大値 $\frac{800}{27}$ cm^3 をとる。



435

(1)

底面積 $=\pi x^2$，側面積 $=2\pi xh$ より，$2\pi x^2+2\pi xh=12\pi$　　$\therefore h=\dfrac{6-x^2}{x}$

(2)

底面積 $=\pi x^2$，高さ $h=\dfrac{6-x^2}{x}$ の直円柱だから，

その体積を $V(x)$ とすると，$V(x)=\pi x^2\cdot\dfrac{6-x^2}{x}=\pi x(6-x^2)\ \left(0<x<\sqrt{6}\right)$

また，$V(x)=\pi x(6-x^2)=-\pi x^3+6\pi x$ より，$V'(x)=-3\pi x^2+6\pi=-3\pi\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$

よって，$V(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$V'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(x)$	0	$\uparrow$	$4\sqrt{2}\pi$	$\downarrow$	0

ゆえに，$x=\sqrt{2}$，$h=2\sqrt{2}$ のとき，体積は最大値 $4\sqrt{2}\pi$ cm^3 をとる。

436

$y=x^2$ 上の点を$\left(x,\ x^2\right)$とし，その点と点$(6,\ 3)$との距離の 2 乗を$l(x)$とすると，

$l(x)=(x-6)^2+\left(x^2-3\right)^2=x^4-5x^2-12x+45$

$l'(x)=4x^3-10x-12=2(x-2)\left(2x^2+4x+3\right)$

$2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1>0$

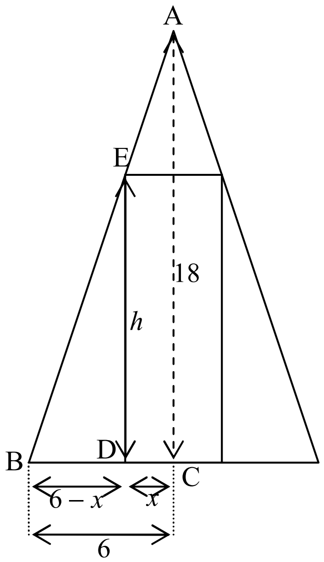
より$l(x)$の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$l'(x)$	$-$	0	$+$
$l(x)$	$\downarrow$	17	$\uparrow$

よって，$x=2$のとき，求める距離は最小値$\sqrt{l(2)}=\sqrt{17}$をとる。

437

直円柱が内接している直円錐を底面の中心を通り，底面に垂直な平面で切ると，
切断面は下図のようになる。



直円柱の半径と高さをそれぞれ$x,\ h$とすると，

$\triangle$EBD$\backsim\triangle$ABC より，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AC}}$ $\quad\therefore \mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{ED}$

ゆえに，$18(6-x)=6h$，すなわち$h=3(6-x)$

したがって，直円柱の体積を$V(x)$とすると，$V(x)=\pi x^2h=3\pi x^2(6-x)=-3\pi x^3+18\pi x^2$

これより，$V'(x)=-9\pi x^2+36\pi x=-9\pi x(x-4)$

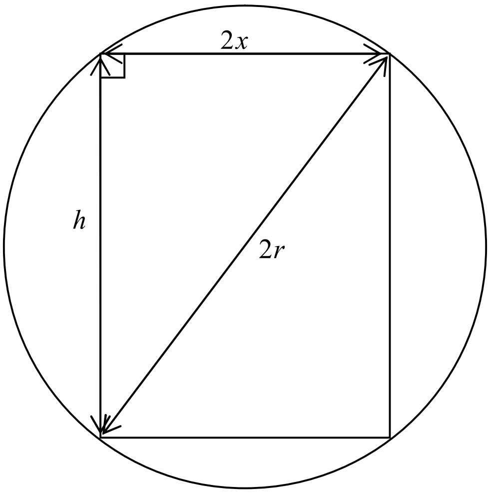
これと$0<x<6$より，$V(x)$の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(x)$	0	↑	極大	↓	0

よって，直円柱の体積が最大であるものの底面の半径 $x=4$，高さ $h=3(6-4)=6$

438

直円柱が内接している球を直円柱の底面の中心を通り，底面に垂直な平面で切ると，切断面は下図のようになる。



直円柱の高さと底面の半径をそれぞれ h, x とすると，三平方の定理より，

$h^2+(2x)^2=(2r)^2 \quad \therefore x^2=\dfrac{4r^2-h^2}{4}$

ゆえに，直円柱の体積を $V(h)$ とすると，$V(h)=\pi x^2 h=\dfrac{\pi}{4}(4r^2-h^2)h=-\dfrac{\pi}{4}h^3+\pi r^2 h$

これより，$V'(h)=-\dfrac{\pi}{4}(3h^2-4r^2)$

これと $0<h<2r$ より，$V(h)$ の増減は次のようになる。

h	0	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$	$\cdots$	$2r$
$V'(h)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(h)$	0	↑	$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$	↓	0

よって，

求める半径 $x=\sqrt{\dfrac{4r^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$，高さ $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，体積 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$

439

(1)

$f'(x)=9x^2-k^2=(3x+k)(3x-k)$ より，

定義域を $x\geq 0$ としたときの $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{k}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↓	$-\frac{2}{9}k^2+2$	↑

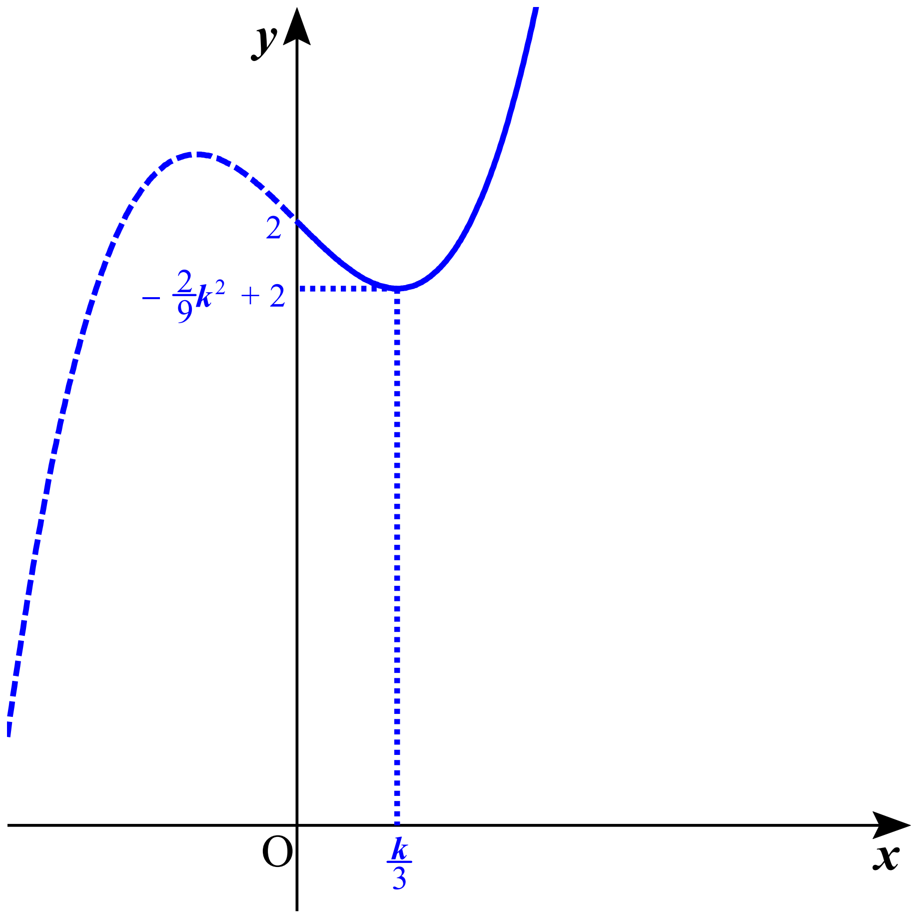
よって，

$0<\frac{k}{3}<1$，すなわち $0<k<3$ のとき

$x=\frac{k}{3}$ で最小値 $-\frac{2}{9}k^2+2$

$1\leq\frac{k}{3}$，すなわち $3\leq k$ のとき

$x=1$ で最小値 $-k^2+5$



(2)

$x>0$ で $f(x)=2$ となる x の値を求めると,

$3x^3-k^2x+2=2$ より, $x(3x^2-k^2)=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$

これと $x\geq 0$ における $f(x)$ の増減より,

$0<\dfrac{k}{\sqrt{3}}<1$, すなわち $0<k<\sqrt{3}$ のとき

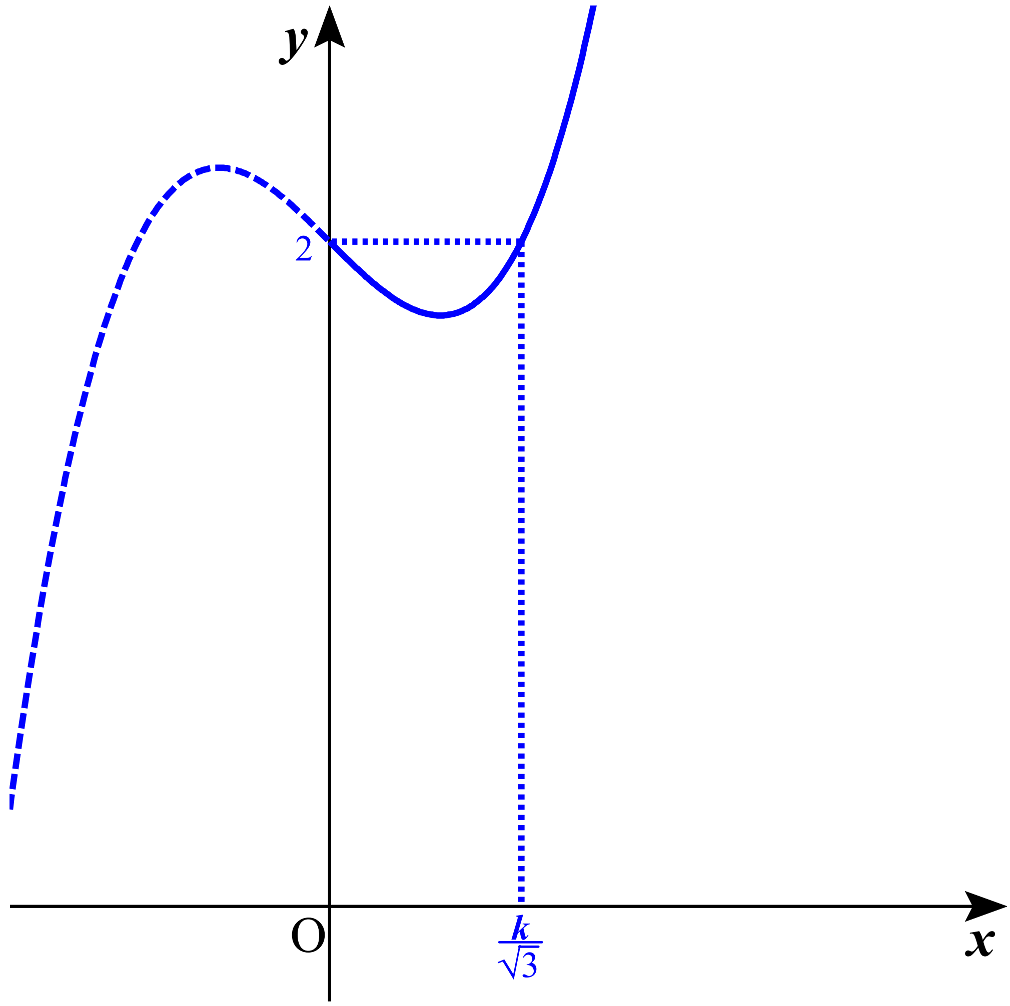
$x=1$ で最大値 $-k^2+5$

$\dfrac{k}{\sqrt{3}}=1$, すなわち $k=\sqrt{3}$ のとき

$x=0,\ 1$ で最大値 2

$1<\dfrac{\sqrt{3}}{k}$, すなわち $\sqrt{3}<k$ のとき

$x=0$ で最大値 2



440

(1)

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ より，

定義域を $x\geq 0$ としたときの $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$

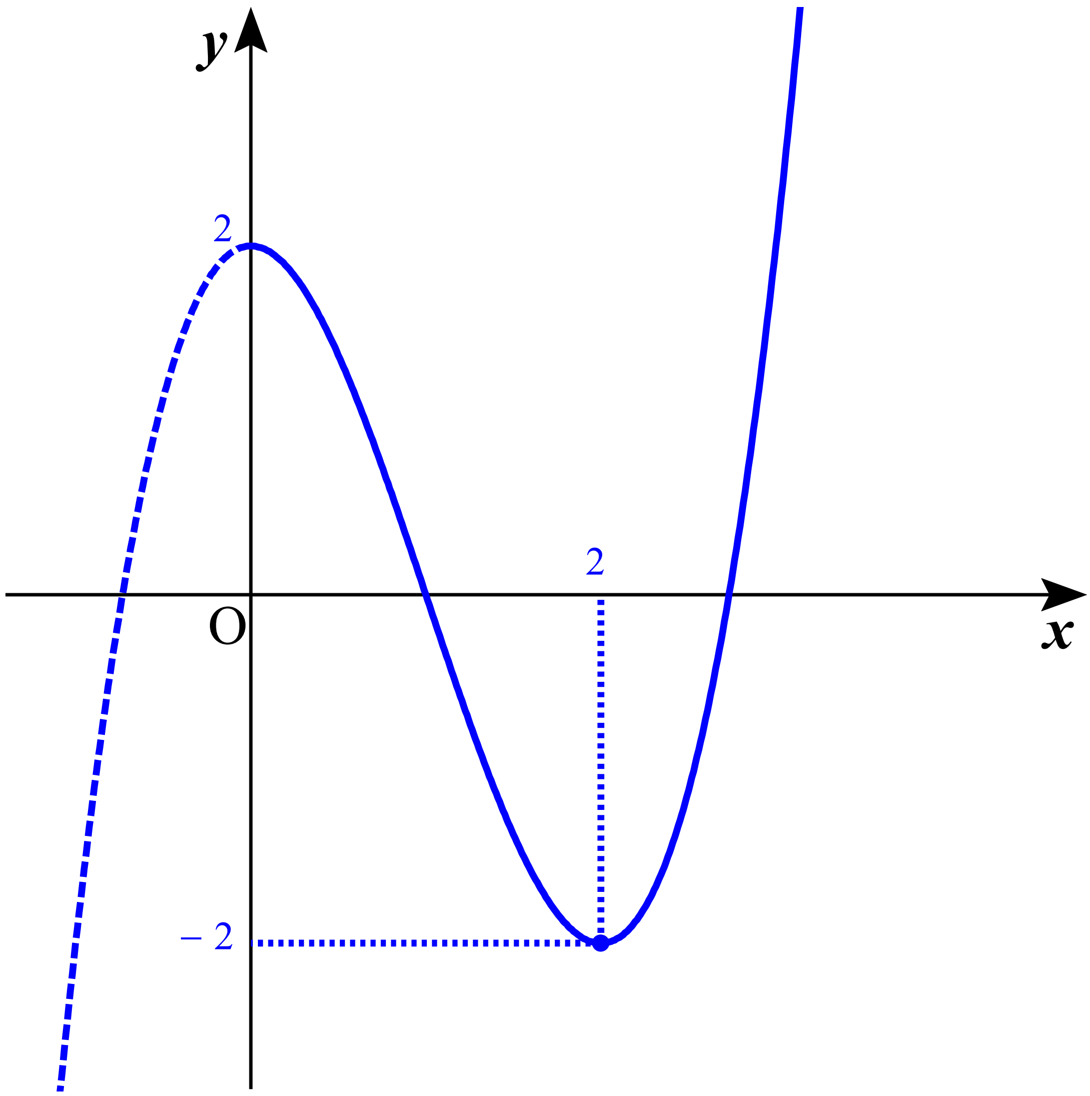
よって，

$0<a<2$ のとき

$x=a$ で最小値 a^3-3a^2+2

$2\leq a$ のとき

$x=2$ で最小値 -2



(2)

$x>0$ で $f(x)=2$ となる x の値を求めると，

$x^3-3x^2+2=2$ より，　$x^2(x-3)=0$　　$\therefore x=3$

これと $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減から，

$0<a<3$ のとき

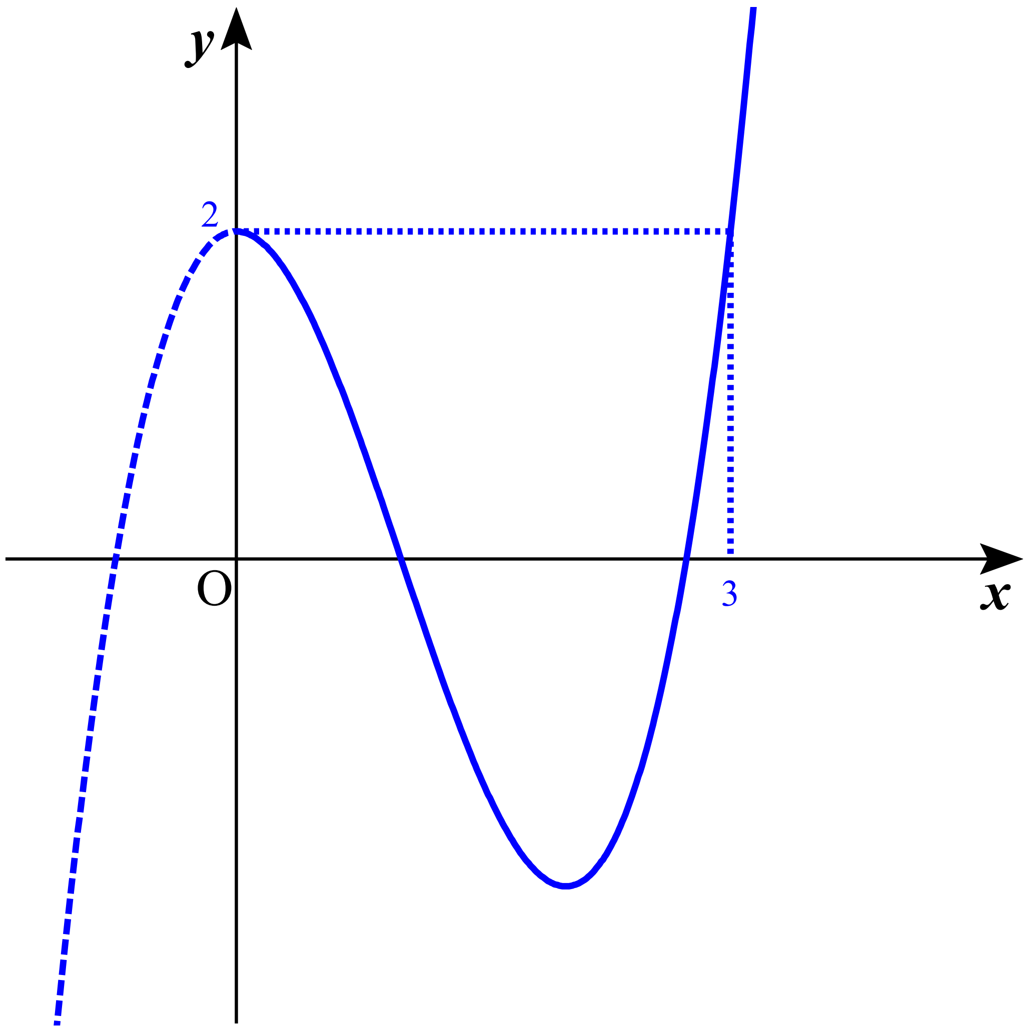
　$x=0$ で最大値 2

$a=3$ のとき

　$x=0, 3$ で最大値 2

$3<a$ のとき

　$x=a$ で最大値 a^3-3a^2+2



441

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$ より， $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	/	+	0	−	/
$f(x)$	$-2a+b$	↑	$-4a+b$	↓	b

これと $f(3)-f(1)=b-(-2a+b)=2a<0$ より，

$-4a+b=10$， $b=-2$

これを解くことにより， $a=-3,\ b=-2$

442

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$ より， $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	/	−	0	−	/
$f(x)$	$-3a+b$	↓	$-27a+b$	↓	b

これと $f(4)-f(1)=b-(-3a+b)=3a>0$ より，

$b=9$， $-27a+b=-18$

これを解くことにより， $a=1,\ b=9$

443

(1)

$x+3y=9$ より， $y=3-\dfrac{1}{3}x$

よって， $x^2y=x^2\left(3-\dfrac{1}{3}x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2$

(2)

$y=3-\dfrac{1}{3}x$ かつ $y\geq 0$ かつ $x\geq 0$ より， $0\leq x\leq 9$

(3)

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2$ （$0\leq x\leq 9$） とすると，

$f'(x)=-x^2+6x=-x(x-6)$ より， $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$f'(x)$	/	+	0	−	/
$f(x)$	0	↑	36	↓	0

これと $y=3-\dfrac{1}{3}x$ より，

$(x,\ y)=(0,\ 3),\ (9,\ 0)$ で最小値 0

$(x,\ y)=(6,\ 1)$ で最大値 36

444

$x\left(x+2y^2\right)$を x だけで表すと，$x^2+4y^2=4$ より，$2y^2=2-\dfrac{x^2}{2}$ だから，

$$x\left(x+2y^2\right)=x\left(x+2-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=-\frac{x^3}{2}+x^2+2x$$

また，$4-x^2=4y^2\geq 0$ より，$x^2-4\leq 0$ $\therefore -2\leq x\leq 2$

よって，

$-\dfrac{x^3}{2}+x^2+2x$ （$-2\leq x\leq 2,\ x^2+4y^2=4$）の最大値，最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めればよい。

$f(x)=-\dfrac{x^3}{2}+x^2+2x$ （$-2\leq x\leq 2,\ x^2+4y^2=4$）とすると，

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x+2$$
$$=-\frac{1}{2}\left(3x^2-4x-4\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(3x+2)(x-2)$$

これより，$f(x)$の増減は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	4	$\downarrow$	$-\dfrac{20}{27}$	$\uparrow$	4

よって，

$(x,\ y)=(\pm 2,\ 0)$で最大値 4

$(x,\ y)=\left(-\dfrac{2}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$で最小値$-\dfrac{20}{27}$

445

$g(x)=x(x-1)(x-2)$ ($-1\leq x\leq 3$) とすると，

$x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$ より，$g'(x)=3x^2-6x+2$

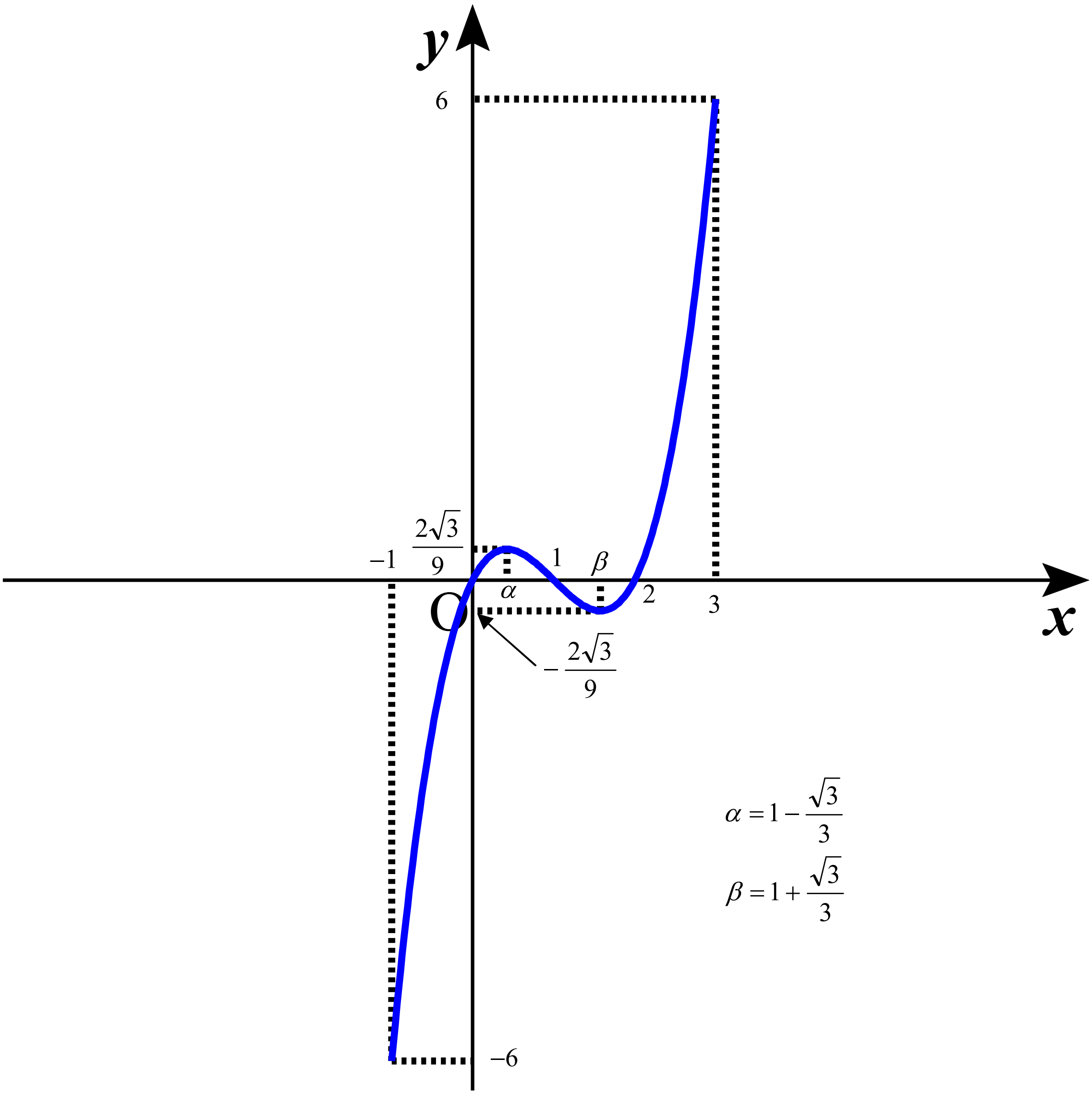
よって，$g'(x)=0$ の解は $x=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

これより，$g(x)$ の増減は次のようになる。

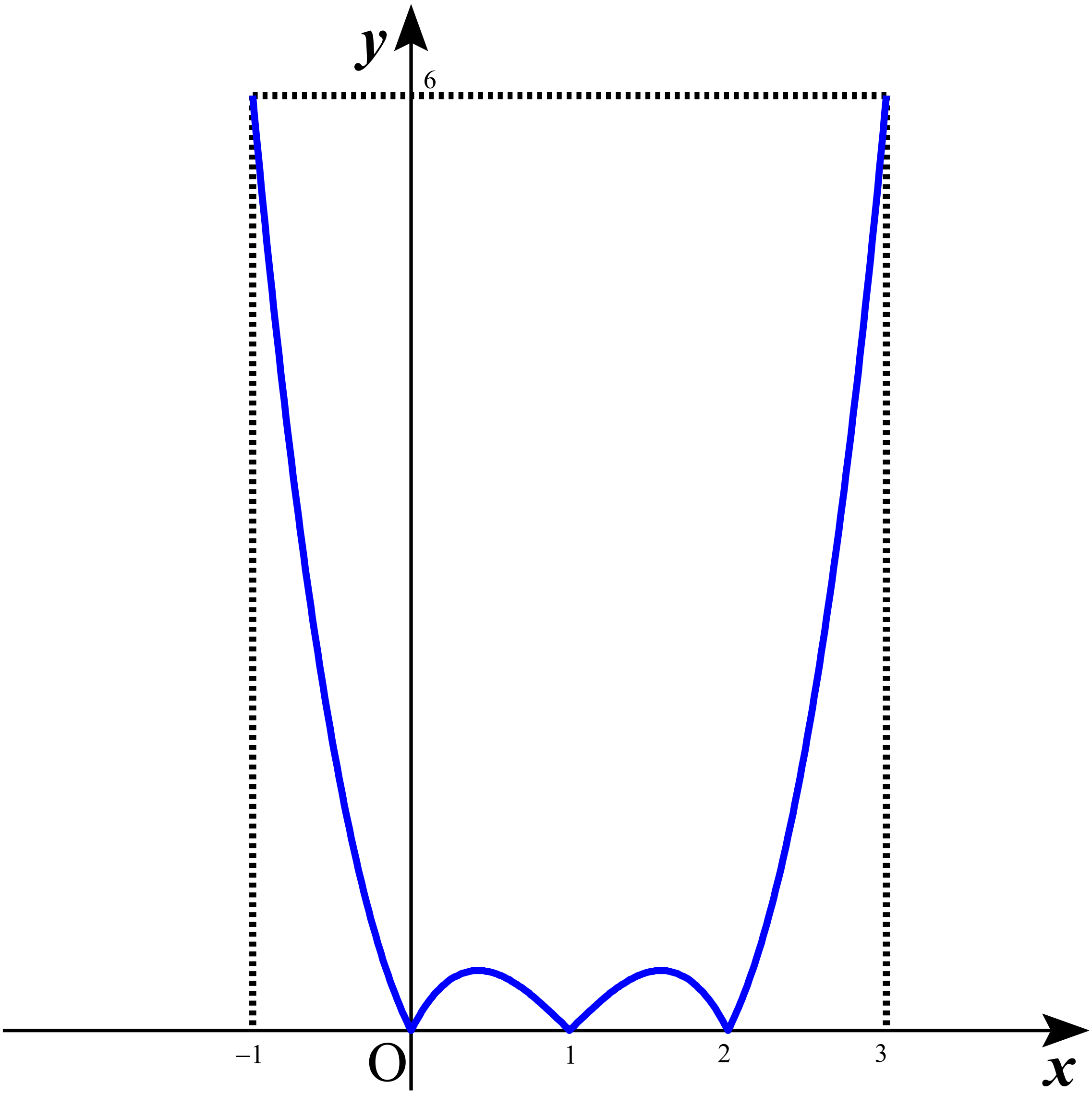
x	-1	$\cdots$	$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	3
$g'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$g(x)$	-6	↑	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↓	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↑	6

また，$g(x)=x(x-1)(x-2)$ より，$g(x)$ は x 軸と $x=0,\ 1,\ 2$ で交わる。

よって，$y=g(x)$ のグラフは次のようになる。



これより $y=|g(x)|$ のグラフ，すなわち $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



ゆえに，

$x=0,\ 1,\ 2$ で最小値 0

$x=-1,\ 3$ で最大値 6

446

(1)

ここで，$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \le \theta \le \pi$ より，$0 \le \sin\theta \le 1$ だから $0 \le t \le 1$

したがって，$y = 4t^3 - 3t^2 + 2$ （$0 \le t \le 1$）が最大値と最小値をとるとき，

$y = 4\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 2$ （$0 \le \theta \le \pi$）も同じ値の最大値と最小値をとる。

そこで，まず $y = 4t^3 - 3t^2 + 2$ （$0 \le t \le 1$）の最大値と最小値を求めると，

$y' = 12t^2 - 6t = 6t(2t - 1)$ より，この関数の増減は次のようになる。

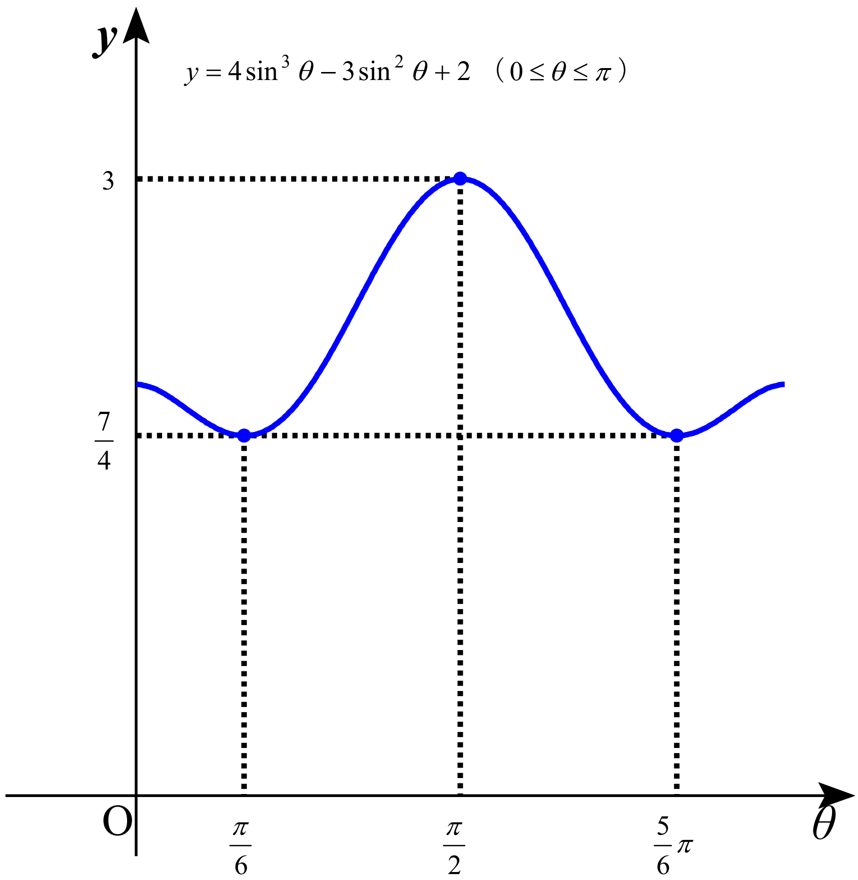
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'	/	$-$	0	$+$	/
y	2	↓	$\frac{7}{4}$	↑	3

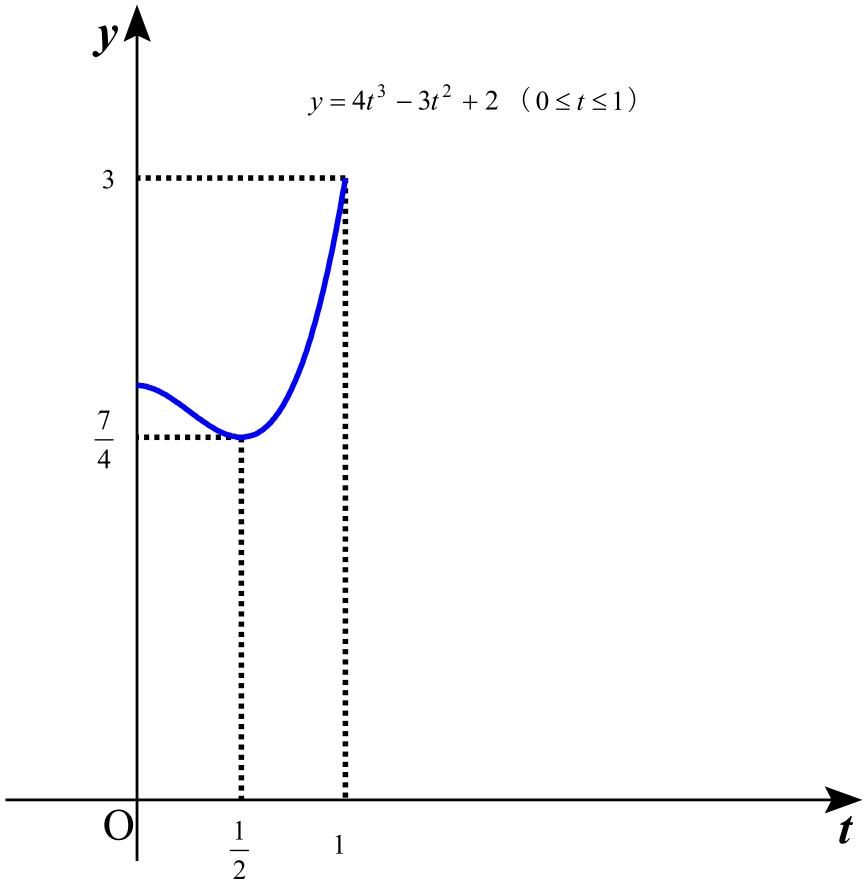
よって，$y = 4t^3 - 3t^2 + 2$ （$0 \le t \le 1$）は $t = 1$ で最大値 3，$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{7}{4}$ をとる。

ゆえに，$t = \sin\theta$ （$0 \le \theta \le \pi$）より，

$y = 4\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 2$（$0 \le \theta \le \pi$）は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 3，$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{7}{4}$ をとる。

参考





(2)

$$y=-4\sin\theta\cos^2\theta+9\cos^2\theta-8\sin\theta-1$$
$$=-4\sin\theta(1-\sin^2\theta)+9(1-\sin^2\theta)-8\sin\theta-1$$
$$=4\sin^3\theta-9\sin^2\theta-12\sin\theta+8$$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leq\theta<2\pi$ より，$-1\leq\sin\theta\leq 1$ だから $-1\leq t\leq 1$

したがって，$y=4t^3-9t^2-12t+8$ （$-1\leq t\leq 1$）が最大値と最小値をとるとき，

$y=-4\sin\theta\cos^2\theta+9\cos^2\theta-8\sin\theta-1$ （$0\leq\theta<2\pi$）も同じ値の最大値と最小値をとる。

そこで，まず $y=4t^3-9t^2-12t+8$ （$-1\leq t\leq 1$）の最大値，最小値を求めと，

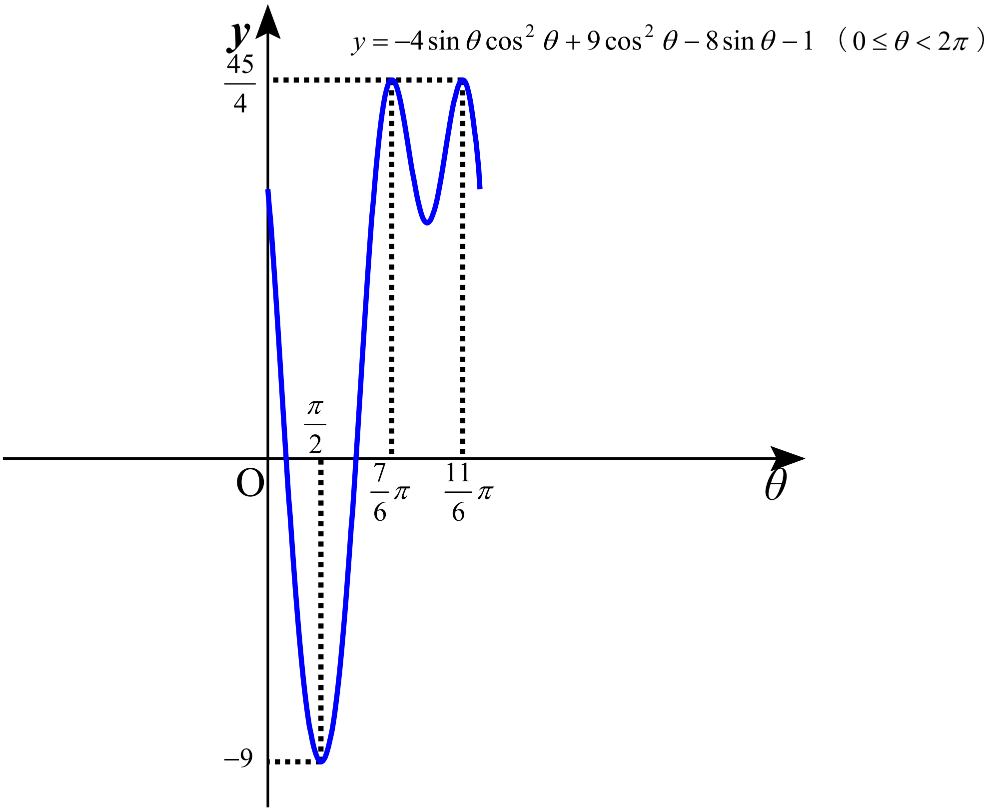
$y'=12t^2-18t-12=6(2t+1)(t-2)$ より，この関数の増減は次のようになる。

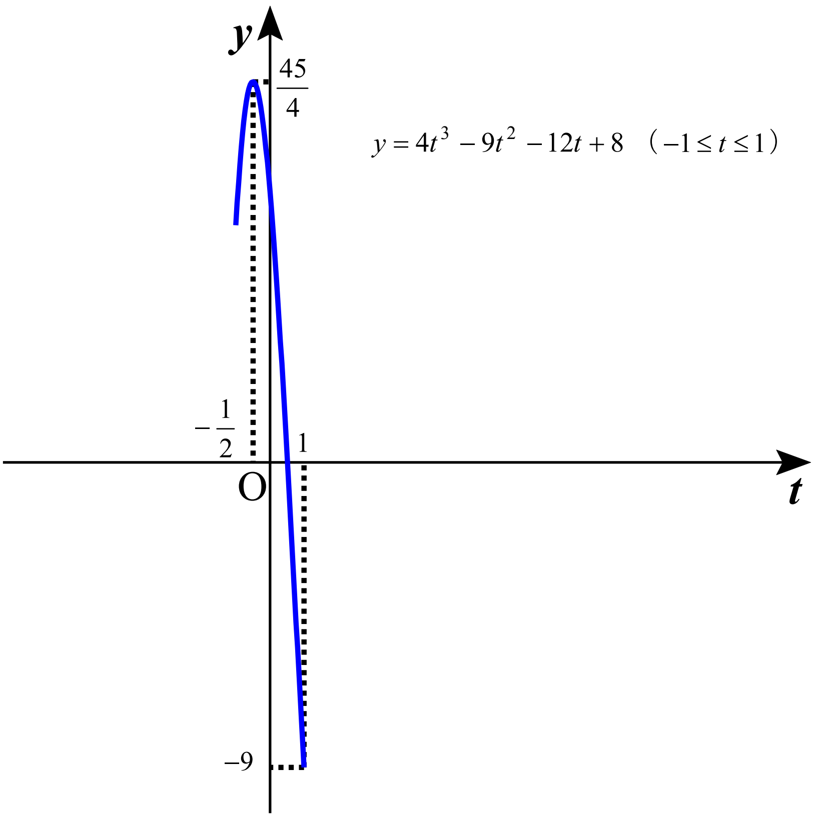
t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'	/	$+$	0	$-$	/
y	7	↑	$\frac{45}{4}$	↓	-9

よって，$y=4t^3-9t^2-12t+8$ （$-1\leq t\leq 1$）は $t=-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{45}{4}$，$t=1$ で最小値 -9

ゆえに，$\sin\theta=t$ より，$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ で最大値 $\frac{45}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小値 -9

参考


y
$y=-4\sin\theta\cos^2\theta+9\cos^2\theta-8\sin\theta-1$ $(0\le\theta<2\pi)$
$\frac{45}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
θ
-9


y
$\frac{45}{4}$
$y=4t^3-9t^2-12t+8$ $(-1\le t\le 1)$
$-\frac{1}{2}$
1
O
t
-9

447

(1)

$$
\begin{aligned}
yz &= \frac{(y+z)^2-(y^2+z^2)}{2} \\
&= \frac{1^2-(1-x^2)}{2} \\
&= \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

よって, y, z は $t^2-(y+z)t+yz=0$, すなわち $t^2-t+\frac{x^2}{2}=0$ の実数解である。

したがって, 判別式を D とすると, 実数解条件より, $D=1-2x^2\geq 0$

ゆえに, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

あるいは,

$y^2>0,\ z^2>0$ のとき

相加平均 $\geq$ 相乗平均より, $y^2+z^2\geq 2yz$ よって, $1-x^2\geq x^2$, すなわち $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

等号は $y^2=z^2$ ($y+z=1$) のとき成り立つ。すなわち, $y=z=\frac{1}{2}$ のとき成り立つ。

$y=0$ のとき

$z=1$ より, $x=0$

$z=0$ のとき

$y=1$ より, $x=0$

ゆえに, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3 &= x^3+(y+z)(y^2-yz+z^2) \\
&= x^3+1\cdot\{(y^2+z^2)-yz\} \\
&= x^3+(1-x^2)-\frac{x^2}{2} \\
&= x^3-\frac{3}{2}x^2+1
\end{aligned}
$$

(3)

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とすると，

$f(x)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めればよい。

$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	$\frac{1-\sqrt{2}}{4}$	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

よって，$x=0$ で最大値 1，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$