微分法と積分法 6　関数のグラフと方程式・不等式

449

$x^3-12x-a=0 \Leftrightarrow x^3-12x=a$ より，

$x^3-12x-a=0$ の実数解と $y=x^3-12x$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標が一致する。

よって，$x^3-12x-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，

$y=x^3-12x$ と $y=a$ の共有点の数も 3 である。

したがって，$y=x^3-12x$ のグラフを描き，

$y=x^3-12x$ と $y=a$ の共有点の数が 3 となるような a の値の範囲をもとめればよい。

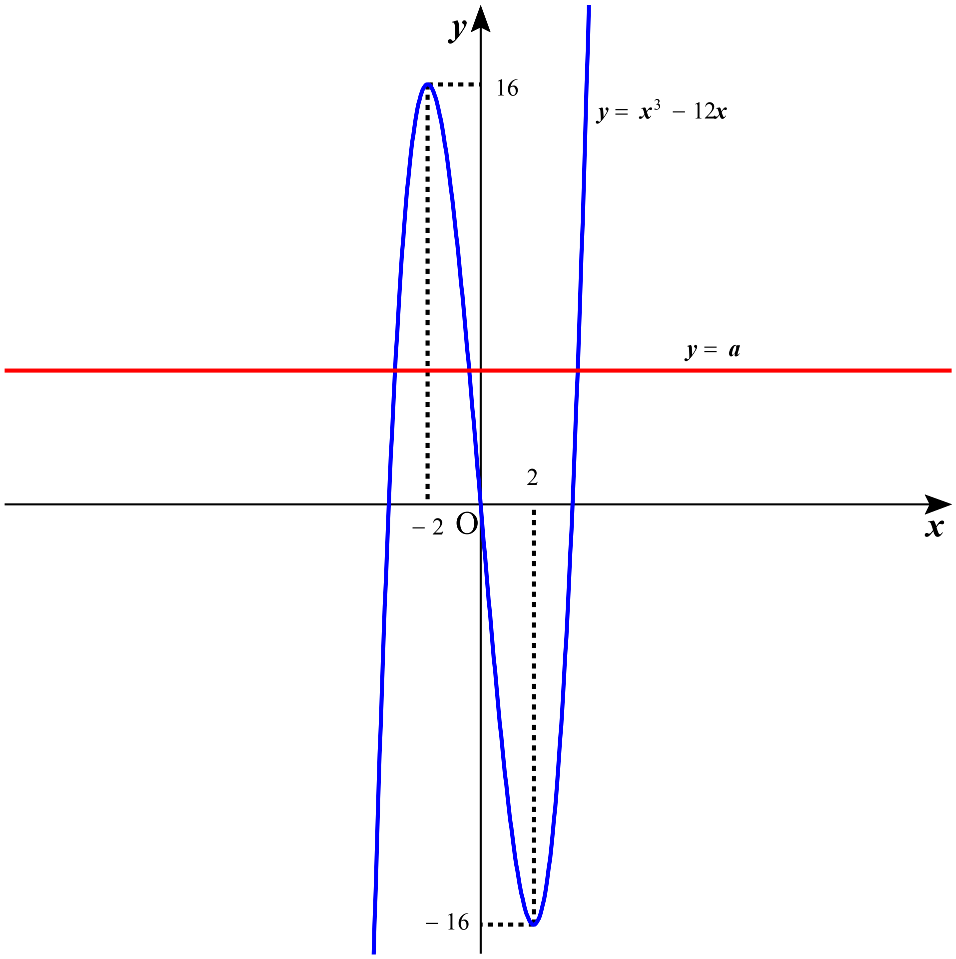
$y=x^3-12x$ より，$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

これより，$y=x^3-12x$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	16	$\downarrow$	-16	$\uparrow$

よって，$y=x^3-12x$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，これと $y=a$ が 3 個の共有点をもつときの a の値の範囲は $-16<a<16$



450

(1)

$x^3+x^2-x+a=0 \Leftrightarrow a=-x^3-x^2+x$ より,

$x^3+x^2-x+a=0$ の実数解の個数は

$y=-x^3-x^2+x$ と $y=a$ のグラフの共有点の数と一致する。

したがって, $y=-x^3-x^2+x$ と $y=a$ のグラフの共有点の数を調べればよい。

$y=-x^3-x^2+x$ より, $y'=-3x^2-2x+1=-(x+1)(3x-1)$

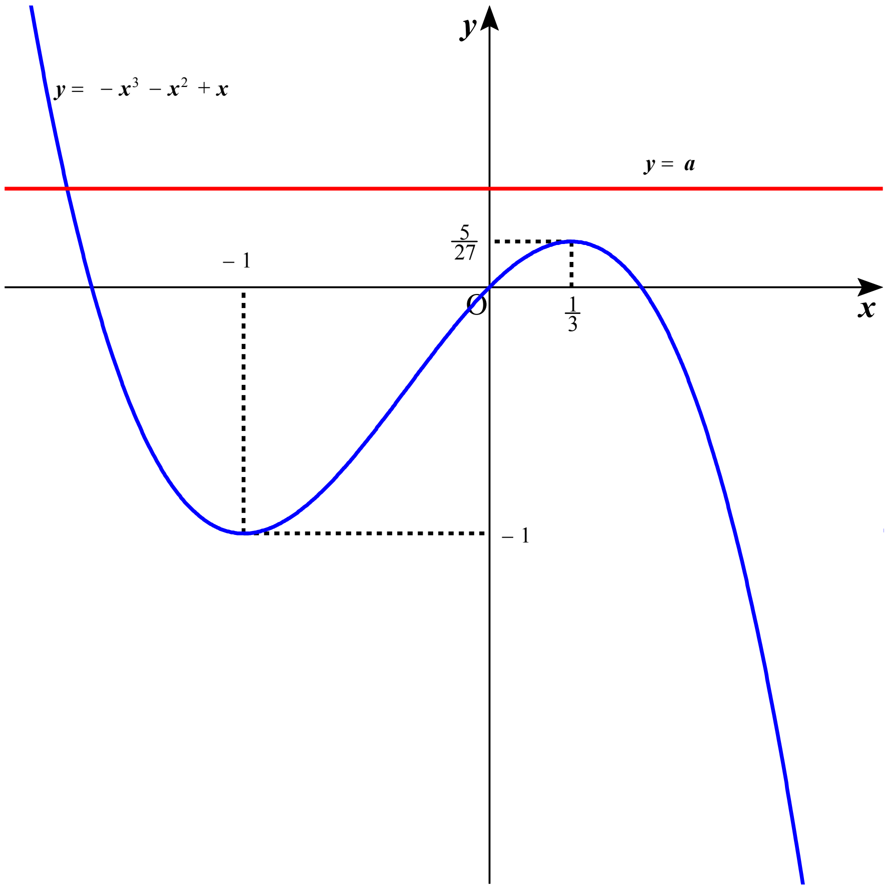
これより, $y=-x^3-x^2+x$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	$\frac{5}{27}$	$\downarrow$

よって, $y=-x^3-x^2+x$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに, 共有点の個数, すなわち実数解の個数は,

$a<-1,\ \frac{5}{27}<a$ のとき 1, $a=-1,\ \frac{5}{27}$ のとき 2, $-1<a<\frac{5}{27}$ のとき 3



(2)

$3x^4-4x^3-12x^2+a=0 \Leftrightarrow a=-3x^4+4x^3+12x^2$ より,

(1)と同様にして，$y=-3x^4+4x^3+12x^2$ と $y=a$ のグラフの共有点の数を調べればよい。

$y=-3x^4+4x^3+12x^2$ より，$y'=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$

これより，$y=-3x^4+4x^3+12x^2$ の増減は次のようになる。

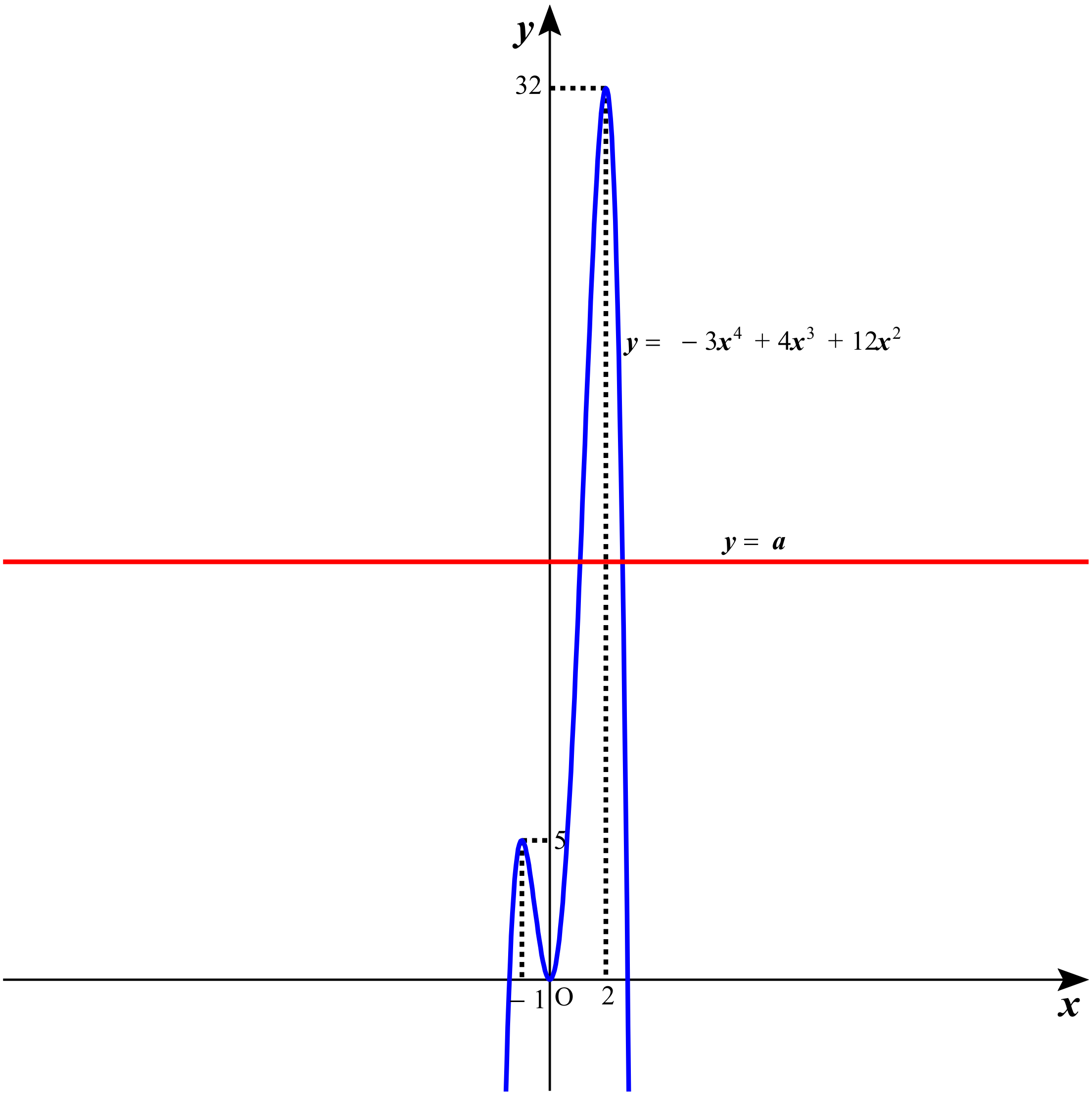
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↑	5	↓	0	↑	32	↓

よって，$y=-3x^4+4x^3+12x^2$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，共有点の個数，すなわち実数解の個数は,

$32<a$ のとき 0，$a=32$ のとき 1，$5<a<32$, $a<0$ のとき 2,

$a=5$, 0 のとき 3，$0<a<5$ のとき 4



451

曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点を共有することと

$x^3-x=2x+a$，すなわち $x^3-3x=a$ が異なる 3 個の実数解をもつことは同値である。

$x^3-3x=a$ が異なる 3 個の実数解をもつことと

曲線 $y=x^3-3x$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点を共有することは同値である。

よって，曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点を共有することと

曲線 $y=x^3-3x$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点を共有することは同値である。

したがって，曲線 $y=x^3-3x$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点を共有するときの定数 a の値の範囲を求めればよい。

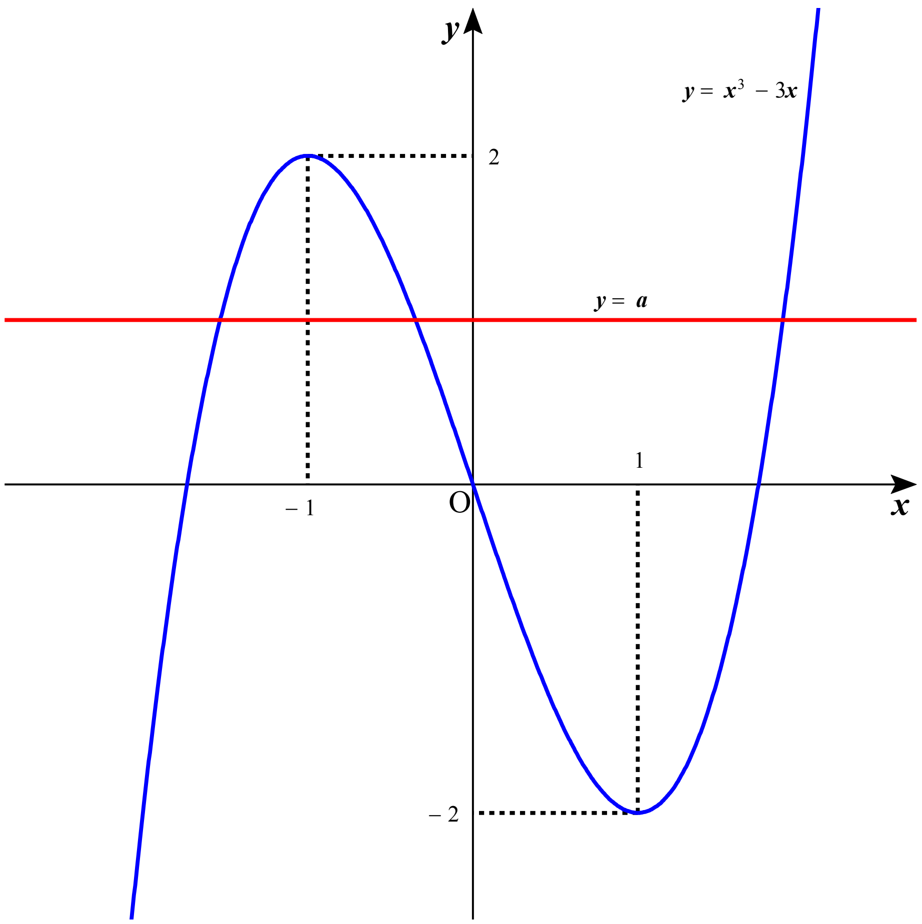
$y=x^3-3x$ より，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

これより，$y=x^3-3x$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$

よって，$y=x^3-3x$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，求める a の値の範囲は $-2<a<2$



452

(1)

$y=f(x)=2x^3+x^2-5x+1$ とおくと，$y=f(x)$は全ての実数xで連続である。

これと $f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0$ より，

$y=f(x)$のグラフは$0<x<1$においてx軸と少なくとも 1 点で交わる。

すなわち，$2x^3+x^2-5x+1=0$ は区間$0<x<1$に実数解をもつ。

(2)

$y=f(x)=x^3-3x-1$ とおくと，$y=f(x)$は全ての実数xで連続である。

これと $f(-2)=-3<0,\ f(-1)=1>0,\ f(0)=-1<0,\ f(1)=-3<0,\ f(2)=1>0$ より，

$y=f(x)$のグラフは$-2<x<-1,\ -1<x<0,\ 1<x<2$においてx軸と交わる。

すなわち，$x^3-3x-1=0$ は区間$-2<x<-1,\ -1<x<0,\ 1<x<2$に実数解をもつ。

453

(1)

$x\geq 0$ のとき $2x^3-3x^2+1\geq 0$ であることを示せばよい。

$f(x)=2x^3-3x^2+1$ （$x\geq 0$）とおくと，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ より，

$f(x)$の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\downarrow$	0	$\uparrow$

よって，$f(x)=2x^3-3x^2+1$ （$x\geq 0$）は$x=1$のとき最小値 0 をとる。

ゆえに，$x\geq 0$ のとき $2x^3-3x^2+1\geq 0$，すなわち$2x^3+1\geq 3x^2$が成り立つ。

(2)

$f(x)=x^3-3x^2+6x-4$ （$x>1$）とおくと，

$f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$ より，$f(x)$は単調に増加する。

よって，$x>1$のとき $f(x)>f(1)=0$

ゆえに，$x>1$のとき $x^3-3x^2+6x-4>0$ が成り立つ。

454

$f(x)=x^4-4x^3+28$ とおくと，$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$ より，

$f(x)$の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	28	$\downarrow$	1	$\uparrow$

よって，$f(x)$は$x=3$のとき最小値 1 をとる。

ゆえに，$x^4-4x^3+28>0$

455

文意は $y=2x^3-3x^2-36x$ と $y=a$ が $x>0$ において 2 個の，$x<0$ において 1 個の共有点をもつように a の値の範囲を定めることと同値である。

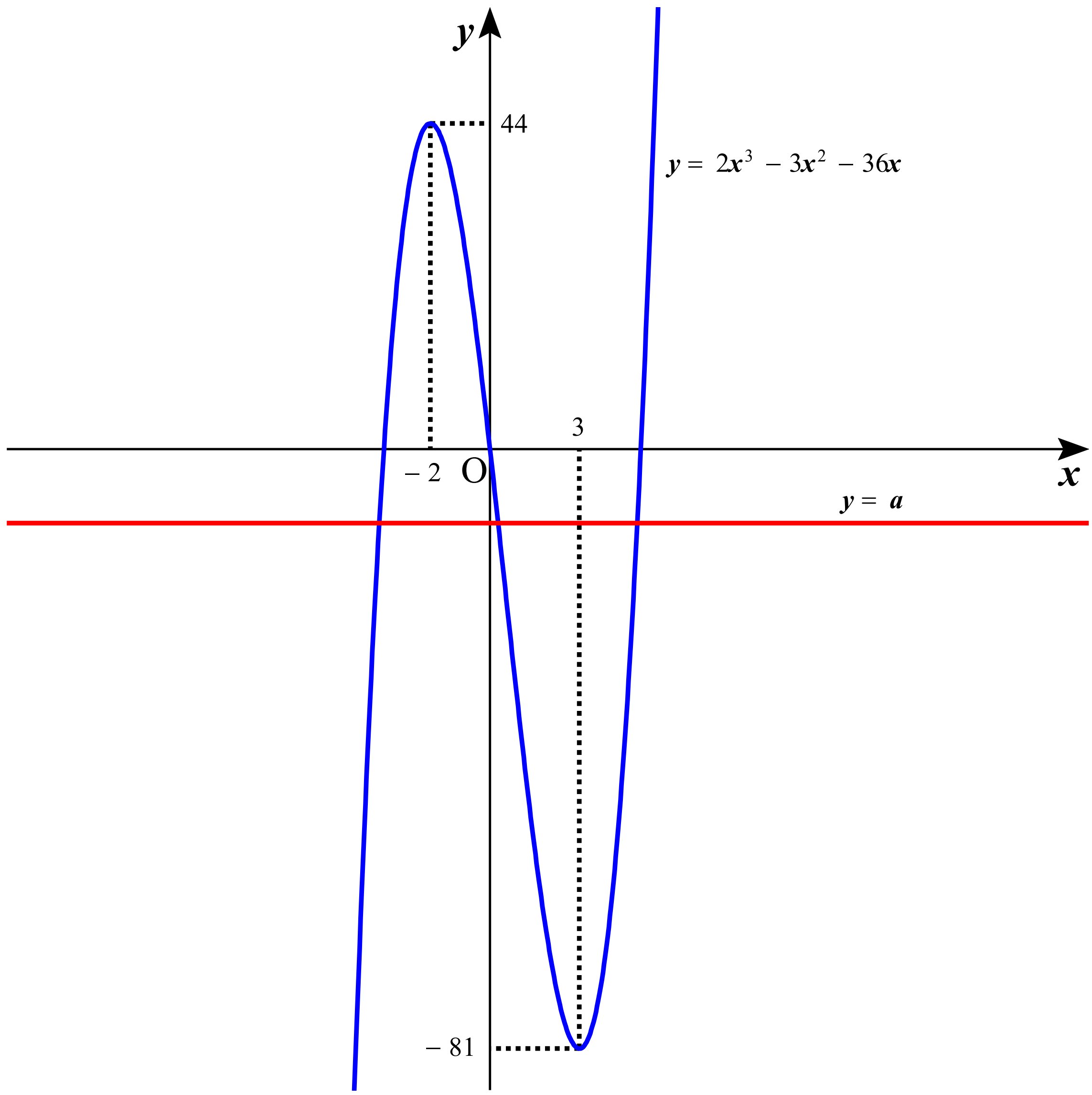
$y=2x^3-3x^2-36x$ の増減は，$y'=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$ より，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	44	$\downarrow$	-81	$\uparrow$

また，$y=2x^3-3x^2-36x=x(2x^2-3x-36)$ より，曲線 $y=2x^3-3x^2-36x$ は原点を通る。

よって，グラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，求める a の値の範囲は $-81<a<0$



456

文意は $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$ と $y=a$ が $x>0$ において 2 個の，$x<0$ において 2 個の共有点をもつように定数 a の値の範囲を定めることと同値である。

$y=x^4-4x^3-2x^2+12x$ の増減は，$y'=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$ より，

次のようになる。

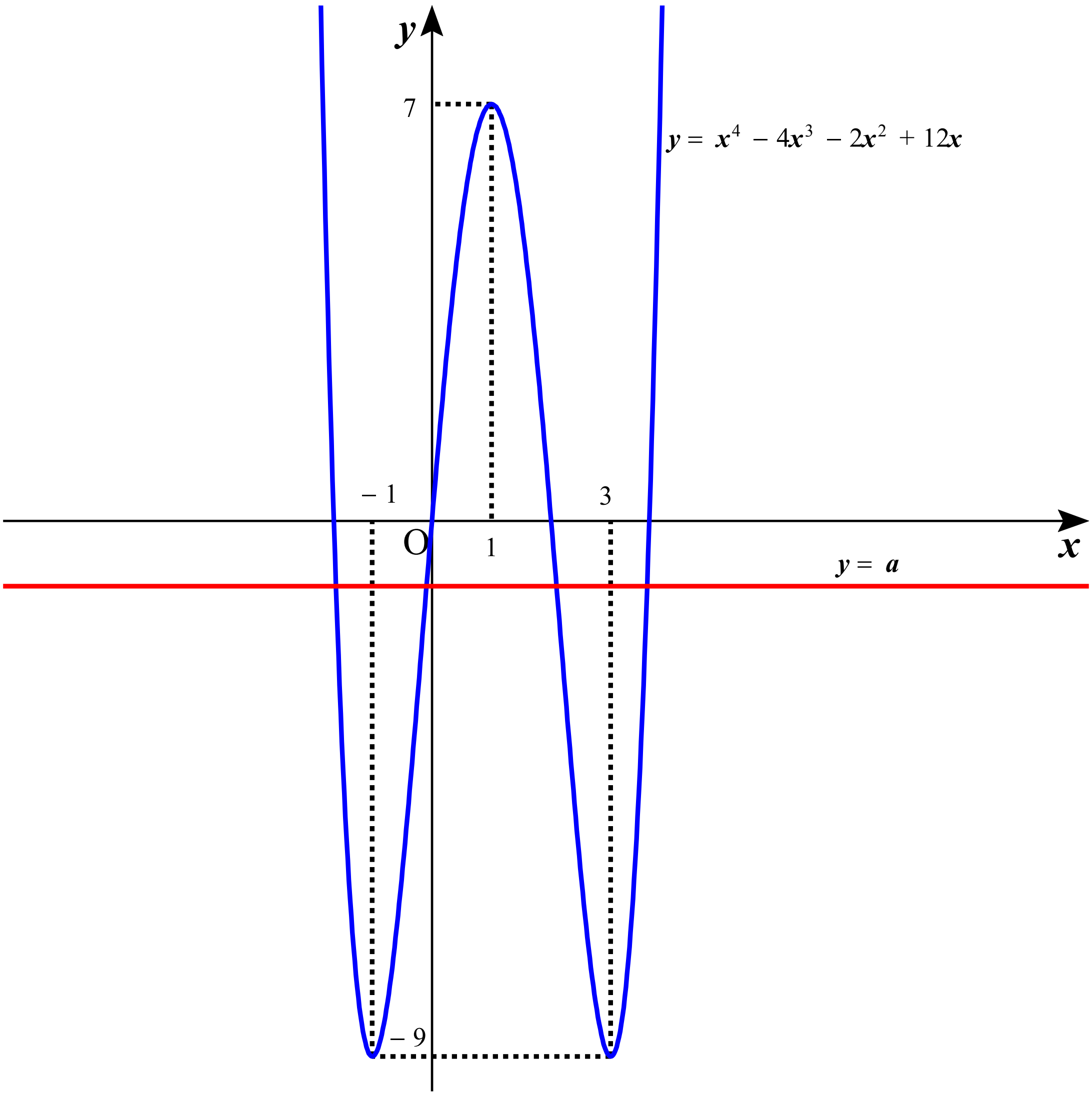
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	-9	$\uparrow$	7	$\downarrow$	-9	$\uparrow$

また，$y=x^4-4x^3-2x^2+12x=x(x^3-4x^2-2x+12)$ より，

曲線 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$ は原点を通る。

よって，$y=x^4-4x^3-2x^2+12x$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，求める a の値の範囲は $-9<a<0$



457

文意は $y=x^3-3ax+a$ が x 軸と3個の共有点をもつときの定数 a の値の範囲を求めることと同値である。

$y=x^3-3ax+a$ が x 軸と3個の共有点をもつための必要十分条件は,

$y=x^3-3ax+a$ が極値をもちかつ極大値と極小値の積が負であることである。

$y=x^3-3ax+a$ が極値をもつためには,

$y'=3x^2-3a$ において, $3x^2-3a=0$, すなわち $x^2=a$ を満たす実数 x が存在すればよい。

よって, $a>0$ ・・・①

また, このとき, $3x^2-3a=0$ の解は $x=-\sqrt{a},\ \sqrt{a}$ だから,

$y=x^3-3ax+a$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	極大値 $a\left(a+2\sqrt{a}\right)$	$\downarrow$	極小値 $a\left(a-2\sqrt{a}\right)$	$\uparrow$

極大値と極小値の積が負であるためには,

$a\left(1+2\sqrt{a}\right)\times a\left(1-2\sqrt{a}\right)<0$, すなわち $a^2(1-4a)<0$ であればよい。

よって, $1-4a<0$ より, $a>\dfrac{1}{4}$ ・・・②

ゆえに, ①かつ②より, $a>\dfrac{1}{4}$

458

(1)

$y'=3x^2+6x$ より，点 P における接線の方程式は,

$y=(3t^2+6t)(x-t)+t^3+3t^2$，すなわち $y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$

これが点 A$(0,\ a)$ を通るとき,

$a=(3t^2+6t)\cdot 0-2t^3-3t^2$，すなわち $2t^3+3t^2+a=0$ が成り立つ。

(2)

t についての 3 次方程式 $2t^3+3t^2+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつならば,

(1)を満たす異なる接点が 3 個存在する。したがって, A を通る C の接線が 3 本存在する。

$2t^3+3t^2+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつことは

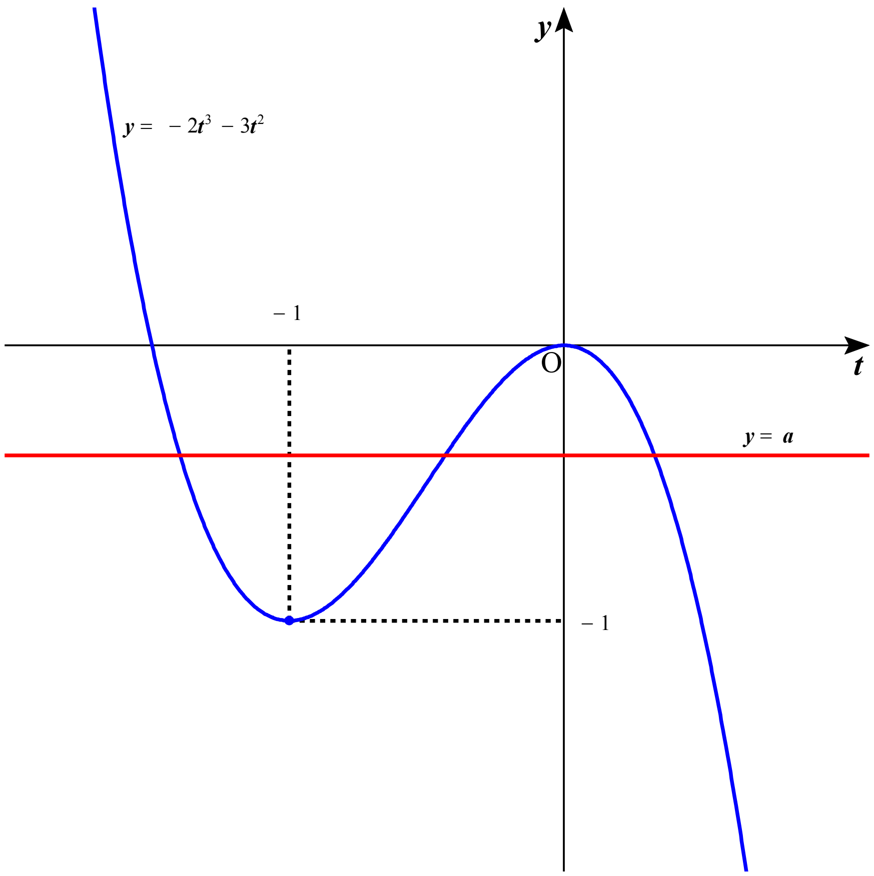
$y=-2t^3-3t^2$ と $y=a$ が 3 個の共有点をもつことと同値である。

$y=-2t^3-3t^2$ の増減は， $y'=-6t^2-6t=-6t(t+1)$ より，次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0	$\downarrow$

よって， $y=-2t^3-3t^2$ のグラフは下図青色実線のようになる。

ゆえに，求める a の値の範囲は $-1<a<0$



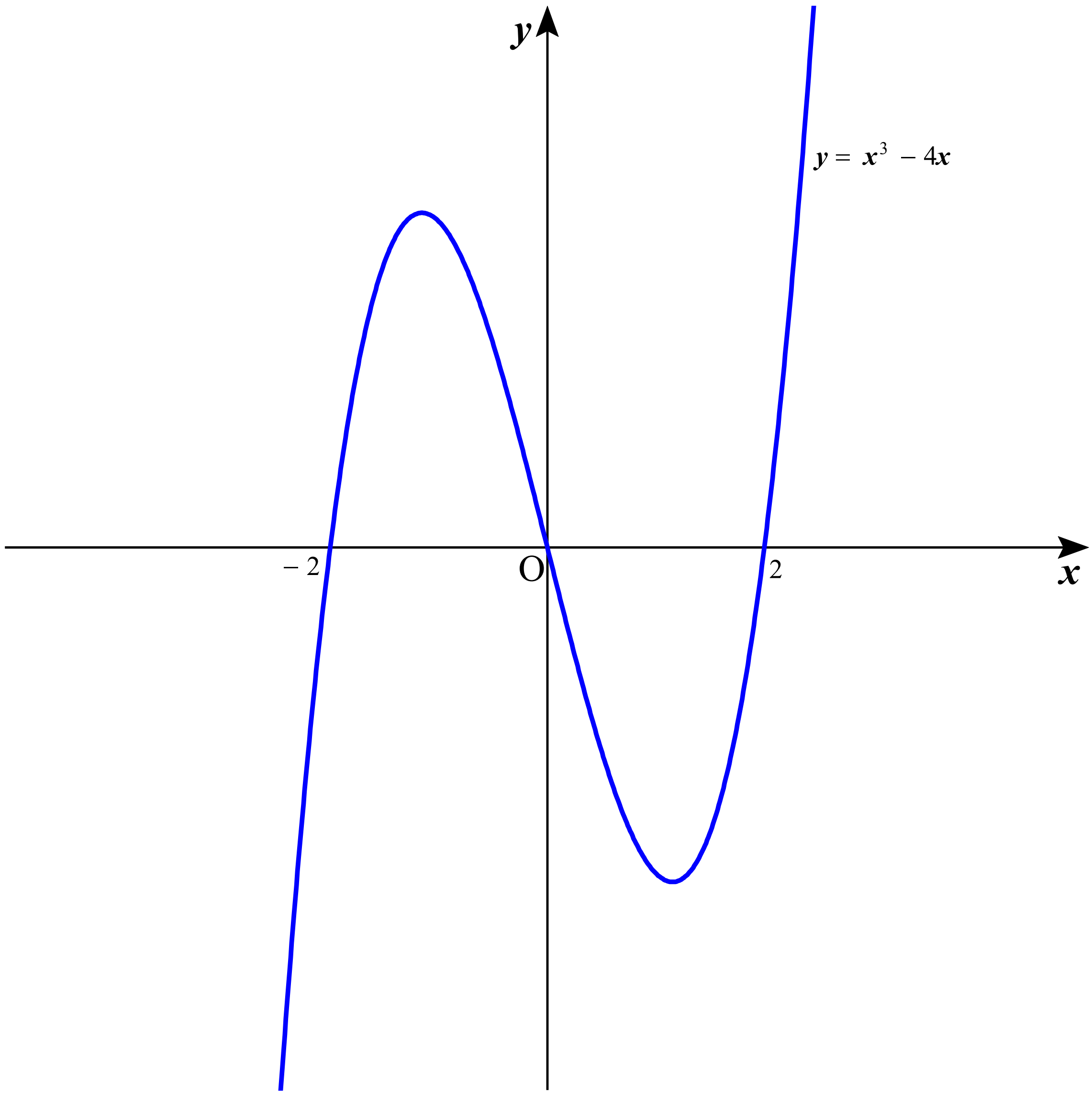
459

(1)

$x^3-4x=x(x+2)(x-2)$ より， $y=x^3-4x$ と x 軸との共有点の x 座標は $x=-2,\ 0,\ 2$

これとグラフの概形が下図のようになることから，

$y=x^3-4x>0$ を満たす x の値の範囲は $-2<x<0,\ 2<x$



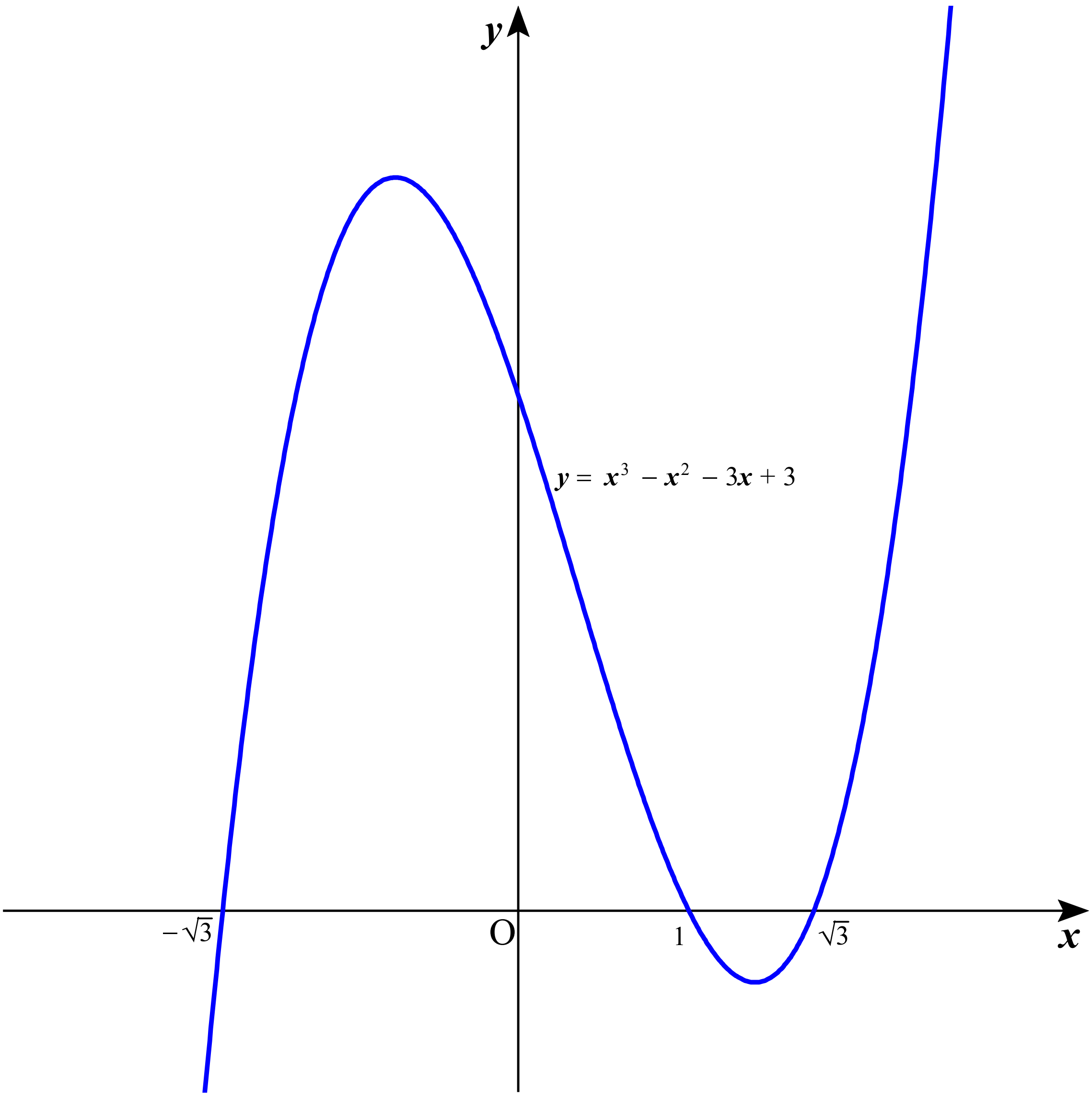
(2)

$x^3-x^2-3x+3=(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ より，

$y=x^3-x^2-3x+3$ と x 軸との共有点の x 座標は $x=-\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3}$ で交わる。

これとグラフの概形が下図のようになることから，

$y=x^3-x^2-3x+3<0$ を満たす x の値の範囲は $x<-\sqrt{3},\ 1<x<\sqrt{3}$



(3)

$x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ より，　$y=x^3-3x-2$ と x 軸との共有点の x 座標は $x=-1,\ 2$

これとグラフの概形が下図のようになることから，

$y=x^3-3x-2\geq 0$ を満たす x の値の範囲は $x=-1,\ 2\leq x$