

微分法と積分法 8 定積分

474

ポイント

$$n \text{ が } 0 \text{ 以上の整数のとき } \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx$$

(1)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx &= 4 \int_{-1}^1 x^3 dx + 3 \int_{-1}^1 x^2 dx + 3 \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 dx \\ &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + 3 \cdot 0 + 2 \int_0^1 dx \\ &= 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2[x]_0^1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

簡略化すると,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx &= 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^3 - x^2 - x + 4) dx &= 2 \int_0^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= 2 \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^4 - 5x^3 + x^2 + 9x) dx &= 2 \int_0^2 (x^4 + x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{272}{15} \end{aligned}$$

475

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)\{(x-\alpha)+\alpha-\beta\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 dx - (\beta-\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta-\alpha) \left[\frac{1}{2} (x-\alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3} (\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2} (\beta-\alpha)^3 \\
 &= -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3
 \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx &= \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx \\
 &= -\frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 \\
 &= -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (x^2 - 2x - 1) dx &= \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \{x - (1-\sqrt{2})\} \{x - (1+\sqrt{2})\} dx \\
 &= -\frac{1}{6} \{(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})\}^3 \\
 &= -\frac{8\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \int_3^4 (14x - 24 - 2x^2) dx &= -2 \int_3^4 (x^2 - 7x + 12) dx \\
 &= -2 \int_3^4 (x-3)(x-4) dx \\
 &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (4-3)^3 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

476

$$f(-1)=2 \text{ より, } a-b+c=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=2ax+b \text{ および } f'(0)=0 \text{ より, } b=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \text{ および条件より, } \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①～③の連立方程式を解くことにより, $a=6, b=0, c=-4$

477

(1)

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0) \text{ とおくと,}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2+bx+c)dx = 2 \int_0^1 (ax^2+c)dx = 2 \left[\frac{a}{3}x^3 + cx \right]_0^1 = \frac{2}{3}a + 2c \text{ および条件より,}$$

$$a+3c=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax^2+bx+c)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b + 2c \text{ および条件より,}$$

$$4a+3b+3c=15 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x(ax^2+bx+c)dx = \int_{-1}^1 (ax^3+bx^2+cx)dx = 2 \int_0^1 bx^2dx = \frac{2}{3}b \text{ および条件より,}$$

$$b=2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①～③の連立方程式を解くことにより, $a=3, b=2, c=-1$

$$\text{よって, } f(x)=3x^2+2x-1$$

(2)

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0) \text{ とおくと,}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax^2+bx+c)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b + 2c \text{ および条件より,}$$

$$8a+6b+6c=3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 (ax^3+bx^2+cx)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 \right]_0^2 = 4a + \frac{8}{3}b + 2c \text{ および条件より,}$$

$$12a+8b+6c=3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax^4+bx^3+cx^2)dx = \left[\frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{5}a + 4b + \frac{8}{3}c \text{ および条件より,}$$

$$48a+30b+20c=15 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①～③の連立方程式を解くことにより, $a=\frac{15}{4}, b=-\frac{15}{2}, c=3$

$$\text{よって, } f(x)=\frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{2}x + 3$$

478

$g(x) = px + q$ (p は 0 でない任意の実数, q は任意の実数) とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)dx &= \int_0^1 (ax^2 + bx + 1)(px + q)dx \\ &= p \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + x)dx + q \int_0^1 (ax^2 + bx + 1)dx \\ &= p \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + q \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= p \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \right) + q \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

$$\text{よって, } p \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \right) + q \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 \right) = 0$$

p は 0 でない任意の実数, q は任意の実数だから,

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②の連立方程式を解くことにより, $a = 6, b = -6$

479

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$Q(x) = sx^2 + tx + u$ (s, t, u は任意の実数) とおくと,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx &= \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)(sx^2 + tx + u)dx \\ &= s \int_{-1}^1 (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)dx + t \int_{-1}^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)dx \\ &\quad + u \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx \\ &= 2s \int_0^1 (bx^4 + dx^2)dx + 2t \int_0^1 (ax^4 + cx^2)dx + 2u \int_0^1 (bx^2 + d)dx \\ &= 2s \left(\frac{b}{5} + \frac{d}{3} \right) + 2t \left(\frac{a}{5} + \frac{c}{3} \right) + 2u \left(\frac{b}{3} + d \right)\end{aligned}$$

$$\text{これと [1] より, } \frac{b}{5} + \frac{d}{3} = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \frac{a}{5} + \frac{c}{3} = 0 \quad \dots \textcircled{2} \quad \frac{b}{3} + d = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{また, [2] より, } a + b + c + d = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

①~④の連立方程式を解くことにより, $a = \frac{5}{2}, b = 0, c = -\frac{3}{2}, d = 0$

$$\text{よって, } P(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

480

(1)

$$\int_0^3 f(t)dt = a \text{ とすると, } f(x) = x + a$$

よって, $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \int_0^3 f(t)dt \\ &= x + \int_0^3 (t + a)dt \\ &= x + \left[\frac{1}{2}t^2 + at \right]_0^3 \\ &= x + \frac{9}{2} + 3a \end{aligned}$$

とも表せる。

したがって, $x + \frac{9}{2} + 3a = x + a$ は x についての恒等式である。

$$\text{よって, } \frac{9}{2} + 3a = a \text{ より, } a = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ゆえに, } f(x) = x - \frac{9}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^3 \{2x - f(t)\}dt \\ &= \int_1^3 2xdt - \int_1^3 f(t)dt \\ &= [2xt]_1^3 - \int_1^3 f(t)dt \\ &= 4x - \int_1^3 f(t)dt \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \int_1^3 f(t)dt = a \text{ とすると, } f(x) = 4x - a$$

よって, $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^3 \{2x - f(t)\}dt \\ &= \int_1^3 \{2x - (4t - a)\}dt \\ &= \int_1^3 (-4t + 2x + a)dt \\ &= \left[-2t^2 + (2x + a)t \right]_1^3 \\ &= 4x + 2a - 16 \end{aligned}$$

とも表せる。

したがって、 $4x - a = 4x + 2a - 16$ は x についての恒等式である。

よって、 $-a = 2a - 16$ より、 $a = \frac{16}{3}$

ゆえに、 $f(x) = 4x - \frac{16}{3}$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \int_0^2 xf(t)dt + 2 \int_0^1 f(t)dt \\ &= x^2 - x \int_0^2 f(t)dt + 2 \int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^2 f(t)dt = a$ 、 $\int_0^1 f(t)dt = b$ とすると、 $f(x) = x^2 - ax + 2b$

よって、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \int_0^2 xf(t)dt + 2 \int_0^1 f(t)dt \\ &= x^2 - x \int_0^2 (t^2 - at + 2b)dt + 2 \int_0^1 (t^2 - at + 2b)dt \\ &= x^2 - x \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a}{2}t^2 + 2bt \right]_0^2 + 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a}{2}t^2 + 2bt \right]_0^1 \\ &= x^2 - \left(\frac{8}{3} - 2a + 4b \right)x + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + 2b \right) \end{aligned}$$

とも表せる。

したがって、 $x^2 - ax + 2b = x^2 - \left(\frac{8}{3} - 2a + 4b \right)x + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + 2b \right)$ は x についての恒等式である。

よって、 $a = \frac{8}{3} - 2a + 4b$ か $b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + 2b$ より、 $a = \frac{4}{3}$ 、 $b = \frac{1}{3}$

ゆえに、 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt \\ &= 1 + x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt \end{aligned}$$

ここで, $\int_0^1 f(t)dt = a$, $\int_0^1 tf(t)dt = b$ とすると, $f(x) = ax - b + 1$

よって, $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt \\ &= 1 + x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt \\ &= 1 + x \int_0^1 (at - b + 1)dt - \int_0^1 \{at^2 + (-b+1)t\}dt \\ &= 1 + x \left[\frac{a}{2}t^2 + (-b+1)t \right]_0^1 - \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{-b+1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{a}{2} - b + 1 \right)x + \left(-\frac{a}{3} + \frac{b+1}{2} \right) \end{aligned}$$

とも表せる。

したがって, $ax - b + 1 = \left(\frac{a}{2} - b + 1 \right)x + \left(-\frac{a}{3} + \frac{b+1}{2} \right)$ は x についての恒等式である。

よって, $a = \frac{a}{2} - b + 1$ かつ $-b + 1 = -\frac{a}{3} + \frac{b+1}{2}$ より, $a = \frac{12}{13}$, $b = \frac{7}{13}$

ゆえに, $f(x) = \frac{12}{13}x + \frac{6}{13}$

481

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 (2ax^2 - a^2x)dx \\ &= \left[\frac{2a}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{4}{3}a \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

よって, $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a$ であり, $a = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}$ をとる。

482

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ より, $c = 0$, $a + b + c = 1$ だから,

$$f(x) = ax^2 - (a-1)x$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 \{ax^2 - (a-1)x\}^2 dx \\ &= \int_0^1 \{a^2x^4 - 2a(a-1)x^3 + (a-1)^2x^2\} dx \\ &= \left[\frac{a^2}{5}x^5 - \frac{a(a-1)}{2}x^4 + \frac{(a-1)^2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{a^2}{5} - \frac{a(a-1)}{2} + \frac{(a-1)^2}{3} \\ &= \frac{1}{30}(a^2 - 5a + 10) \\ &= \frac{1}{30}\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって, $a = \frac{5}{2}$ のとき $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ は最小となる。

$$\text{ゆえに, } f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

483

$$f(x) + \int_0^x g(t)dt = 3x^2 + 2x + 1 \text{ より, } f(0) + \int_0^0 g(t)dt = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 \quad \therefore f(0) = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \frac{d}{dx} \left\{ f(x) + \int_0^x g(t)dt \right\} = \frac{d}{dx} (3x^2 + 2x + 1) \text{ より, } \frac{d}{dx} f(x) + g(x) = 6x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{条件より, } \frac{d}{dx} f(x) = g(x) + 4x^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

解法 1

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \frac{d}{dx} f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\text{よって, } f(x) = \int (2x^2 + 3x + 1)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

これと①より, $C = 1$

$$\text{ゆえに, } f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

解法 2

②, ③より, $g(x) = -2x^2 + 3x + 1$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) + \int_0^x g(t) dt &= f(x) + \int_0^x (-2t^2 + 3t + 1) dt \\ &= f(x) + \left[-\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^x \\ &= f(x) - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \end{aligned}$$

これと $f(x) + \int_0^x g(t) dt = 3x^2 + 2x + 1$ より, $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$

484

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (3t^2 - 4t + 1) dt \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &= (3x - 1)(x - 1) \end{aligned}$$

より,

増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって, $x = \frac{1}{3}$ のとき極大値, $x = 1$ のとき極小値をとる。

485

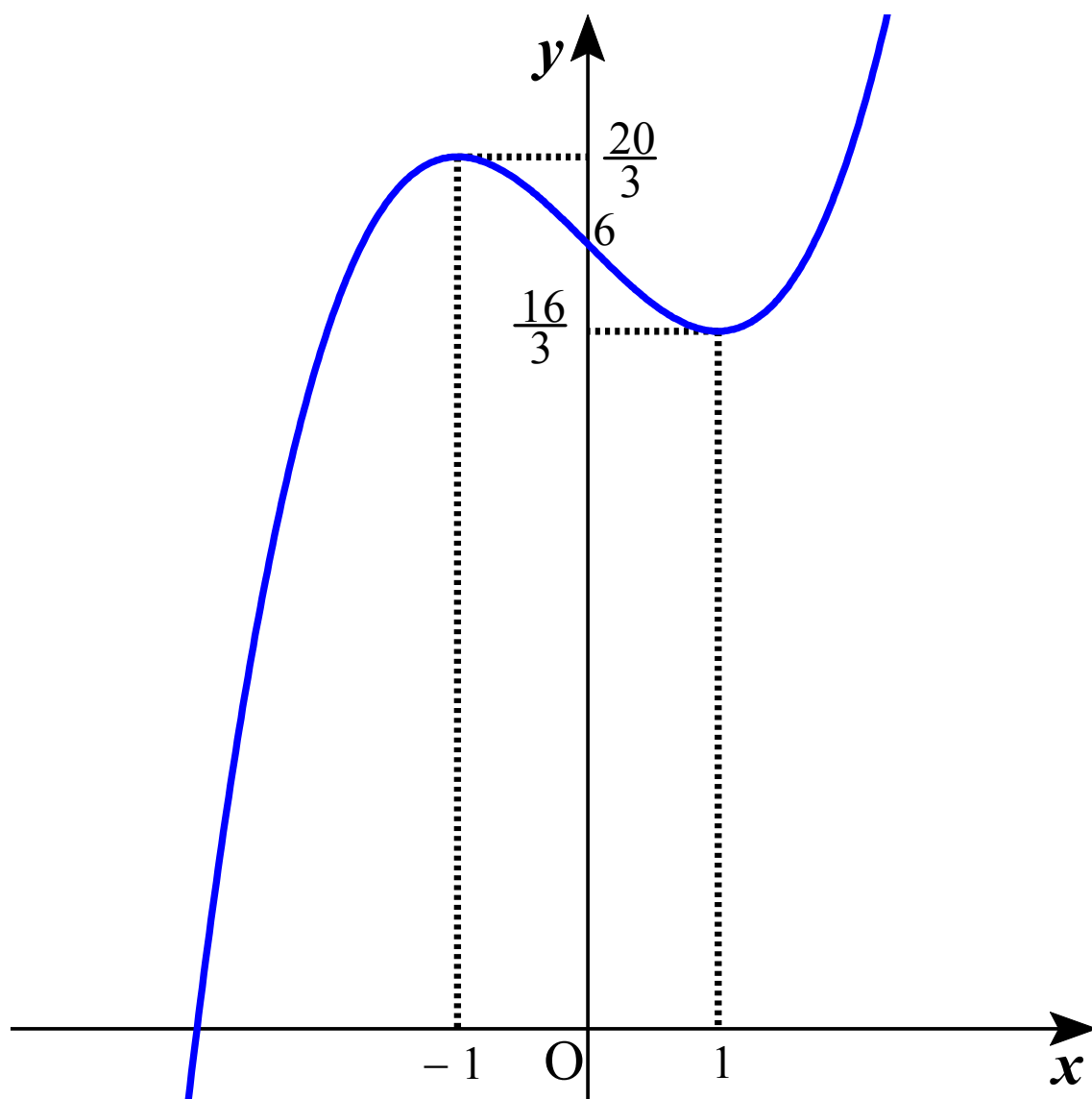
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-3}^x (t^2 - 1) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{-3}^x \\ &= \frac{x^3}{3} - x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-3}^x (t^2 - 1) dt \\ &= x^2 - 1 \\ &= (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

より,

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$\frac{20}{3}$	$\downarrow$	$\frac{16}{3}$	$\uparrow$



486

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x (t-1)(t-3)dt \\ &= (x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (t-1)(t-3)dt \\ &= \int_0^x (t^2 - 4t + 3)dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\end{aligned}$$

より,

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$	/	+	0	-	0	+	/
$f(x)$	0	↑	$\frac{4}{3}$	↓	0	↑	$\frac{4}{3}$

よって, $x=1, 4$ のとき最大値 $\frac{4}{3}$ を, $x=0, 3$ のとき最小値 0 をとる。

487

$$\begin{aligned}
\left\{ \int_0^1 (x-a)(x-b) dx \right\}^2 &= \left[\int_0^1 \{x^2 - (a+b)x + ab\} dx \right]^2 \\
&= \left(\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+b}{2}x^2 + abx \right]_0^1 \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{a+b}{2} + ab \right)^2 \\
&= \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right) \left(b - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} \right\}^2 \\
&= \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(a - \frac{1}{2} \right) \left(b - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{12} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 (x-b)^2 dx &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{3}(x-b)^3 \right]_0^1 \\
&= \left\{ \frac{1}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{3}a^3 \right\} \left\{ \frac{1}{3}(1-b)^3 + \frac{1}{3}b^3 \right\} \\
&= \left(a^2 - a + \frac{1}{3} \right) \left(b^2 - b + \frac{1}{3} \right) \\
&= \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right\} \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right\} \\
&= \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{12} \right)^2
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 (x-b)^2 dx - \left\{ \int_0^1 (x-a)(x-b) dx \right\}^2 &= \frac{1}{12} \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(a - \frac{1}{2} \right) \left(b - \frac{1}{2} \right) + \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{12} \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right) - \left(b - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{12} (a-b)^2
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\int_0^1 (x-a)^2 dx \int_0^1 (x-b)^2 dx - \left\{ \int_0^1 (x-a)(x-b) dx \right\}^2 \geq 0$$

等号が成り立つのは $a=b$ のとき