微分法と積分法 9　面積

$y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ との交点の x 座標は $ax^2 + bx + c = mx + n$，
すなわち $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ の解である。
これが異なる 2 実数解をもつとき，この解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，
$ax^2 + (b - m)x + c - n = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と表せる。
また，直線と放物線で囲まれた部分は
$mx + n \leq ax^2 + bx + c$ か $mx + n \geq x^2 + bx + c$ のどちらかでしかない。
したがって，直線と放物線で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \left| \int_\alpha^\beta a(x - \alpha)(x - \beta)dx \right| \\
&= \left| \int_\alpha^\beta a(x - \alpha)\{(x - \alpha) + (\alpha - \beta)\}dx \right| \\
&= \left| a\int_\alpha^\beta \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\}dx \right| \\
&= \left| a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{\beta - \alpha}{2}(x - \alpha)^2 \right]_\alpha^\beta \right| \\
&= \left| a\left\{ \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \right\} \right| \\
&= \left| \frac{a(\beta - \alpha)^3}{6} \right|
\end{aligned}
$$

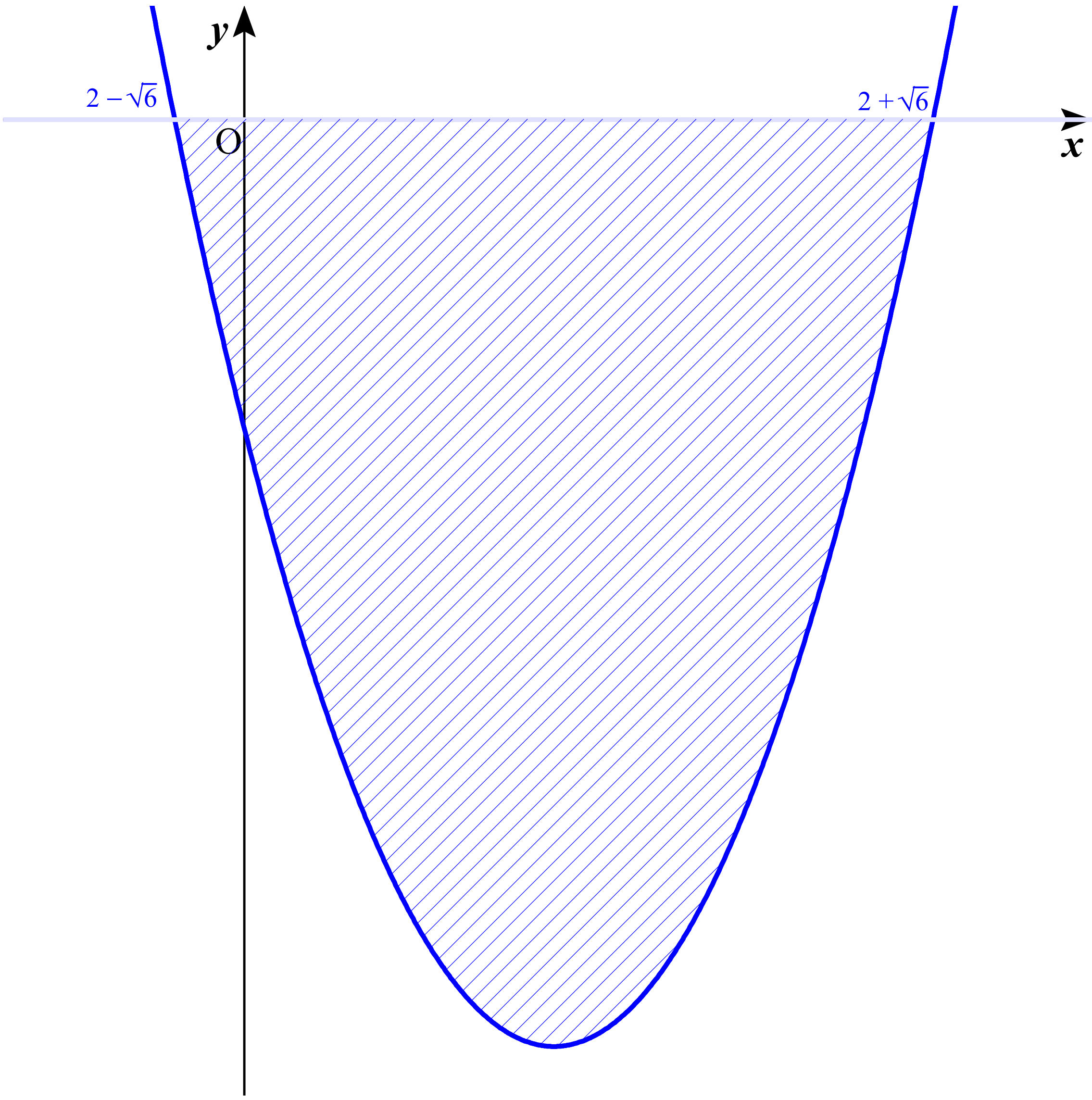
494

(1)

曲線と直線の共有点の x 座標は $x^2-4x-2=0$ を解くことにより，$x=2\pm\sqrt{6}$

よって，

$$\left|\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left\{\left(x^2-4x-2\right)-0\right\}dx\right|=\left|\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left(x^2-4x-2\right)dx\right|$$
$$=\frac{1}{6}\left|2+\sqrt{6}-\left(2-\sqrt{6}\right)\right|^3$$
$$=8\sqrt{6}$$

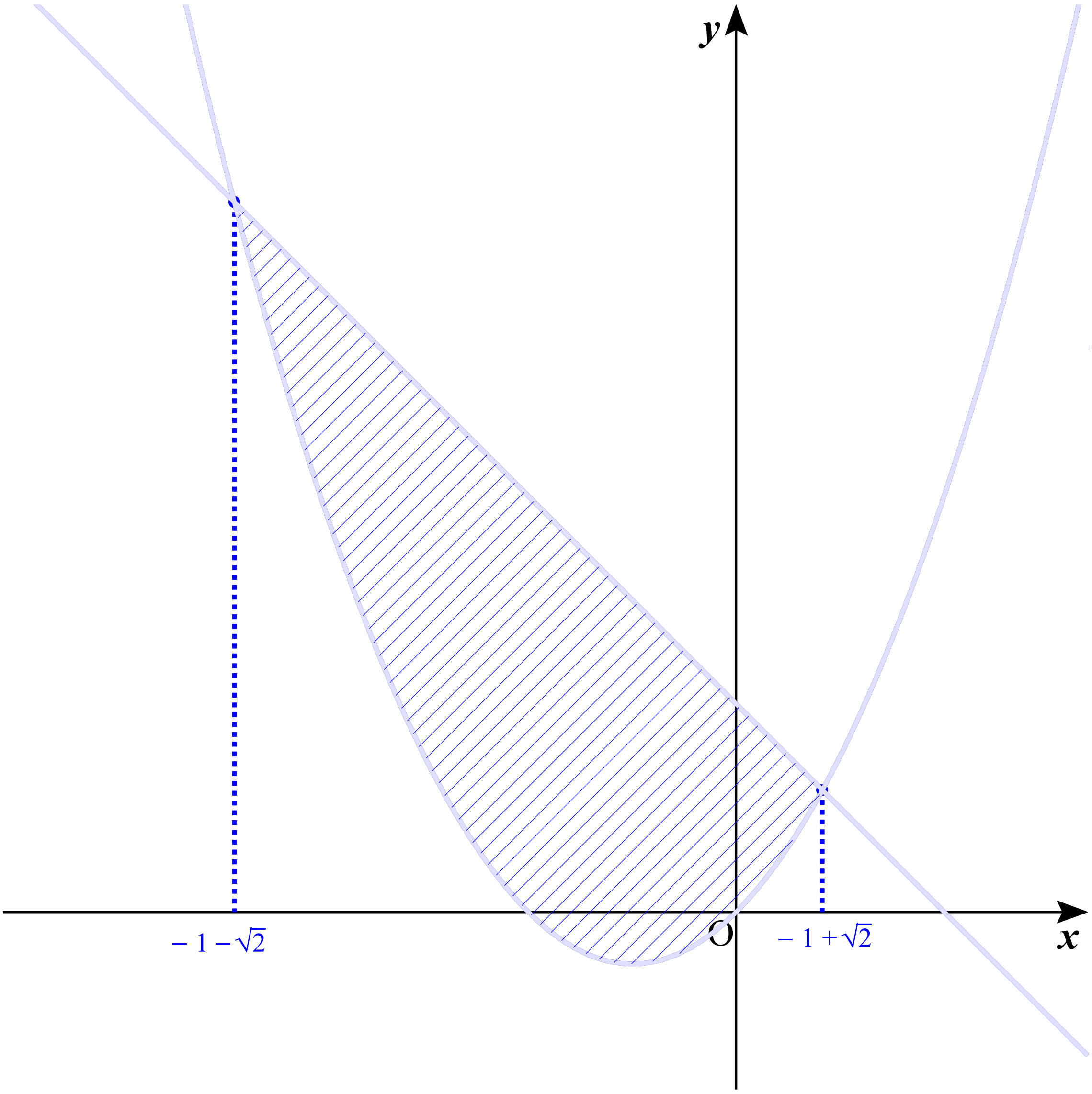


(2)

曲線と直線の共有点の x 座標は $x^2+x=1-x$ を解くことにより， $x=-1\pm\sqrt{2}$

よって，

$$\left|\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}}\left\{x^2+x-(1-x)\right\}dx\right|=\left|\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}}\left(x^2+2x-1\right)dx\right|$$
$$=\frac{1}{6}\left|-1+\sqrt{2}-\left(-1-\sqrt{2}\right)\right|^3$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



(3)

$\left|x^2-x-2\right|=\left|(x+1)(x-2)\right|$ より,

曲線と直線の共有点の x 座標は

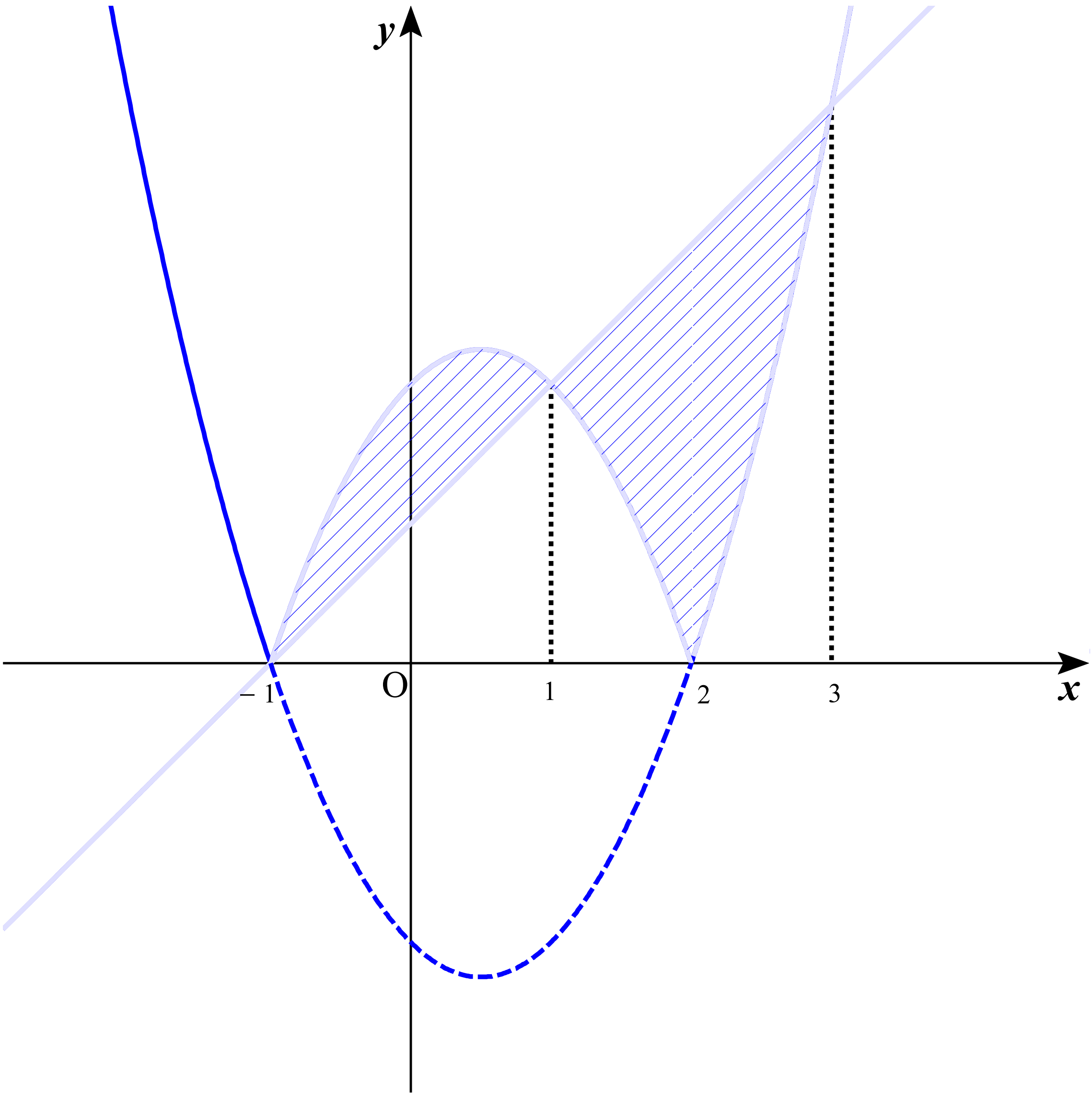
$x\leq -1,\ 2\leq x$ のとき

　$x^2-x-2=x+1$ を解くことにより, $x=-1,\ 3$

$-1\leq x\leq 2$ のとき

　$-x^2+x+2=x+1$ を解くことにより, $x=\pm 1$

よって, 曲線と直線で囲まれた部分は下図のようになる。



解法 1

$$\left|\int_{-1}^{1}\left\{\left(-x^2+x+2\right)-(x+1)\right\}dx\right|+\int_{1}^{2}\left\{x+1-\left(-x^2+x+2\right)\right\}dx+\int_{2}^{3}\left\{x+1-\left(x^2-x-2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\left|1-(-1)\right|^3+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_2^3$$

$$=\frac{13}{3}$$

解法 2

$y=-x^2+x+2$ と $y=x+1$ で囲まれた部分の面積

$$\left|\int_{-1}^{1}\left\{-x^2+x+2-(x+1)\right\}dx\right|=\frac{1}{6}\left|1-(-1)\right|^3$$

$$=\frac{4}{3}$$

$y=x^2-x-2$ と $y=x+1$ で囲まれた部分の面積

$$\left|\int_{-1}^{3}\left\{x^2-x-2-(x+1)\right\}dx\right|=\frac{1}{6}\left|3-(-1)\right|^3$$

$$=\frac{32}{3}$$

$y=x^2-x-2$ と $y=x+1$ で囲まれた部分から除外すべき部分の面積

$$\left|2\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx\right|-\left|\int_{-1}^{1}\left\{-x^2+x+2-(x+1)\right\}dx\right|=2\cdot\frac{1}{6}\left|2-(-1)\right|^3-\frac{4}{3}$$

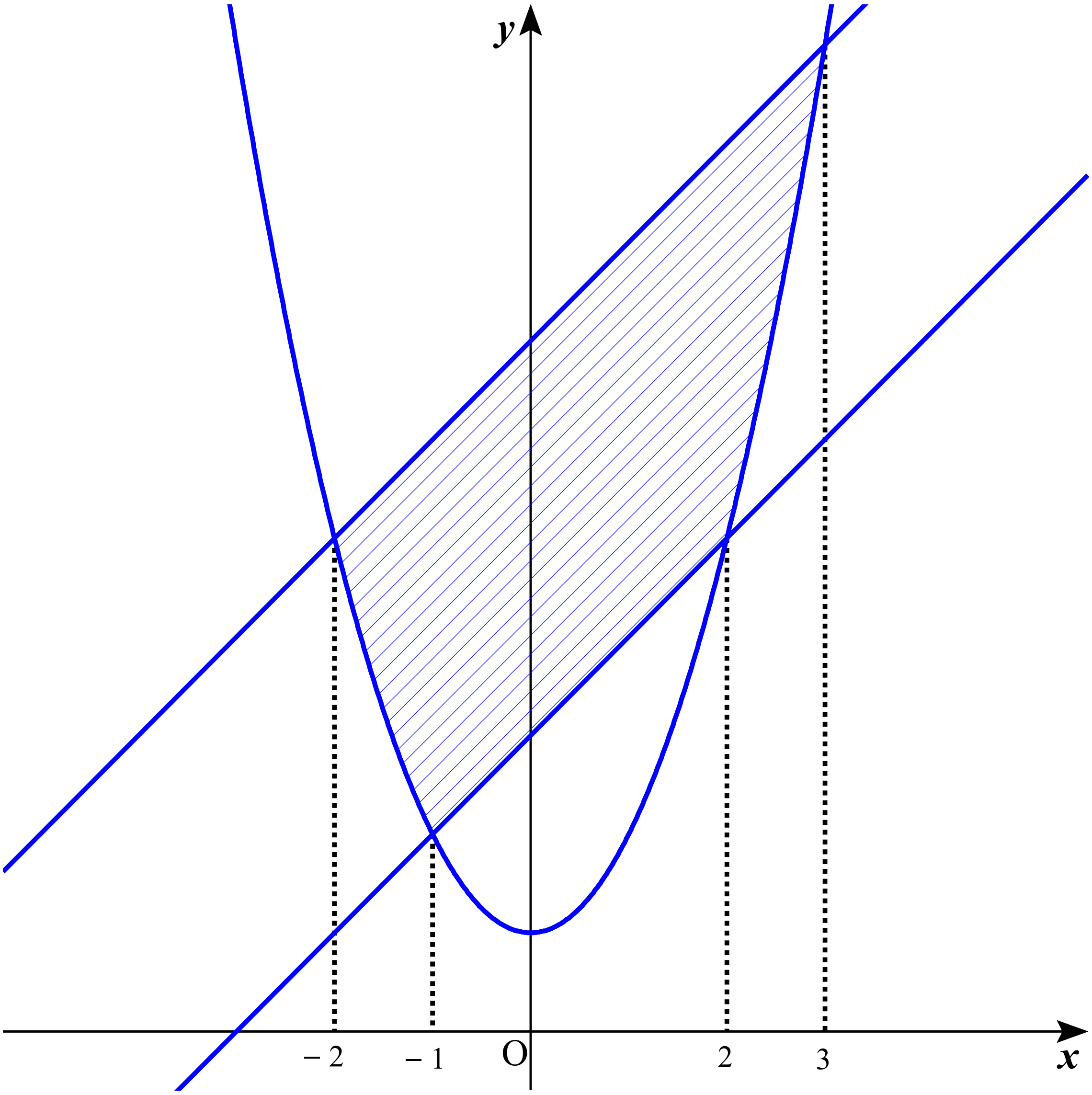
$$=\frac{23}{3}$$

よって,

$$\frac{4}{3}+\frac{32}{3}-\frac{23}{3}=\frac{13}{3}$$

495

$y=x^2+1$ と $y=x+3$ の共有点の x 座標は $x^2+1=x+3$ を解くことにより，$x=-1,\ 2$
よって，共有点は $(-1,\ 2),\ (2,\ 5)$
同様にして，$y=x^2+1$ と $y=x+7$ の共有点を求めると，$(-2,\ 5),\ (3,\ 10)$
よって，下図斜線部の面積を求めればよい。
つまり，$y=x^2+1$ と $y=x+7$ で囲まれた部分の面積と $y=x^2+1$ と $y=x+3$ で囲まれた部分の面積の差をとればよい。



$$\therefore \left|\int_{-2}^{3}\{x^2+1-(x+7)\}dx\right|-\left|\int_{-1}^{2}\{x^2+1=x+3\}dx\right|=\frac{\{3-(-2)\}^3}{6}-\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\frac{49}{3}$$

496

放物線と x 軸との共有点は，$ax-x^2=0$，を解くことにより，$(0,\ 0),\ (a,\ 0)$

よって，放物線と x 軸で囲まれた図形の面積は $\left|\int_0^a (ax-x^2)dx\right|=\dfrac{a^3}{6}$

これが $\dfrac{9}{2}$ と等しいから，$\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{9}{2}$　$\therefore a=3$

497

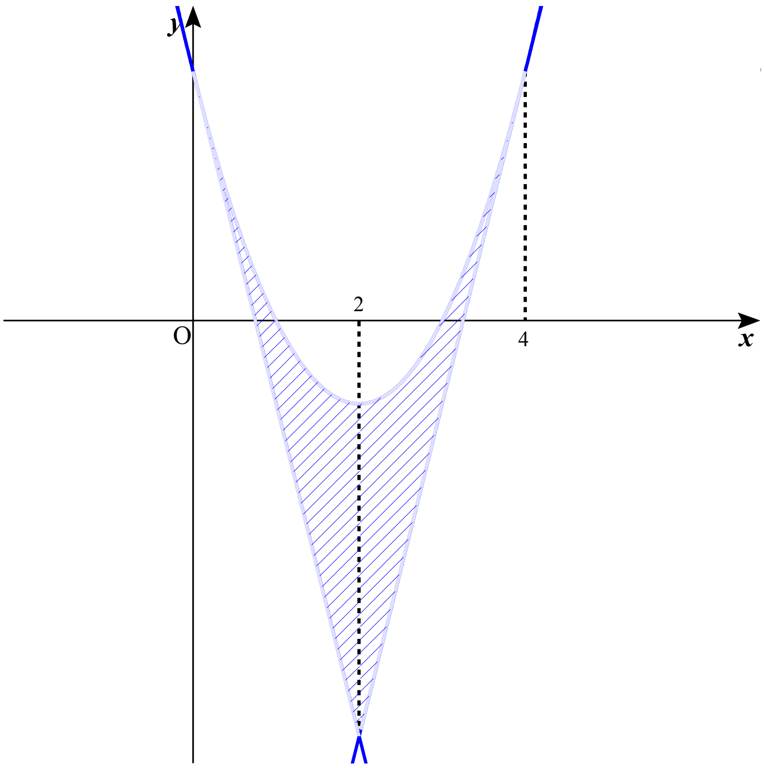
$y'=2x-4$ より，

点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式は，$y=4(x-4)+3$，すなわち $y=4x-13$

点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は，$y=-4(x-0)+3$，すなわち $y=-4x+3$

また，これら 2 つの接線の交点の x 座標は $4x-13=-4x+3$ より，$x=2$

これより，求める部分の面積は下図斜線部



よって，

$$\int_0^2\{x^2-4x+3-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{x^2-4x+3-(4x-13)\}dx=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4$$

t

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{16}{3}$$

補足 1：被積分関数について

$y=ax^2+bx+c$ と $y=mx+n$ の接点の x 座標を t とすると，

$x=t$ は $ax^2+bx+c-(mx+n)=0$ の重解だから，

被積分関数について， $ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-t)^2$ が成り立つ。

問題の場合， $y=x^2-4x+3$ 上の接点の x 座標が 4 と 0 だから，

被積分関数はそれぞれ $(x-4)^2$ と $(x-0)^2$ すなわち x^2 である。

補足 2：2 つの接点の x 座標の平均値＝2 つの接線の交点の x 座標

$y=ax^2+bx+c$ 上の点 (t, at^2+bt+c) を接点とする接線の方程式は， $y'=2ax+b$ より，

$y=(2at+b)(x-t)+at^2+bt+c$ すなわち $y=(2at+b)x-at^2+c$

したがって，接点の x 座標が α，β （$\alpha\neq\beta$）の接線の方程式は，

それぞれ，

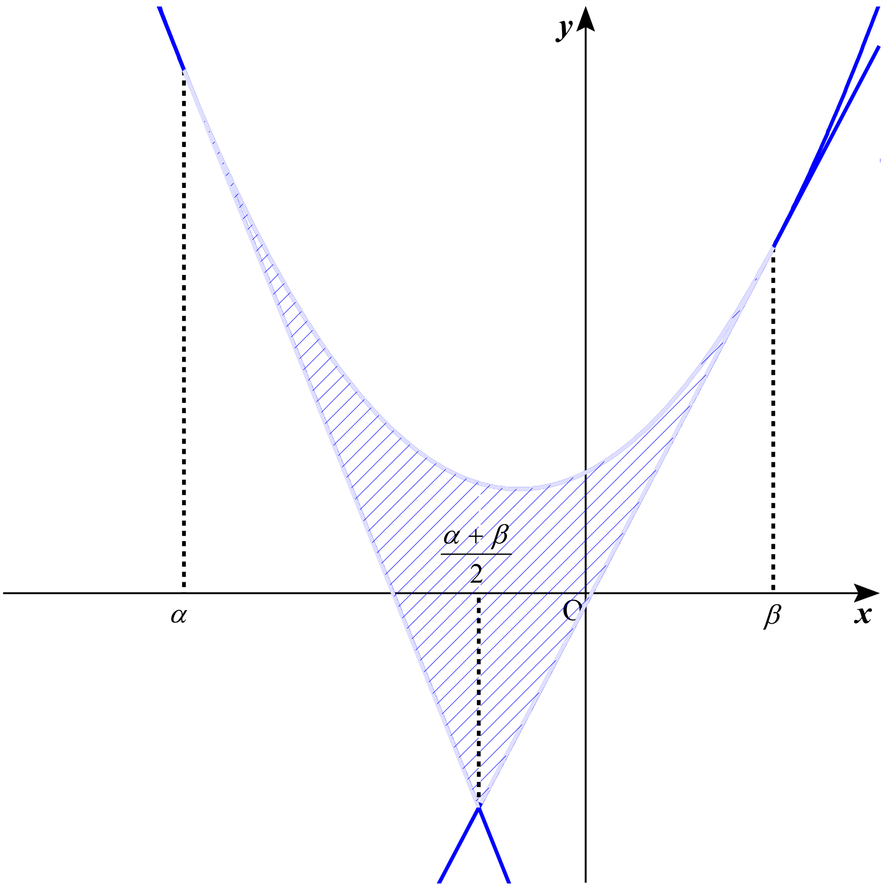
$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$， $y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

である。

よって，これら 2 接線の交点の x 座標は，

$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$ を解くことにより，

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， すなわち 2 つの接点の x 座標の平均値をとる。



補足 3：**補足 1** と**補足 2** から，斜線部の面積を公式化してみる

$y=ax^2+bx+c$ 上の接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ （$\alpha<\beta$）とする 2 つの接線と

$y=ax^2+bx+c$ で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}$ で与えられる。

証明

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} a(x-\beta)^2dx=\left[\frac{a(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{a(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3}{3}+\frac{a\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3}{3}$$

$$=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{12}$$

これを問題 497 に適用すると，

求める面積は $\dfrac{1(4-0)^3}{12}=\dfrac{16}{3}$

498

$\mathrm{P}\left(t,\ t^2+4\right)$とすると，点 P における接線の方程式は， $y'=2x$ より， $y=2t(x-t)+t^2+4$，

すなわち $y=2tx-t^2+4$

よって，この接線と $y=x^2$ の交点の x 座標は， $x^2=2tx-t^2+4$ を解くことにより，

$x=t\pm 2\quad \left(x^2=2tx-t^2+4 \Leftrightarrow (x-t)^2=4\quad \therefore x-t=\pm 2\right)$

ゆえに，求める面積は，

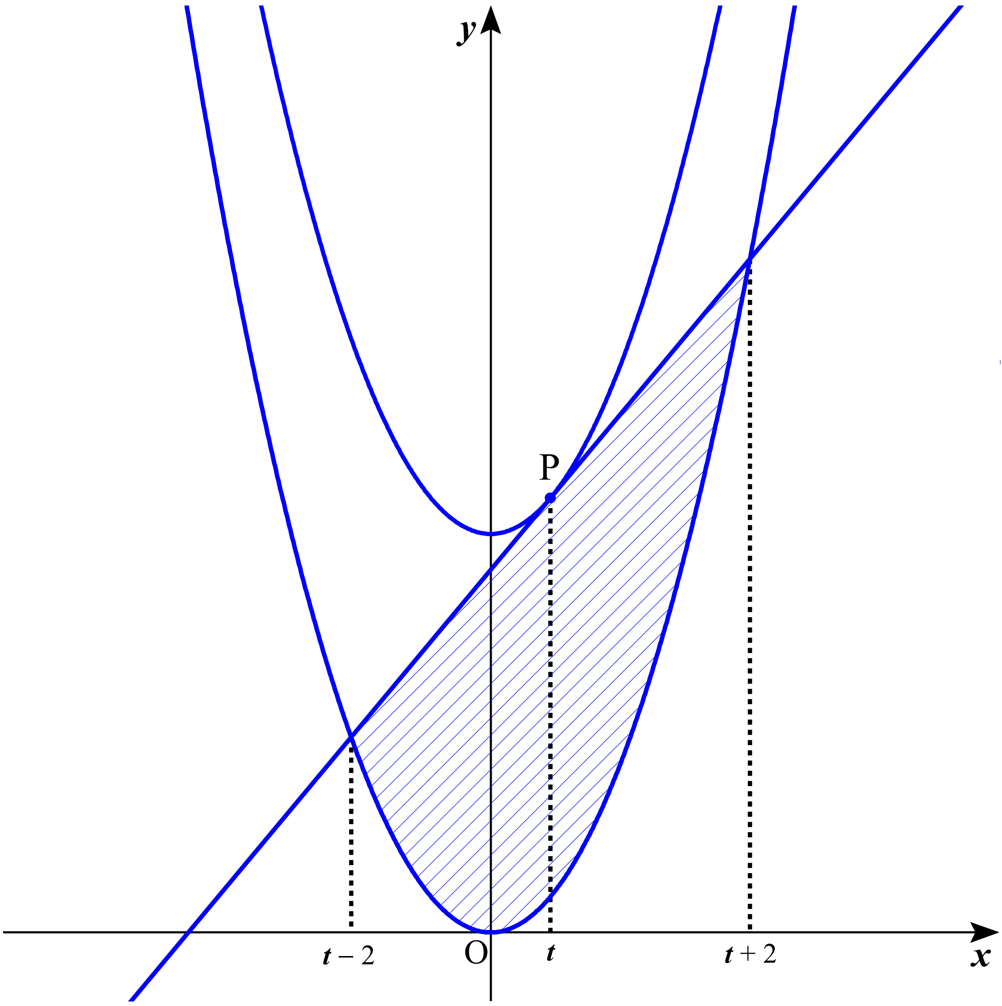
$$\int_{t-2}^{t+2}\left\{\left(2tx-t^2+4\right)-x^2\right\}dx=\int_{t-2}^{t+2}\left(-x^2+2tx-t^2+4\right)dx$$

ここで， $t+2$ と $t-2$ は $x^2-2tx+t^2-4=0$ の解だから，

$$\int_{t-2}^{t+2}\left\{\left(2tx-t^2+4\right)-x^2\right\}dx=\frac{\{(t+2)-(t-2)\}^3}{6}$$

$$=\frac{32}{3}$$

ゆえに，点 P の選び方に関係なく面積は一定である。



499

$y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積

$y=2+x-x^2$ と x 軸との交点の x 座標は，$2+x-x^2=0$ を解くことにより，$x=-1,\ 2$

よって，求める面積は $\dfrac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\dfrac{9}{2}$

点 $(2,\ 0)$ を通る直線 g と $y=2+x-x^2$ で囲まれた部分の面積

直線 g の傾きを m とすると，その方程式は $y=m(x-2)+0$ すなわち $y=mx-2m$

直線 g と $y=2+x-x^2$ の交点の x 座標は $2+x-x^2=mx-2m$，

すなわち $x^2+(m-1)x-2m-2=0$ の解である。

これと 1 つの解が 2 であることから，もう 1 つの解を α とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+2=-(m-1)$　$\therefore \alpha=-m-1$

よって，求める面積は

$$\int_{-m-1}^{2}\{2+x-x^2-(mx-2m)\}dx=\frac{\{2-(-m-1)\}^3}{6}=\frac{(m+3)^3}{6}$$

条件より，$\dfrac{(m+3)^3}{6}=\dfrac{\frac{9}{2}}{2}$　すなわち $(m+3)^3=\dfrac{27}{2}$

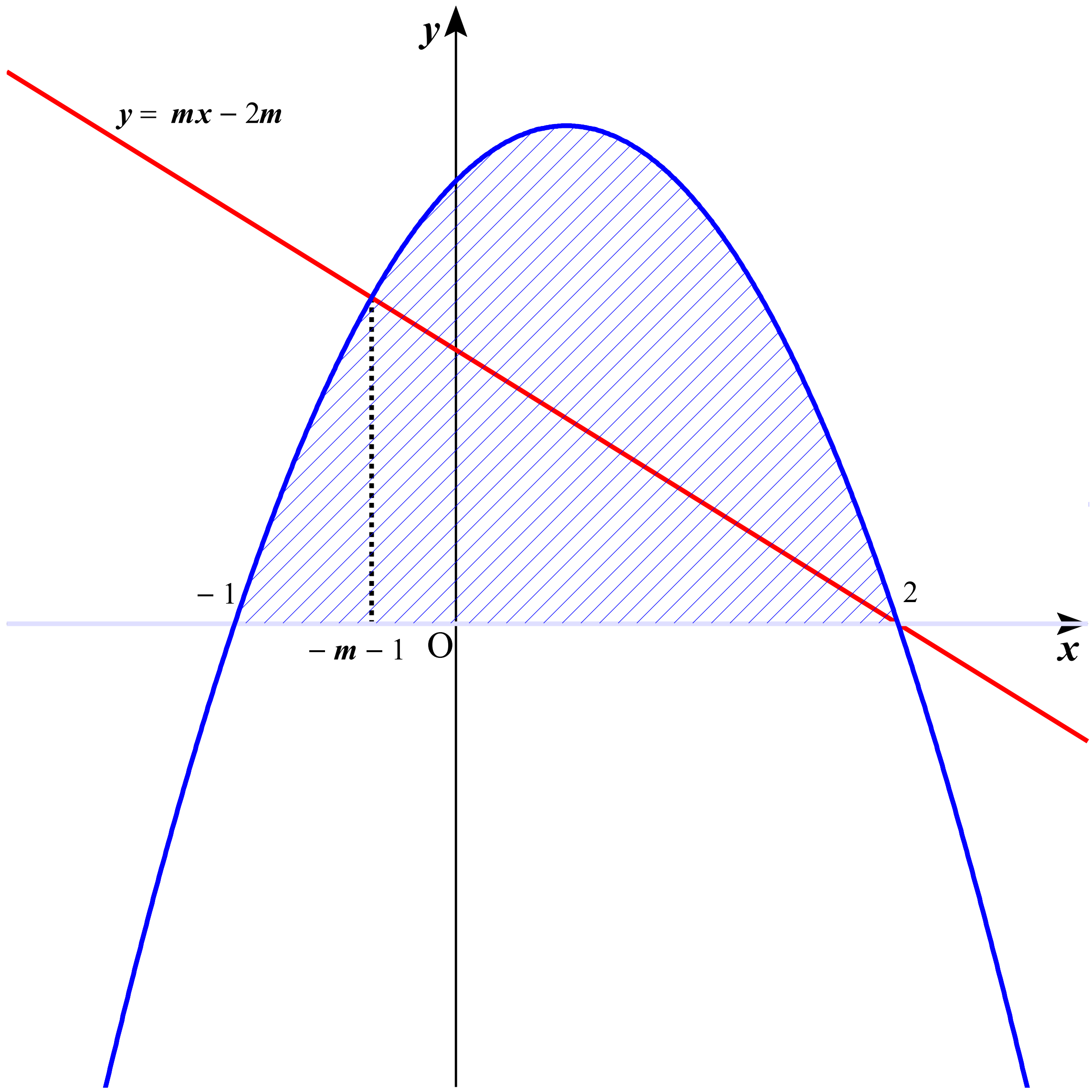
$$\therefore m+3=\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}$$

これと

$$\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

より，

$$m=\frac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$$



y
$y = mx - 2m$
-1
$-m-1$
O
2
x

500

$y=x^2-x-2$ と x 軸で囲まれた図形の面積

$y=x^2-x-2$ と x 軸との交点の x 座標は，$x^2-x-2=0$ を解くことにより，$x=-1,\ 2$

よって，求める面積は $\dfrac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\dfrac{9}{2}$

点 $(-1,\ 0)$ を通る傾きが正の直線 l と $y=x^2-x-2$ で囲まれた部分の面積

直線 l の傾きを m とすると，その方程式は $y=m\{x-(-1)\}+0$ すなわち $y=mx+m$

直線 l と $y=x^2-x-2$ の交点の x 座標は $x^2-x-2=mx+m$，

すなわち $x^2-(m+1)x-m-2=0$ の解である。

これと 1 つの解が -1 であることから，もう 1 つの解を α とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+(-1)=m+1$　$\therefore \alpha=m+2$

よって，求める面積は

$$\int_{-1}^{m+2}\{mx+m-(x^2-x-2)\}dx=\frac{\{m+2-(-1)\}^3}{6}=\frac{(m+3)^3}{6}$$

条件より，$\dfrac{\frac{(m+3)^3}{6}}{2}=\dfrac{9}{2}$　すなわち $(m+3)^3=54$　$\therefore m=3\sqrt[3]{2}-3$

$m>0$ より，直線 l の方程式は $y=\left(3\sqrt[3]{2}-3\right)(x+1)$

501

直線が $x=0$ のとき直線と曲線で囲まれた部分が存在しないので条件を満たさない。

そこで，求める直線の方程式を $y=mx$ とすると，直線と曲線の共有点の x 座標は，

$x^2-2x=mx$ すなわち $x\{x-(m+2)\}=0$ の解より， $x=0,\ m+2$

ここで， $m+2=0$ すなわち $m=-2$ とすると，解は重解をもつ。

すなわち直線と曲線が接する。

したがって，直線と曲線で囲まれた部分が存在しないので条件を満たさない。

よって， $m\neq-2$ であり，

このとき，直線と曲線で囲まれた部分の面積は， $\left|\int_0^{m+2}(x^2-2x-mx)dx\right|=\left|\frac{(m+2)^3}{6}\right|$

これが $\frac{32}{3}$ と等しいとき， $\left|\frac{(m+2)^3}{6}\right|=\frac{32}{3}$

よって， $|m+2|=4$

すなわち $m=-6,\ 2$

ゆえに，求める直線の方程式は $y=-6x,\ y=2x$

502

直線と放物線が異なる 2 点で交わるためには，

$x^2+x-1=mx$ すなわち $x^2+(1-m)x-1=0$　・・・①

が異なる 2 実数解をもたなければならないが，

①の判別式を D とすると， $D=(1-m)^2+4>0$ だから， m は任意の実数でよい。

そこで，①の異なる 2 実数解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$，

直線と放物線で囲まれた部分の面積を S とすると，

$S=\left|\int_\alpha^\beta(x^2+(1-m)x-1)dx\right|=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

ここで， $\beta-\alpha>0$，①について，解と係数の関係より $\alpha+\beta=m-1,\ \alpha\beta=-1$ だから，

$\beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(m-1)^2+4}$

$\therefore S=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-1)^2+4}\right\}^3$

ゆえに， $m=1$ のとき面積は最小値 $\frac{(\sqrt{4})^3}{6}=\frac{4}{3}$ をとる。

503

$y'=3x^2-10x+5$ より，接線の方程式は $y=2(x-3)+5$ すなわち $y=2x-1$

$y=x^3-5x^2+5x+8$ と $y=2x-1$ の共有点の x 座標は $x^3-5x^2+5x+8=2x-1$

すなわち $x^3-5x^2+3x+9=0$ の解であり，$x=3$ はその重解だから，

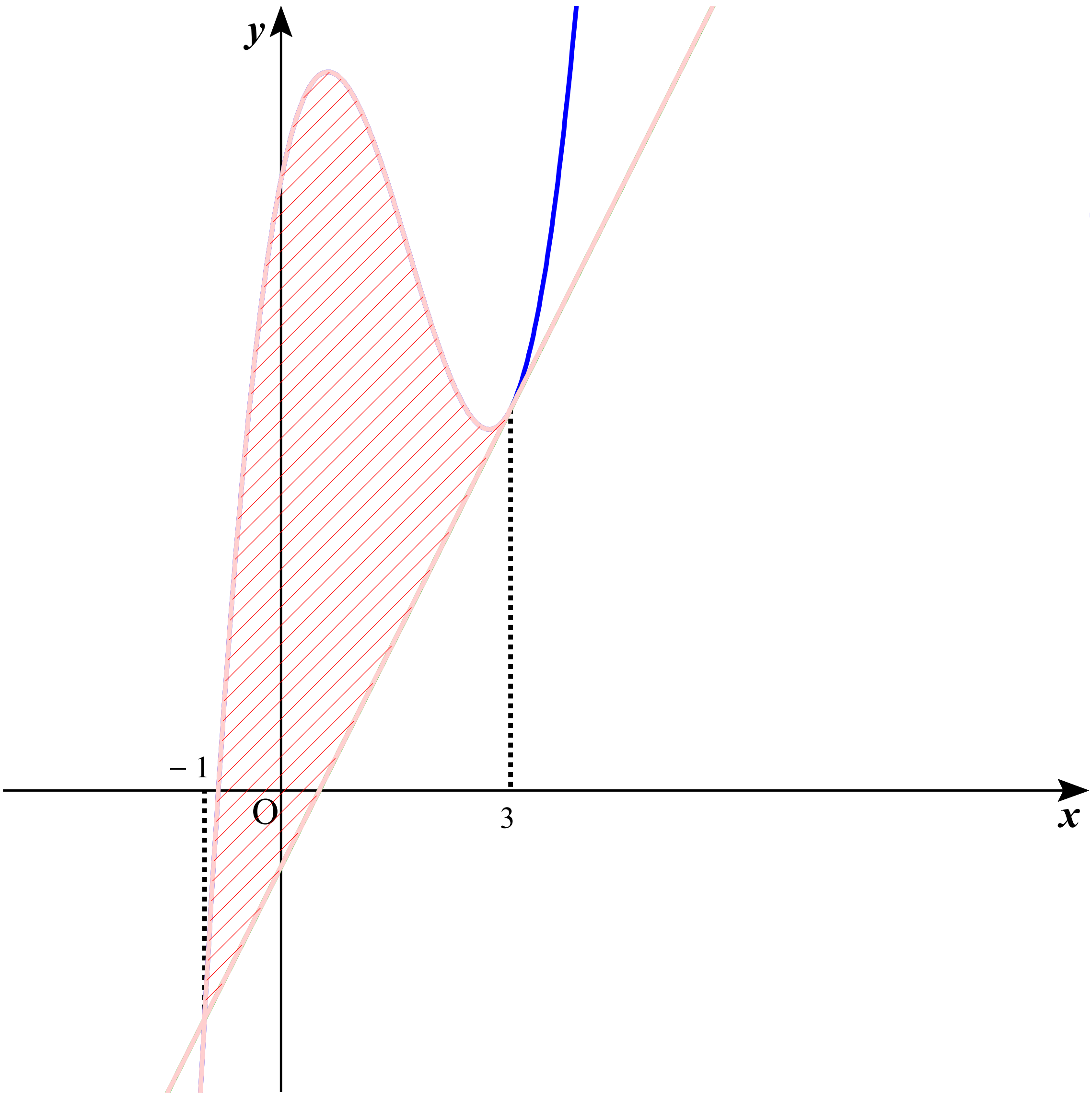
もう 1 つの共有点の x 座標，

すなわち $x^3-5x^2+3x+9=0$ の解のうち $x=3$ でない方の解を α とすると，

解と係数の関係より，$3+3+\alpha=-(-5)$　$\therefore \alpha=-1$

よって，$y=2x-1$ は曲線 $y=x^3-5x^2+5x+8$ と点 $(3,\ 5)$ で接し，点 $(-1,\ -3)$ で交わる。

したがって，面積 S は下図の面積である。



$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)^2(x+1)$，$-1\leq x\leq 3$ において $x^3-5x^2+5x+8\geq 2x-1$ より，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{3}(x-3)^2(x+1)dx\\
&=\int_{-1}^{3}(x-3)^2\{(x-3)+4\}dx\\
&=\int_{-1}^{3}\{(x-3)^3+4(x-3)^2\}dx\\
&=\left[\frac{1}{4}(x-3)^4+\frac{4}{3}(x-3)^3\right]_{-1}^{3}\\
&=-\left\{\frac{1}{4}(-1-3)^4+\frac{4}{3}(-1-3)^3\right\}\\
&=\frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

504

(1)

略解 1

曲線と直線の共有点の x 座標は，$-x^3+3x=x$ の解より，$x=0,\ \pm\sqrt{2}$

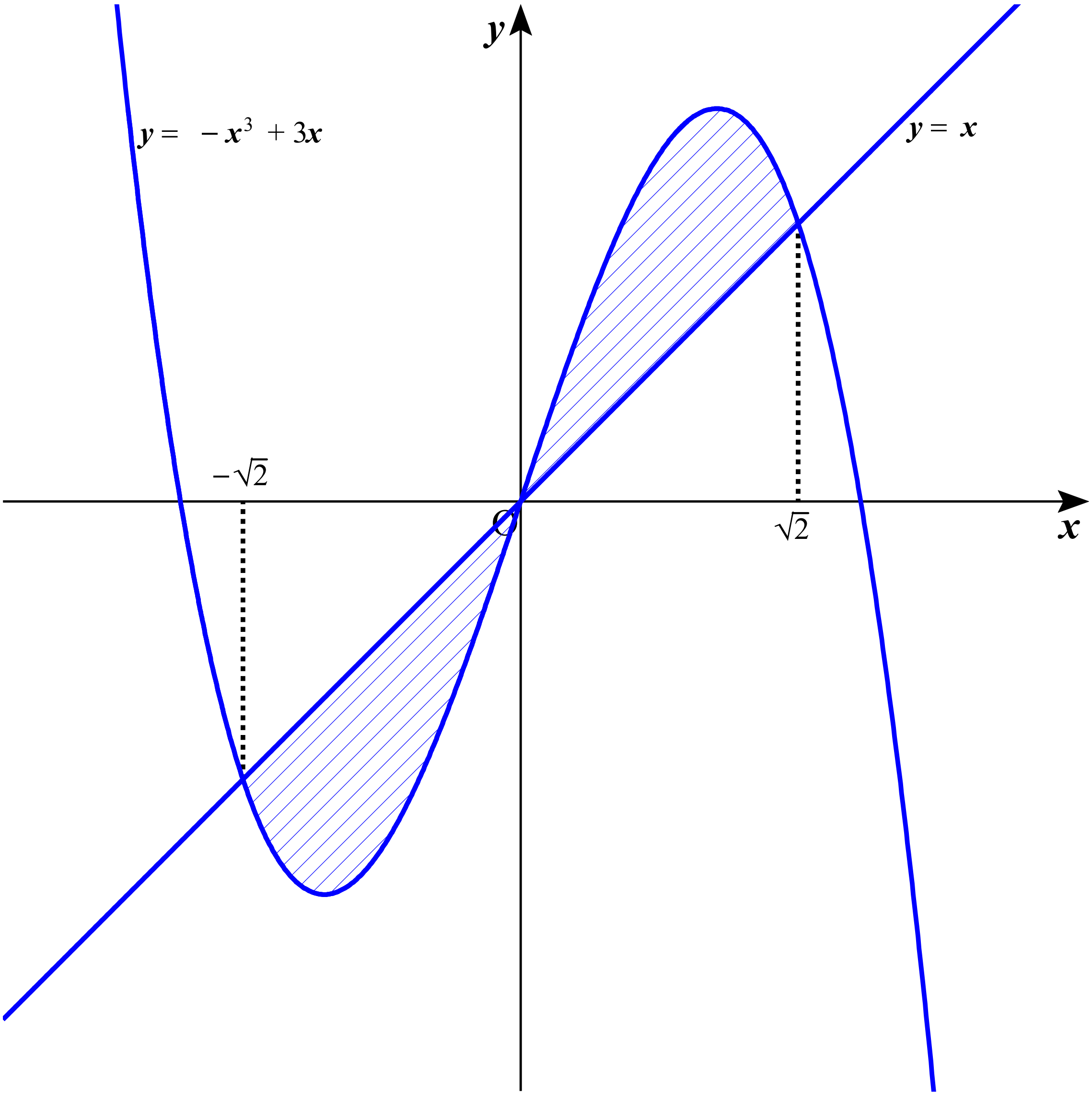
これと

$-\sqrt{2}\leq x\leq 0$ において $-x^3+3x\leq x$

$0\leq x\leq\sqrt{2}$ において $-x^3+3\geq x$

から，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{x-(-x^3+3x)\}dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{(-x^3+3x)-x\}dx\\
&=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx\\
&=-\int_{0}^{-\sqrt{2}}(x^3-2x)dx-\int_{0}^{\sqrt{2}}(x^3-2x)dx\\
&=-\left(\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]_{0}^{-\sqrt{2}}+\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right)\\
&=2
\end{aligned}
$$



y
y = −x³ + 3x
y = x
−√2
O
√2
x

略解 2

曲線 $y=-x^3+3x$，直線 $y=x$ のいずれも奇関数だから，

曲線と直線の差を表す関数 $y=-x^3+2x$ は奇関数である。

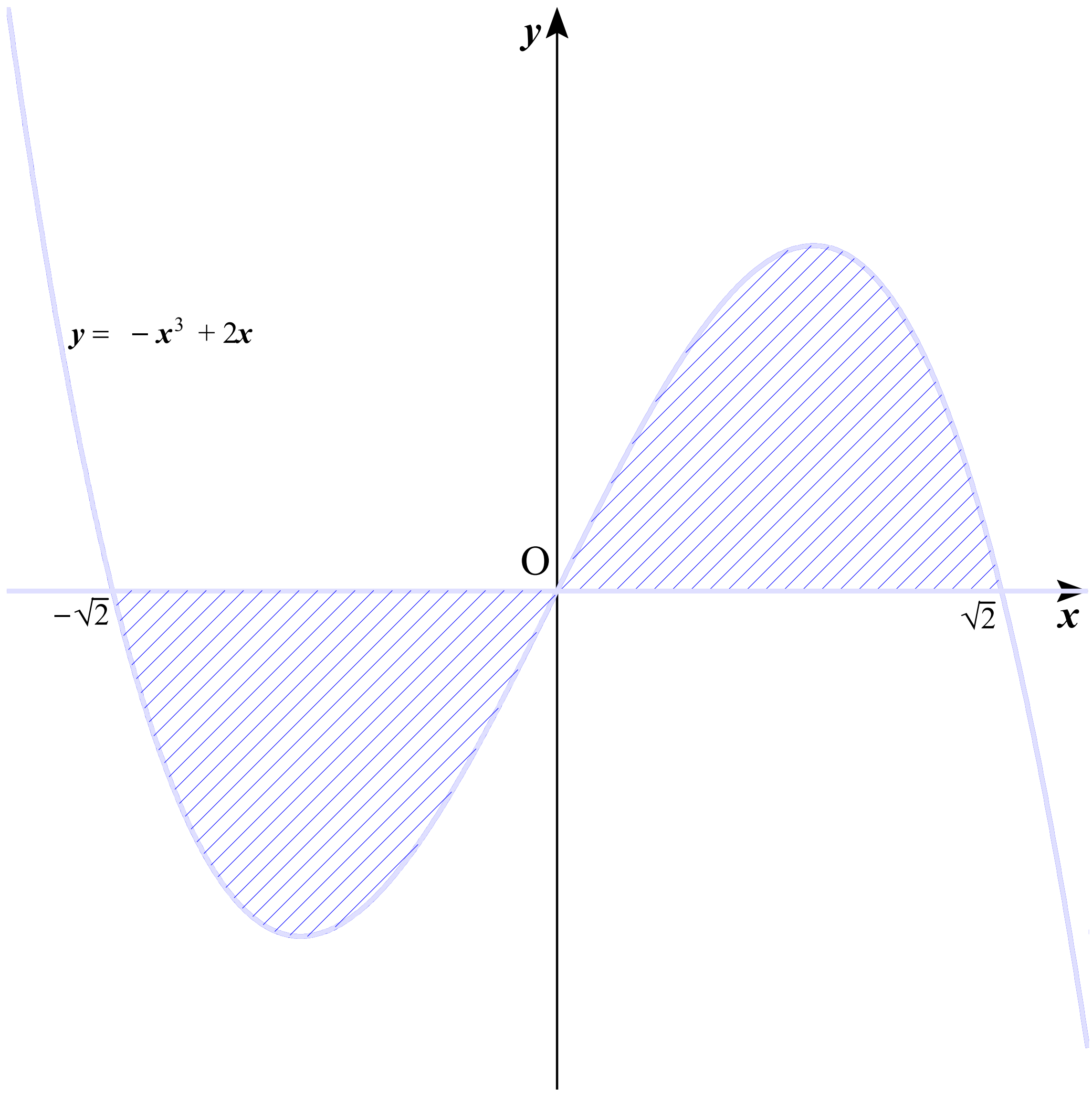
すなわち原点に関して対称である。

これと求める面積は $y=x^3-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積と等しいことから，

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}\left(-x^3+2x\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2$$



(2)

略解

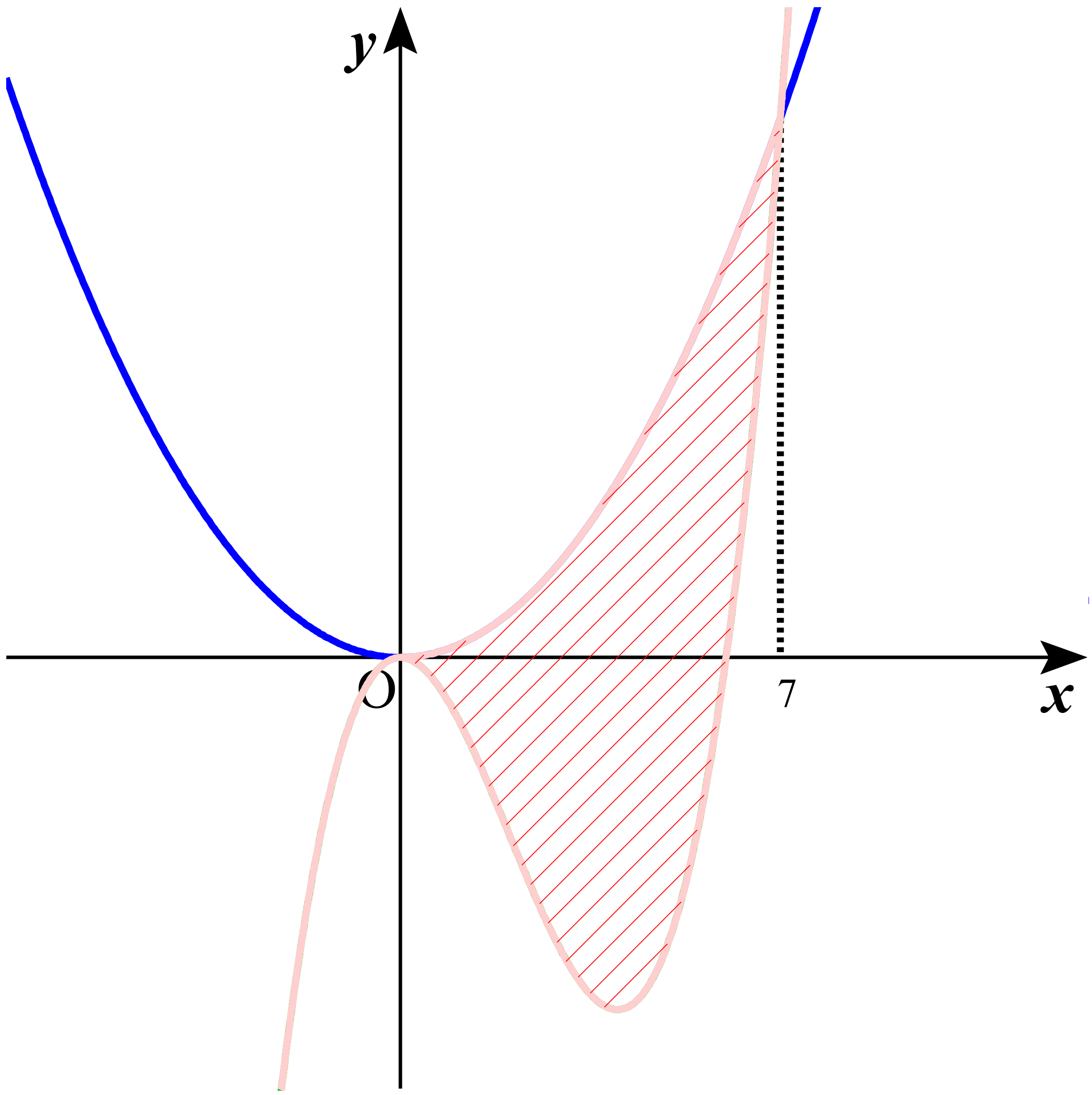
$0 \leq x \leq 7$ において $x^2 \geq x^3 - 6x^2$ より,

$$S = \int_0^7 \left\{x^2 - \left(x^3 - 6x^2\right)\right\}dx$$

$$= \int_0^7 \left(7x^2 - x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{7}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^7$$

$$= \frac{2401}{12}$$



505

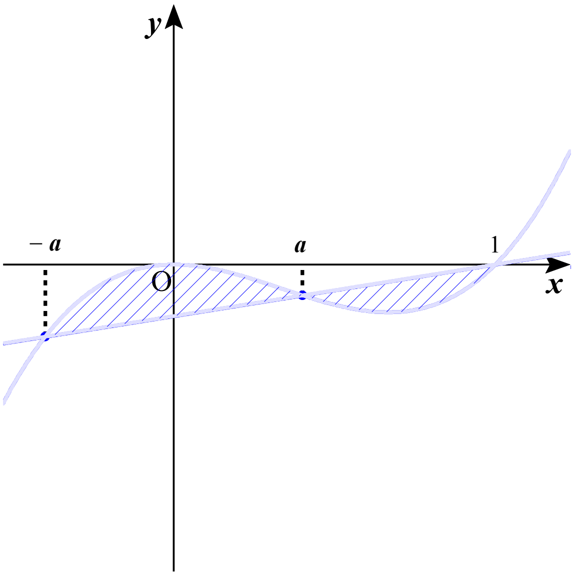
解法 1

曲線と直線の交点の x 座標は $x^3-x^2=a^2(x-1)$ の解だから，

$$x^3-x^2=a^2(x-1)\Leftrightarrow x^2(x-1)=a^2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-a)(x+a)=0$$

より， $x=-a,\ a,\ 1$

これと $-a<a<1$ より， $y=x^3-x^2$ と $y=a^2(x-1)$ で囲まれた部分は下図のようになる。



$a\le x\le 1$ において $a^2(x-1)\ge x^3-x^2$， $-a\le x\le a$ において $x^3-x^2\ge a^2(x-1)$ だから，

2 つの図形の面積の差は

$$\int_a^1\left\{a^2(x-1)-\left(x^3-x^2\right)\right\}dx-\int_{-a}^a\left\{\left(x^3-x^2\right)-a^2(x-1)\right\}dx$$
$$=\int_a^1\left(-x^3+x^2+a^2x-a^2\right)dx-\int_{-a}^a\left(x^3-x^2-a^2x+a^2\right)dx$$
$$=\int_a^1\left(-x^3+x^2+a^2x-a^2\right)dx+\int_{-a}^a\left(-x^3+x^2+a^2x-a^2\right)dx$$
$$=\int_{-a}^1\left(-x^3+x^2+a^2x-a^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{a^2}{2}x^2-a^2x\right]_{-a}^1$$
$$=-\frac{a^4}{4}-\frac{2}{3}a^3-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}$$
$$=-\frac{1}{12}\left(3a^4+8a^3+6a^2-1\right)$$

2 つの図形の面積が等しいとき，その差は 0 だから， $3a^4+8a^3+6a^2-1=0$

これと $3a^4+8a^3+6a^2-1=(a+1)^3(3a-1)$， $0<a<1$ より， $a=\dfrac{1}{3}$

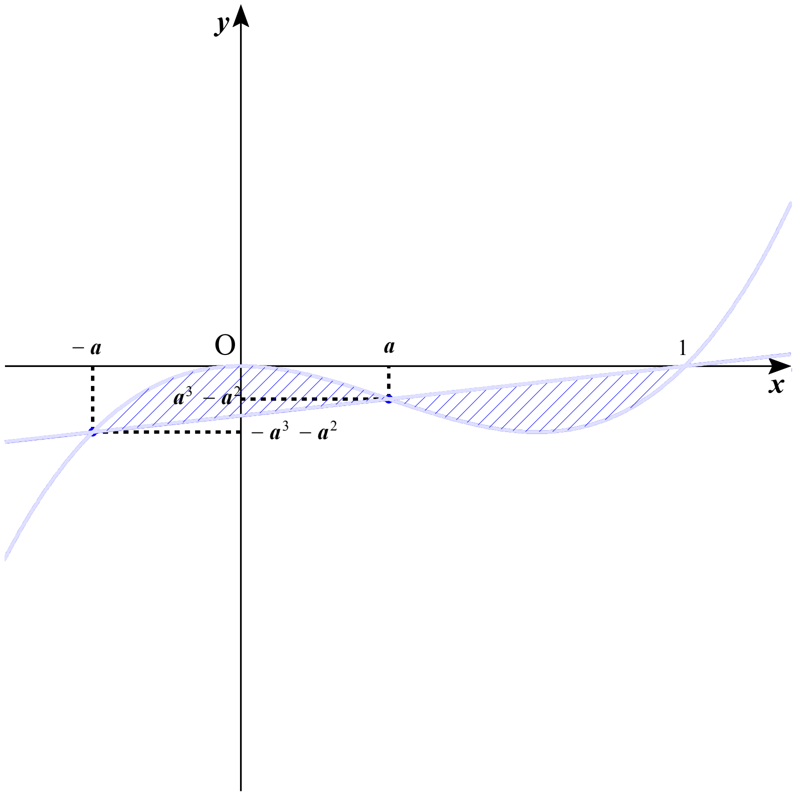
解法 2

曲線と直線の交点の x 座標は $x^3-x^2=a^2(x-1)$ の解だから,

$$x^3-x^2=a^2(x-1) \Leftrightarrow x^2(x-1)=a^2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-a)(x+a)=0$$

より, $x=-a,\ a,\ 1$

これと $-a<a<1$ より, $y=x^3-x^2$ と $y=a^2(x-1)$ で囲まれた部分は下図のようになる。



したがって, 曲線 $y=x^3-x^2$ がその曲線上の点 $(a,\ a^3-a^2)$ に関して対称であれば,
その曲線と $(a,\ a^3-a^2)$ を通る直線で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなる。
問題の場合, 2 つの図形の面積が等しくなるとき,
$(-a,\ -a^3-a^2)$ と $(1,\ 0)$ が $(a,\ a^3-a^2)$ に関して対称となるから,
$(-a,\ -a^3-a^2)$ と $(1,\ 0)$ の中点の座標が $(a,\ a^3-a^2)$ と一致する。

よって, $\dfrac{-a+1}{2}=a$ かつ $\dfrac{-a^3-a^2}{2}=a^3-a^2$ より, $a=\dfrac{1}{3}$

これは $0<a<1$ を満たす。

補足:3 次関数の点対称点の簡単な求め方

3 次関数 $y=f(x)$ は $y''=0$ となる点に関して対称である。

$y=x^3-x^2$ がその曲線上の点 $(a,\ a^3-a^2)$ に関して対称のとき,

$y'=3x^2-2x$, $y''=6x-2$ より, $0=6a-2$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

解法 3

曲線と直線で囲まれた $a \leq x \leq 1$ の部分の面積

$\int_a^1 \{a^2(x-1)-(x^3-x^2)\}dx = \int_a^1 -(x+a)(x-a)(x-1)dx$ より，

$y=(x+a)(x-a)(x-1)$ と x 軸で囲まれた $a \leq x \leq 1$ の部分の面積と等しい。

曲線と直線で囲まれた $-a \leq x \leq a$ の部分の面積

$\int_{-a}^a \{(x^3-x^2)-a^2(x-1)\}dx = \int_{-a}^a (x+a)(x-a)(x-1)dx$ より，

$y=(x+a)(x-a)(x-1)$ と x 軸で囲まれた $-a \leq x \leq a$ の部分の面積と等しい。

したがって，

$y=(x+a)(x-a)(x-1)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値を求めればよい。

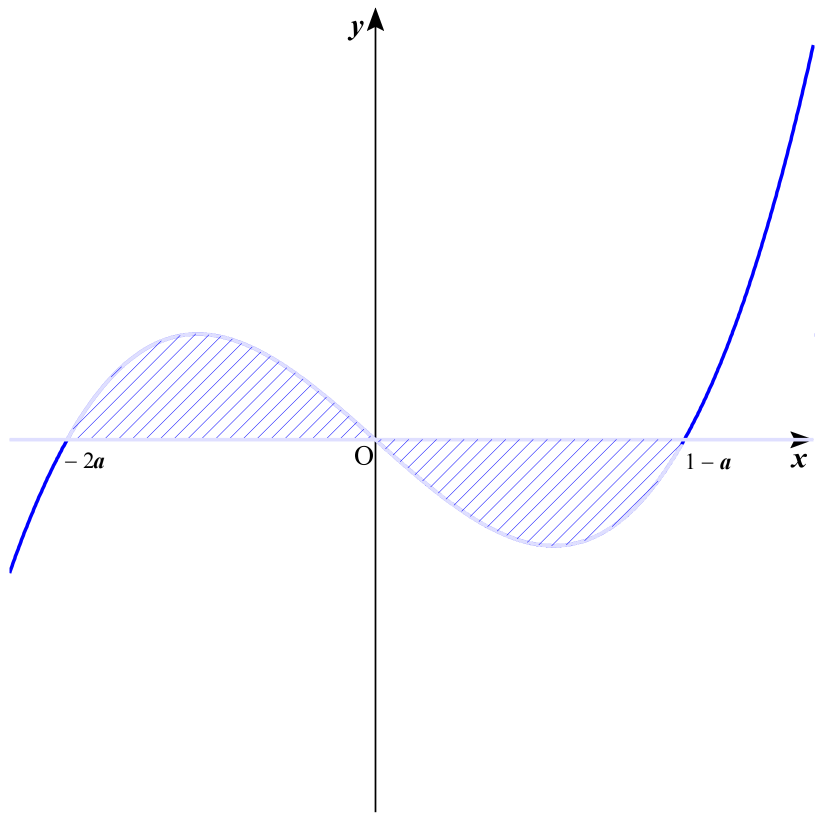
$y=(x+a)(x-a)(x-1)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しいとき，

$y=(x+a)(x-a)(x-1)$ を x 軸方向に $-a$ だけ平行移動してできる関数

$y=(x+2a)x(x+a-1)$ のグラフは原点に関して対称である。

したがって，$(-2a,\ 0)$ と $(-a+1,\ 0)$ の中点は原点である。

よって，$\dfrac{-2a+(-a+1)}{2}=0 \quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$



506

(1)

$x=y^2$ ($0\leq y\leq 1$) と y 軸すなわち $x=0$ で囲まれた部分の面積を求めればよいから,

$$S=\int_0^1(x-0)dy$$
$$=\int_0^1 y^2dy$$
$$=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

(2)

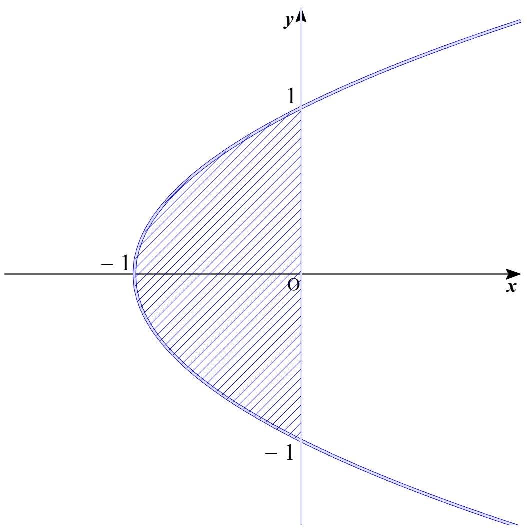
$x=y^2-1$ と y 軸すなわち $x=0$ で囲まれた部分の面積を求めればよい。

$x=y^2-1$ と y 軸の交点の y 座標は $0=y^2-1$ より, $y=\pm1$ であり,

$-1\leq y\leq 1$ において, $y^2-1\leq 0$ だから,

$$S=\int_{-1}^1(0-x)dy$$
$$=\int_{-1}^1(-y^2+1)dy$$
$$=2\int_0^1(-y^2+1)dy$$
$$=2\left[-\frac{y^3}{3}+y\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

あるいは, $\frac{1}{6}$ 公式を利用して, $S=\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}=\frac{4}{3}$



(3)

$$S=\int_{-1}^{0}\left(-y^2-y\right)dy$$
$$=\left[-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{6}$$

あるいは，$\frac{1}{6}$公式を利用して，$S=\frac{\{0-(-1)\}^3}{6}=\frac{1}{6}$