

微分法と積分法 演習問題

45

(1)

商 $x-1$, 余り $-6x+3$

(2)

$$f'(x)=0 \text{ のとき, } x^2-2x-2=0 \text{ より, } x=1\pm\sqrt{3}$$

よって, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	極大値	$\downarrow$	極小値	$\uparrow$

 $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき, $x^2-2x-2=0$ であり,(1) より, $f(x)=(x-1)(x^2-2x-2)-6x+3$ だから,

$$f(1-\sqrt{3})=-6(1-\sqrt{3})+3=-3+6\sqrt{3}$$

$$f(1+\sqrt{3})=-6(1+\sqrt{3})+3=-3-6\sqrt{3}$$

以上より,

 $x=1-\sqrt{3}$ のとき極大値 $-3+6\sqrt{3}$, $x=1+\sqrt{3}$ のとき極小値 $-3-6\sqrt{3}$ をとる。

46

(1)

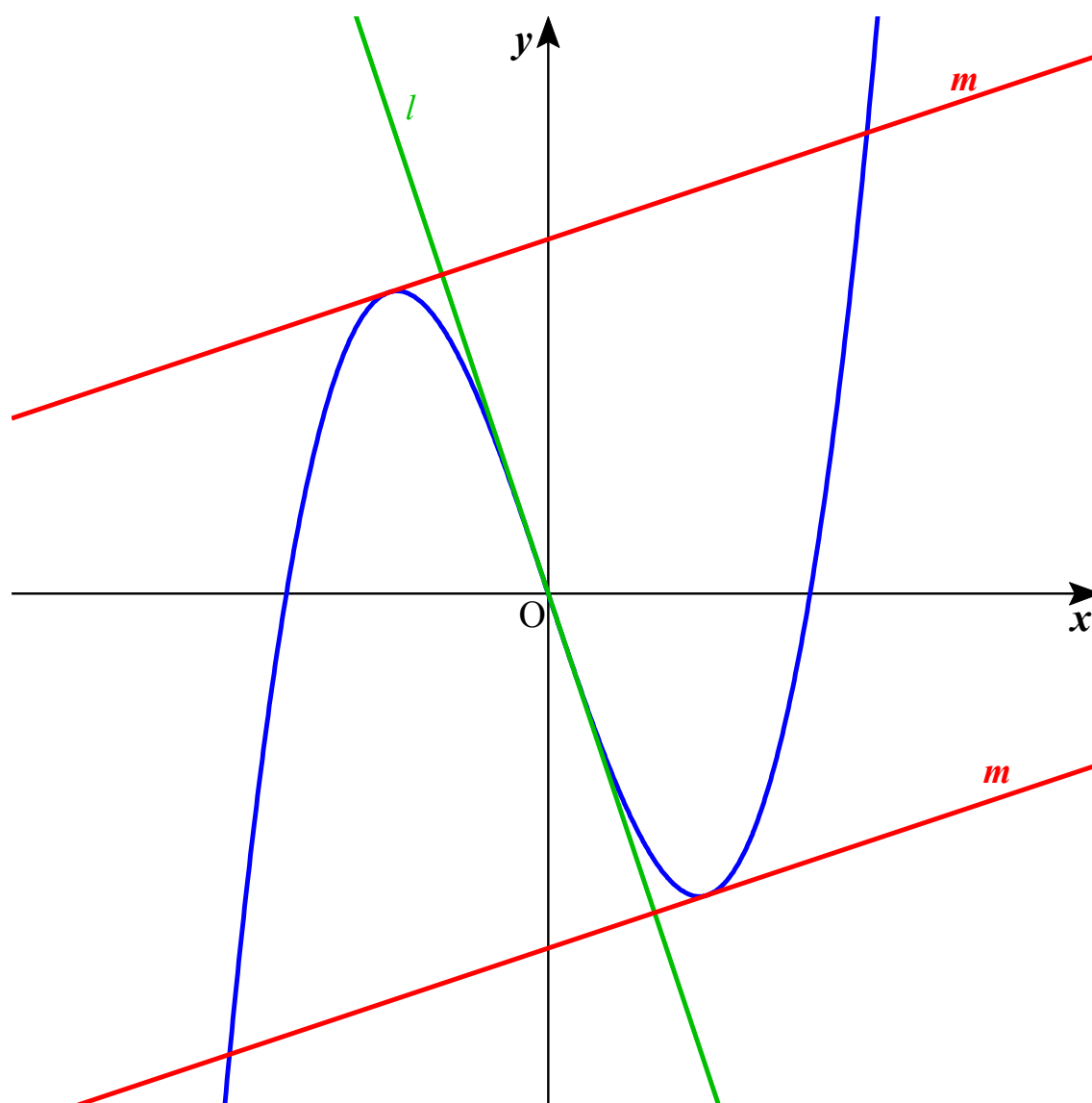
 $y'=3x^2-3$ より, 原点 $(0,0)$ における曲線 C の接線の傾きは -3 よって, その接線の方程式は $y=-3x$

(2)

接線 m と曲線 C の接点の座標を (t, t^3-3t) とすると,接線 m の方程式は $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$, すなわち $y=(3t^2-3)x-2t^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$ これが $P(a, -3a)$ を通るから, $-3a=(3t^2-3)a-2t^3 \therefore t^2(2t-3a)=0$ 条件より $t \neq 0$ だから $t=\frac{3}{2}a$ これを①に代入し整理することにより, 接線 m の方程式は $y=\left(\frac{27}{4}a^2-3\right)x-\frac{27}{4}a^3$

(3)

$$\left(\frac{27}{4}a^2-3\right) \cdot (-3) = -1 \text{ より, } a^2 = \frac{40}{81} \therefore a = \pm \frac{2\sqrt{10}}{9}$$



47

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x^2 - 6(a+2)x + 12a \\
 &= 6\{x^2 - (a+2)x + 2a\} \\
 &= 6(x-a)(x-2)
 \end{aligned}$$

$f(x)$ が極値をもたないとき $f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもたないから $a=2$

あるいは,

$f(x)$ が極値をもたないとき $f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもたないから

$x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ の判別式を D とすると, $D \leq 0$

これと $D = (a+2)^2 - 8a = (a-2)^2$ より, $a=2$

(2)

$a < 2$ のとき

x	...	a	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	極大値	↓	極小値	↑

より,

$$\text{極大値は } f(a) = -a^3 + 6a^2$$

$a > 2$ のとき

x	...	2	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	極大値	↓	極小値	↑

より,

$$\text{極大値は } f(2) = 12a - 8$$

(3)

$a < 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 -a^3 + 6a^2 = 32 &\Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 32 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a+2)(a-4)^2 = 0
 \end{aligned}$$

$a < 2$ より, $a = -2$

$a > 2$ のとき

$$12a - 8 = 32 \text{ より, } a = \frac{10}{3}$$

これは $a > 2$ を満たす。

以上より,

$$a = -2, \frac{10}{3}$$

48

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 3t = 3(x^2 - t) \text{ より, } t \leq 0 \text{ ならば } f'(x) \geq 0$$

よって, $f(x)$ は単調に増加するから, $g(t) = f(1)$

$$\text{これと } f(1) = -2t + 1 \text{ から, } g(t) = -2t + 1$$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 - 3t = 3(x^2 - t), \quad 0 < t < 1 \text{ より, 増減表は次のようになる。}$$

x	0	...	$\sqrt{t}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	t	↓	極小値	↑	$-2t + 1$

これより, 取り得る最大値は t または $-2t + 1$ であるから,

$$t \geq -2t + 1 \text{ かつ } 0 < t < 1 \text{ のとき, すなわち } \frac{1}{3} \leq t < 1 \text{ のとき, } g(t) = t$$

$$t < -2t + 1 \text{ かつ } 0 < t < 1 \text{ のとき, すなわち } 0 < t < \frac{1}{3} \text{ のとき, } g(t) = -2t + 1$$

(3)

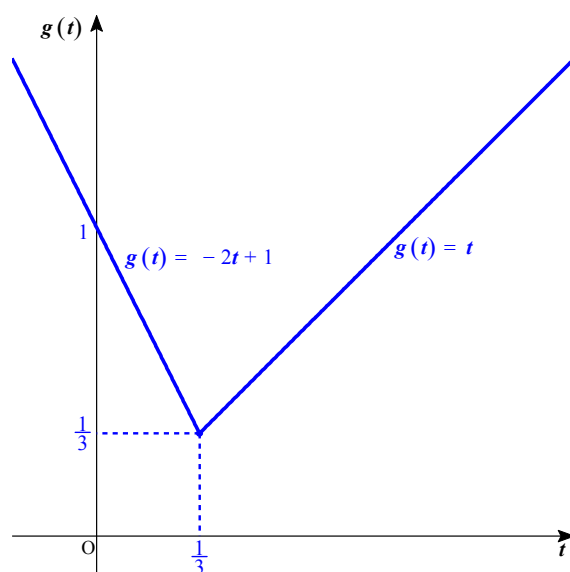
$t \geq 1$ のとき

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において } f'(x) = 3x^2 - 3t = 3(x^2 - t) \leq 0$$

よって, $0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は単調に減少するから, $g(t) = f(0)$

$$\text{これと } f(0) = t \text{ より, } g(t) = t$$

$$(1), (2) \text{ と合わせると, } g(t) = \begin{cases} -2t + 1 & \left(t < \frac{1}{3} \right) \\ t & \left(t \geq \frac{1}{3} \right) \end{cases}$$



49

$$f(x) = x^2 + p \left(p = \int_0^1 g(t) dt \right) \quad \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x \int_0^1 f(t) dt \\ &= x \int_0^1 (t^2 + p) dt \\ &= x \left[\frac{t^3}{3} + pt \right]_0^1 \\ &= x \left(\frac{1}{3} + p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 \left\{ t \left(\frac{1}{3} + p \right) \right\} dt \\ &= \left(p + \frac{1}{3} \right) \int_0^1 t dt \\ &= \left(p + \frac{1}{3} \right) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$p = \int_0^1 g(t) dt \text{ より, } p = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{3} \right) \quad \therefore p = \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに, } f(x) = x^2 + \frac{1}{3}, g(x) = \frac{2}{3}x$$

50

(1)

関数 $f(x)$ が極大値をもつならば関数 $f'(x)$ の値が正から負に変わる実数 x が存在し,
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ より, これは $3x^2 + 2ax + b = 0$ が異なる 2 実数解をもつことと同値で

ある。よって, $3x^2 + 2ax + b = 0$ の判別式を D とすると, $D > 0$ より, $\frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0$

逆に $3x^2 + 2ax + b = 0$ が異なる 2 実数解をもてば関数 $f(x)$ は極大値をもつので,
 関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は $a^2 - 3b > 0$

$$\text{すなわち } b < \frac{a^2}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

次に, $3x^2 + 2ax + b = 0$ の異なる 2 実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると,

$f(x)$ は $x = \alpha$ のとき極大となるので,

$x < 0$ で極大値をもつことと $\alpha < 0$ であることは同値である。

また, $\alpha < 0$ であることと $3x^2 + 2ax + b = 0$ が負の実数解をもつことが同値だから,

$x < 0$ で極大値をもつことと $3x^2 + 2ax + b = 0$ が負の実数解をもつことは同値である。

「 $3x^2 + 2ax + b = 0$ が負の実数解をもつ」の否定は

「 $3x^2 + 2ax + b = 0$ が 0 以上の実数解のみをもつ」だから、

この条件を求め、それを否定すれば $x < 0$ で極大値をもつ条件が求まる。

$3x^2 + 2ax + b = 0$ の解 α, β ($\alpha < \beta$) が 0 以上となる条件は

$$0 \leq \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}a > 0 \text{ かつ } \frac{b}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ かつ } b \geq 0$$

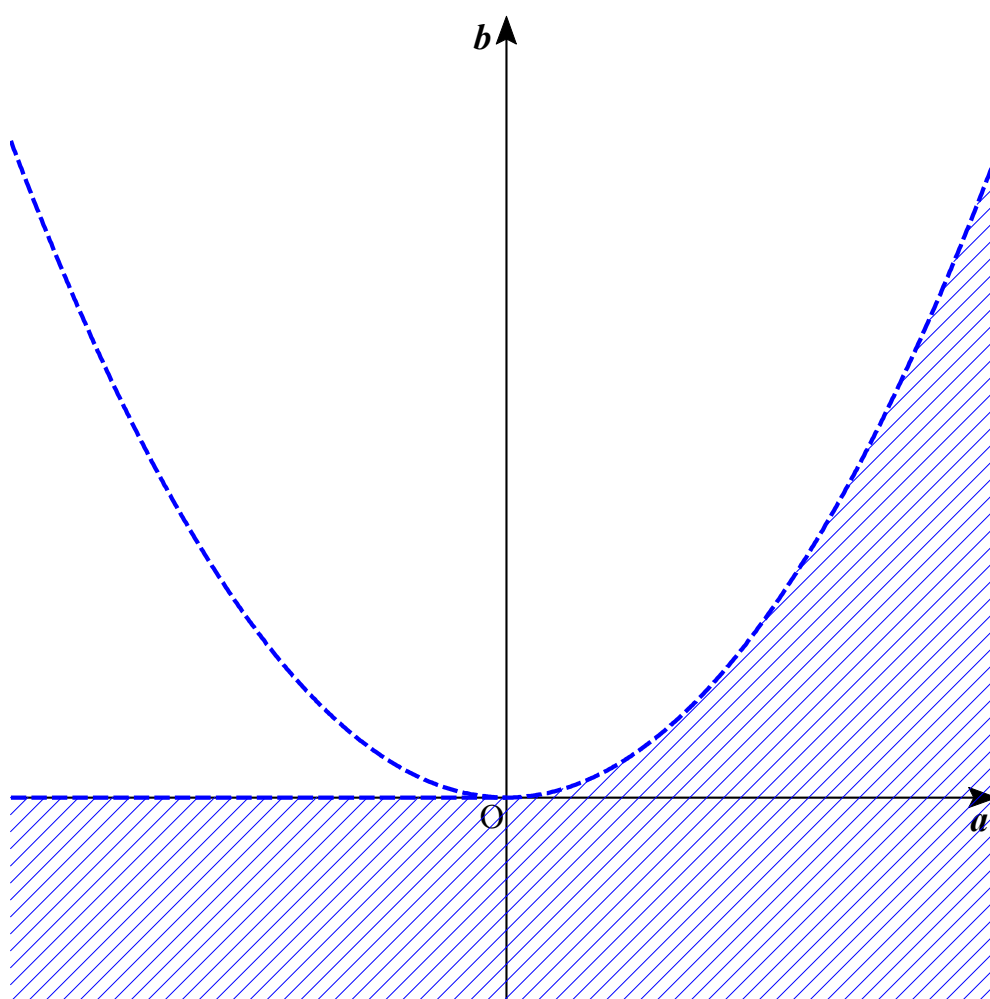
よって、その否定、すなわち $x < 0$ で極大値をもつための条件は

$$\overline{a < 0 \cap b \geq 0} \equiv \overline{a < 0} \cup \overline{b \geq 0} \equiv a \geq 0 \cup b < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

以上より、求める条件は①かつ②より、

$$\begin{aligned} b < \frac{a^2}{3} \cap (a \geq 0 \cap b < 0) &\Leftrightarrow \left(b < \frac{a^2}{3} \cap a \geq 0 \right) \cup \left(b < \frac{a^2}{3} \cap b < 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(b < \frac{a^2}{3} \cap a \geq 0 \right) \cup b < 0 \end{aligned}$$

(a, b) 存在は下図斜線部 (破線は含まない)



(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ &= 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, 条件より, } -\frac{a}{3} = \frac{1}{3}, b - \frac{a^2}{3} = -\frac{4}{3} \quad \therefore a = -1, b = -1$$

したがって,

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + c$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$$

これより $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	極大値	↓	極小値	↑

 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつことと関数 $y = f(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わることは同値であり,関数 $y = f(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わることと

極大値と極小値の積が負であることは同値だから,

求める条件は極大値と極小値の積が負, すなわち $f\left(-\frac{1}{3}\right)f(1) < 0$ となる条件である。

$$\text{よって, } \left(c + \frac{5}{27}\right)(c - 1) < 0 \text{ より, } -\frac{5}{27} < c < 1$$

51

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^3 - 3a^2x| \\ &= |x(x + \sqrt{3}a)(x - \sqrt{3}a)| \end{aligned}$$

より,

$$x \geq 0 \text{ において, } 0 \leq x \leq \sqrt{3}a \text{ のとき } f(x) = -x^3 + 3a^2x, \quad x \geq \sqrt{3}a \text{ のとき } f(x) = x^3 - 3a^2x$$

そこで, それぞれの増減を調べ, これをグラフに表すことにする。

 $0 \leq x \leq \sqrt{3}a$ における $f(x) = -x^3 + 3a^2x$ の増減

$$f'(x) = -3x^2 + 3a^2 = -3(x^2 - a^2) \text{ から, 次のようになる。}$$

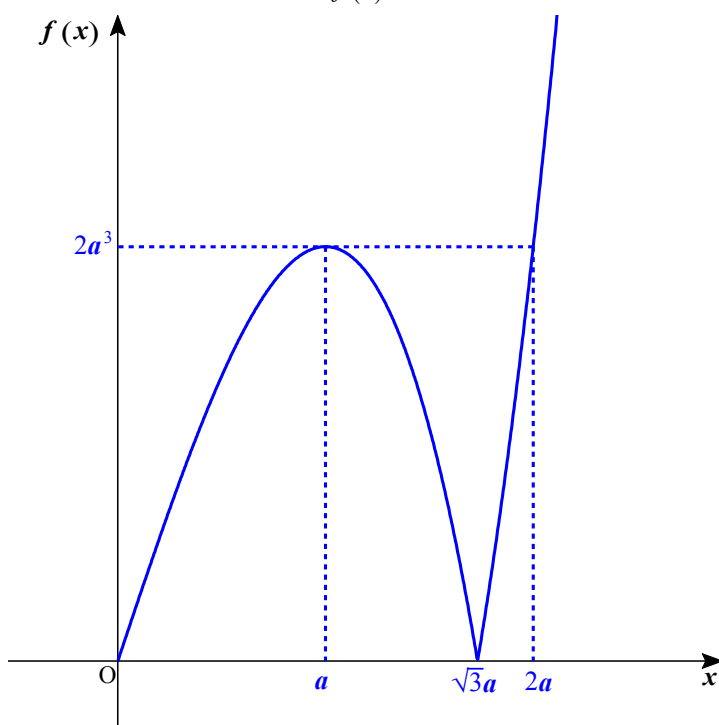
x	0	...	a	...	$\sqrt{3}a$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↑	$2a^3$	↓	0

 $x \geq \sqrt{3}a$ における $f(x) = x^3 - 3a^2x$ の増減

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x^2 - a^2) > 0 \text{ より, } f(x) \text{ は単調増加する。}$$

また, $x^3 - 3a^2x = 2a^3$, すなわち $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$ を満たす x を求めると,

$$x^3 - 3a^2x - 2a^3 = (x + a)^2(x - 2a), \quad x \geq \sqrt{3}a \text{ より, } x = 2a$$

よって, $x \geq 0$ における関数 $f(x)$ のグラフは次のようになる。

したがって, $x=1$ との相対的位置関係から,

$1 < a$ のとき

$$M(a) = f(1) = 3a^2 - 1$$

$a \leq 1 \leq 2a$ のとき

$$M(a) = f(a) = 2a^3$$

$2a < 1$ のとき,

$$M(a) = f(1) = 3a^2 - 1$$

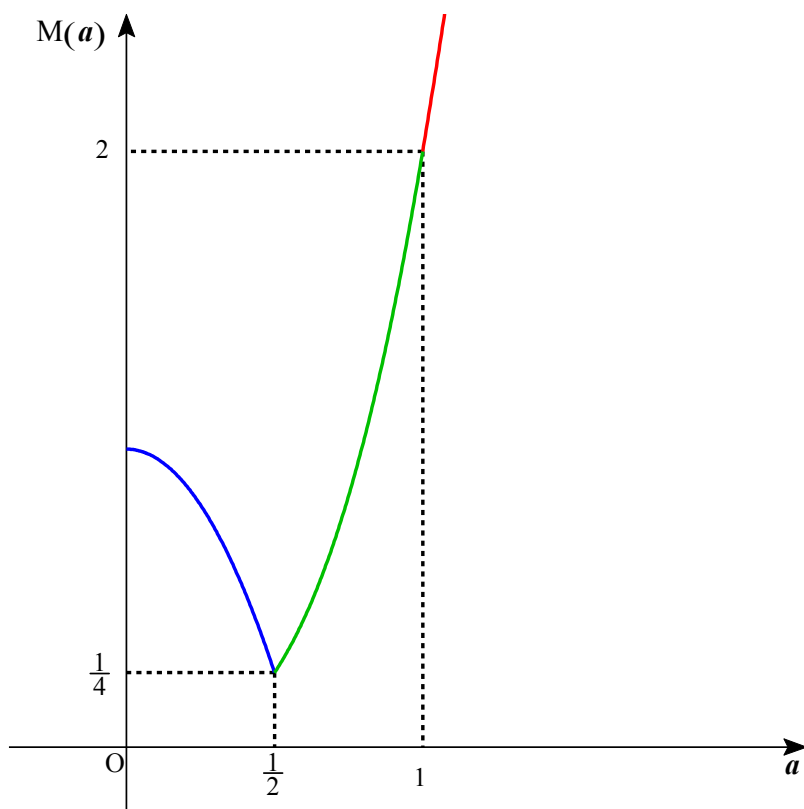
以上を整理すると,

$$M(a) = \begin{cases} -3a^2 + 1 & \left(0 \leq a < \frac{1}{2}\right) \\ 2a^3 & \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1\right) \\ 3a^2 - 1 & (a > 1) \end{cases}$$

となり,

関数 $M(a)$ は $0 \leq a < \frac{1}{2}$ で単調に減少し, $a \geq \frac{1}{2}$ で単調に増加することがわかる。

これと関数 $M(a)$ が連続であることから, $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。



52

$f(x) = x^3 - ax^2 + a^2$ とすると, $x \geq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つような実数 a の値の範囲を求めればよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2ax \\ &= x(3x - 2a) \end{aligned}$$

$a = 0$ のとき

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ より $f(x)$ は単調増加し, これと $f(0) = 0$ から,
 $x \geq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つ。

$a < 0$ のとき

$f'(x) = 0$ の解は $x = 0, \frac{2}{3}a$ で, $\frac{2}{3}a < 0$ より, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

よって, $x = 0$ で極小となり, その値 $f(0) = a^2 \geq 0$

ゆえに, $x \geq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つ。

$a > 0$ のとき

$f'(x) = 0$ の解は $x = 0, \frac{2}{3}a$ で, $0 < \frac{2}{3}a$ より, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

よって, $x = \frac{2}{3}a$ で極小となり, その値 $f\left(\frac{2}{3}a\right) = -a^2\left(\frac{4}{27}a - 1\right)$

$x \geq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つには, $f\left(\frac{2}{3}a\right) \geq 0$ であればよいから,

$$-a^2\left(\frac{4}{27}a - 1\right) \geq 0 \text{ より, } 0 < a \leq \frac{27}{4}$$

以上より,

$$a < 0 \text{ または } a = 0 \text{ または } 0 < a \leq \frac{27}{4}, \text{ すなわち } a \leq \frac{27}{4}$$

53

(1)

条件を満たす接線の放物線上の座標を $(t, t^2 + 2t + k)$ とすると、
 接線の方程式は、 $y' = 2x + 2$ より、 $y = (2t + 2)(x - t) + t^2 + 2t + k$
 すなわち $y = (2t + 2)x - t^2 + k$

これが原点を通るから $-t^2 + k = 0$ であり、
 2本の接線が存在、すなわち異なる2つの接点が存在するから、
 $-t^2 + k = 0$ が異なる2つの実数解をもつ。

よって、 $t = \pm\sqrt{k}$ ($k > 0$)

このとき、2本の接線の傾きは、それぞれ $-2\sqrt{k} + 2$, $2\sqrt{k} + 2$

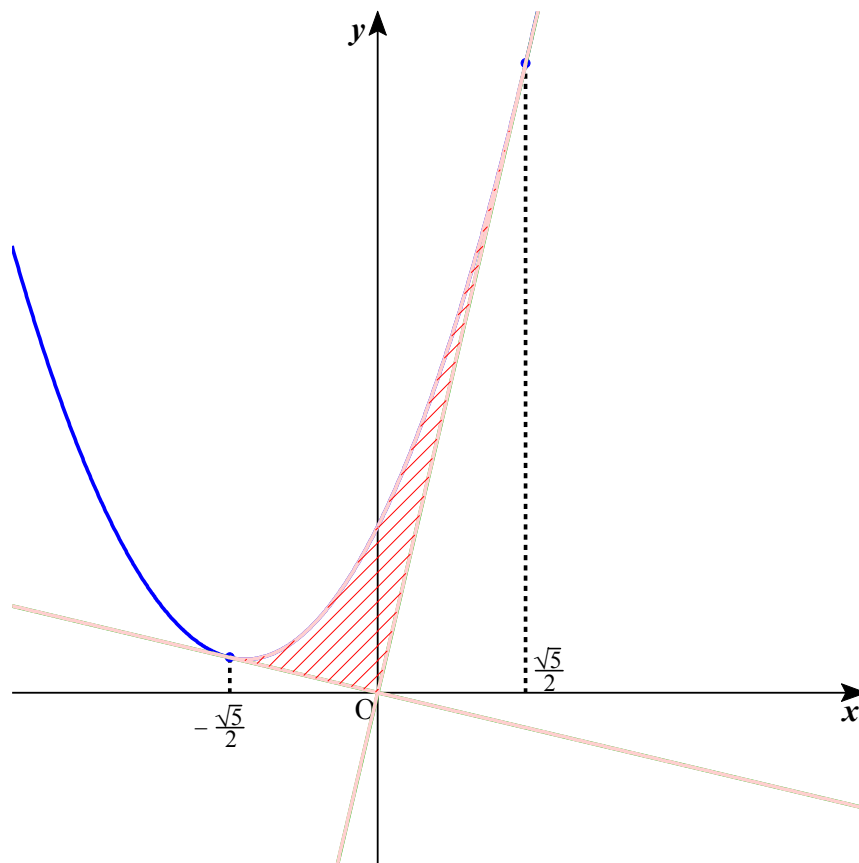
2本の接線は垂直だから $(-2\sqrt{k} + 2)(2\sqrt{k} + 2) = -1 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$

(2)

(1)より、放物線の方程式は $y = x^2 + 2x + \frac{5}{4}$ 、接線の方程式は $y = (2 - \sqrt{5})x$, $y = (2 + \sqrt{5})x$

それぞれの接点の x 座標は $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって、求める面積は下図斜線部



ゆえに,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left\{ x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 + \sqrt{5})x \right\} dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \left\{ x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 + \sqrt{5})x \right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \left(x + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \\
 &= \frac{5\sqrt{5}}{12}
 \end{aligned}$$

補足

$$\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ は, それぞれ } x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 + \sqrt{5})x = 0, x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 - \sqrt{5})x = 0$$

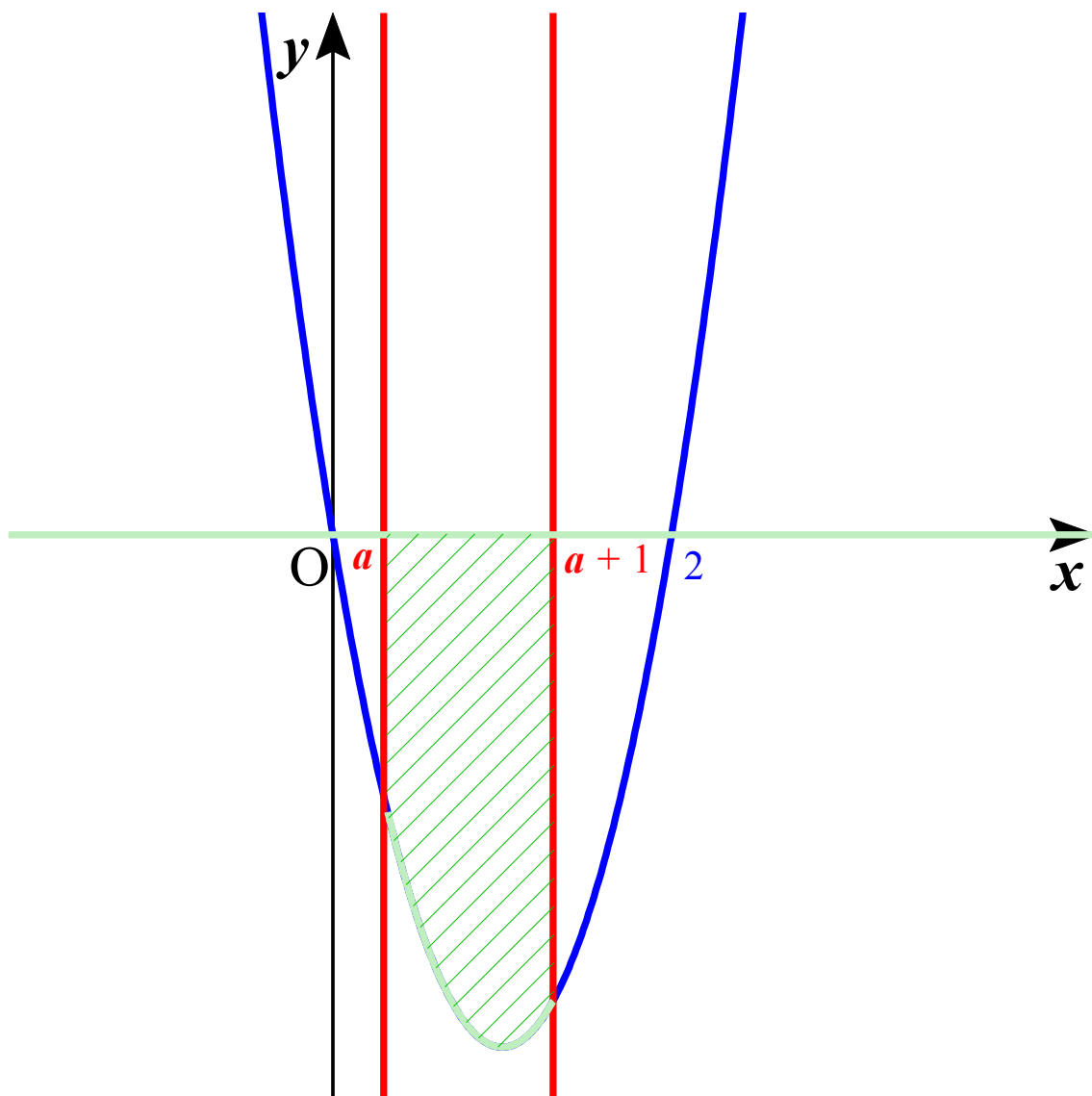
$$\text{の重解だから, } x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 + \sqrt{5})x = \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2, x^2 + 2x + \frac{5}{4} - (2 - \sqrt{5})x = \left(x + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

54

(1)

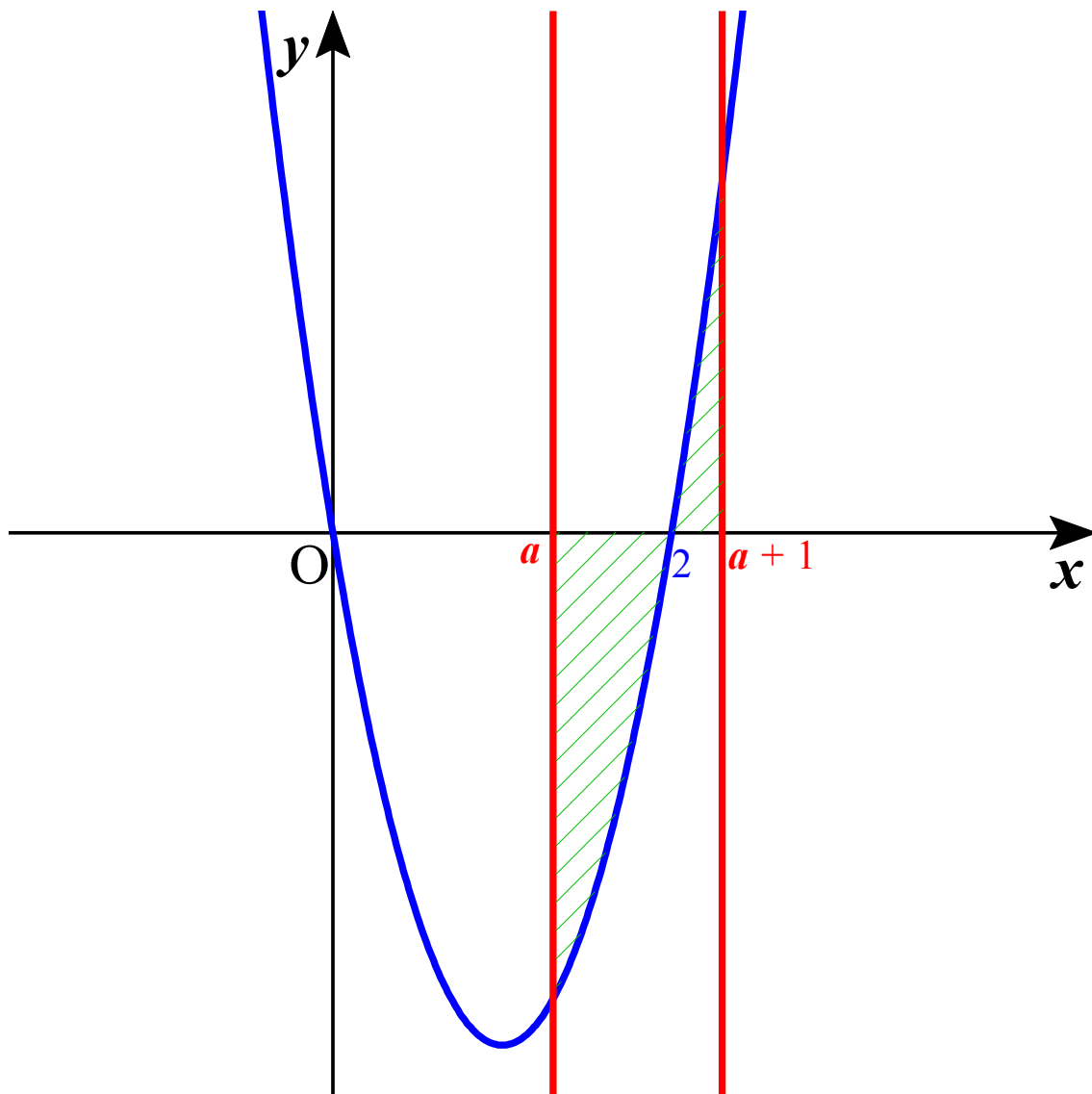
$0 \leq a \leq 2$ かつ $a+1 \leq 2$ のとき, すなわち $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_a^{a+1} \{0 - 3x(x-2)\} dx \\
 &= \int_a^{a+1} (-3x^2 + 6x) dx \\
 &= \left[-x^3 + 3x^2 \right]_a^{a+1} \\
 &= -3a^2 + 3a + 2
 \end{aligned}$$



$0 \leq a \leq 2$ かつ $2 < a+1$ のとき, すなわち $1 < a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_a^2 \{0 - 3x(x-2)\} dx + \int_2^{a+1} \{3x(x-2) - 0\} dx \\
 &= \int_a^2 (3x^2 - 6x) dx + \int_2^{a+1} (3x^2 - 6x) dx \\
 &= \left[x^3 - 3x^2 \right]_a^2 + \left[x^3 - 3x^2 \right]_2^{a+1} \\
 &= 2a^3 - 3a^2 - 3a + 6
 \end{aligned}$$



(2)

 $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= -3a^2 + 3a + 2 \\ &= -3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

 $1 < a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= 2a^3 - 3a^2 - 3a + 6 \\ S'(a) &= 6a^2 - 6a - 3 = 3(2a^2 - 2a - 1) \text{ より,} \\ S'(a) &= 0 \text{ の解で } 1 < a \leq 2 \text{ を満たすのは } a = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって, $S(a)$ の増減は次のようになる。

x	1	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...	2
$S'(a)$	/	-	0	+	
$S(a)$	/	↓	極小	↑	4

以上より, グラフは下図のようになる。

よって, $a=2$ のとき $S(a)$ は最大値 4 をとる。