式と曲線 1　放物線

放物線の標準形 $y^2=4px$（$p\neq 0$）の導き方

焦点$(p,\ 0)$からの距離と準線$x=q$（$p\neq q$）からの距離が等しい動点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると，

動点 P の軌跡は，$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x-q|$より，$(x-p)^2+y^2=(x-q)^2$，

すなわち$y^2=2(p-q)x+(q-p)(q+p)$

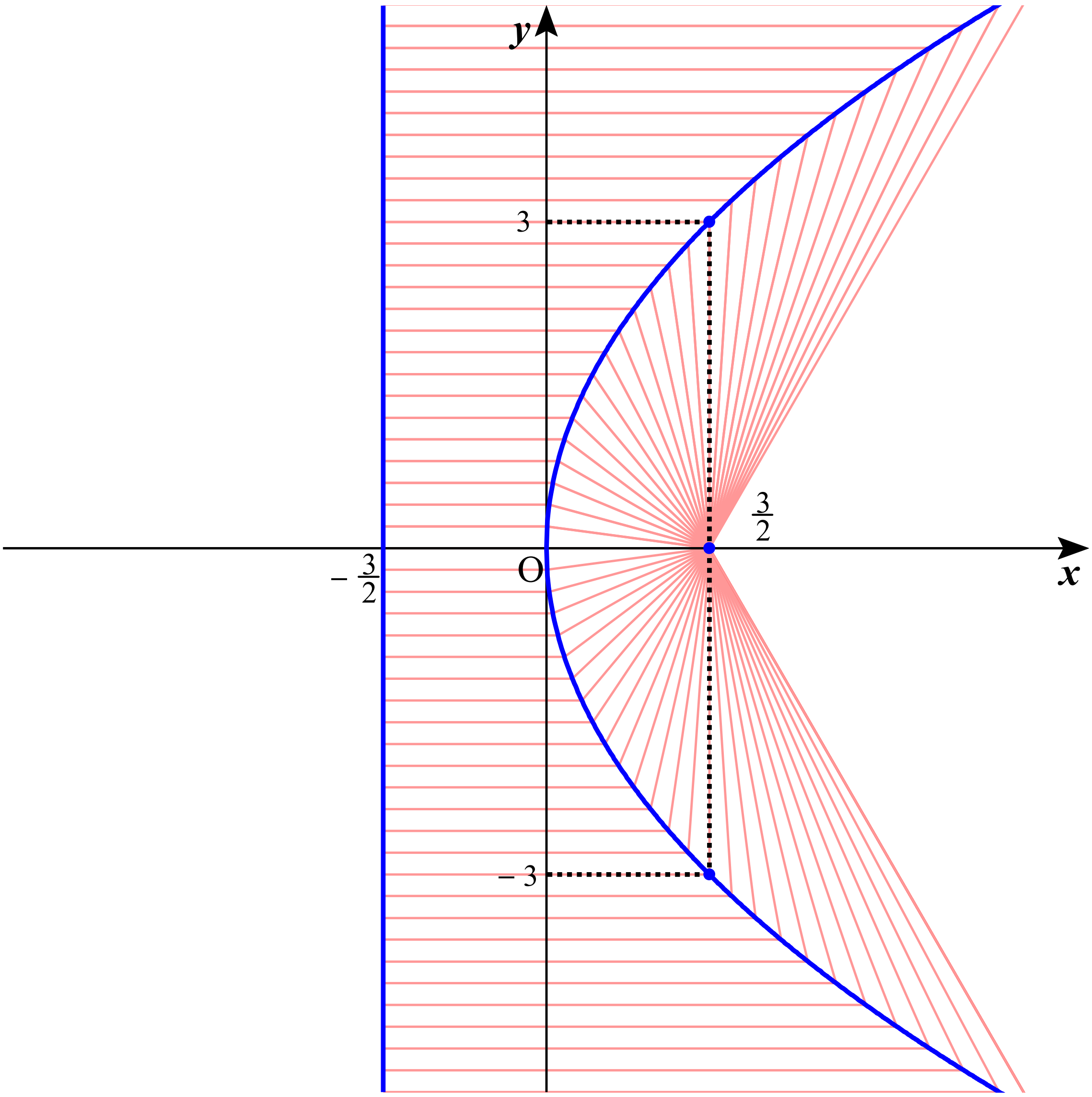
とくに，$q+p=0$，すなわち$q=-p$のとき，$y^2=4px$

これより，焦点を$(p,\ 0)$，準線を$x=-p$とする放物線の方程式は$y^2=4px$

57

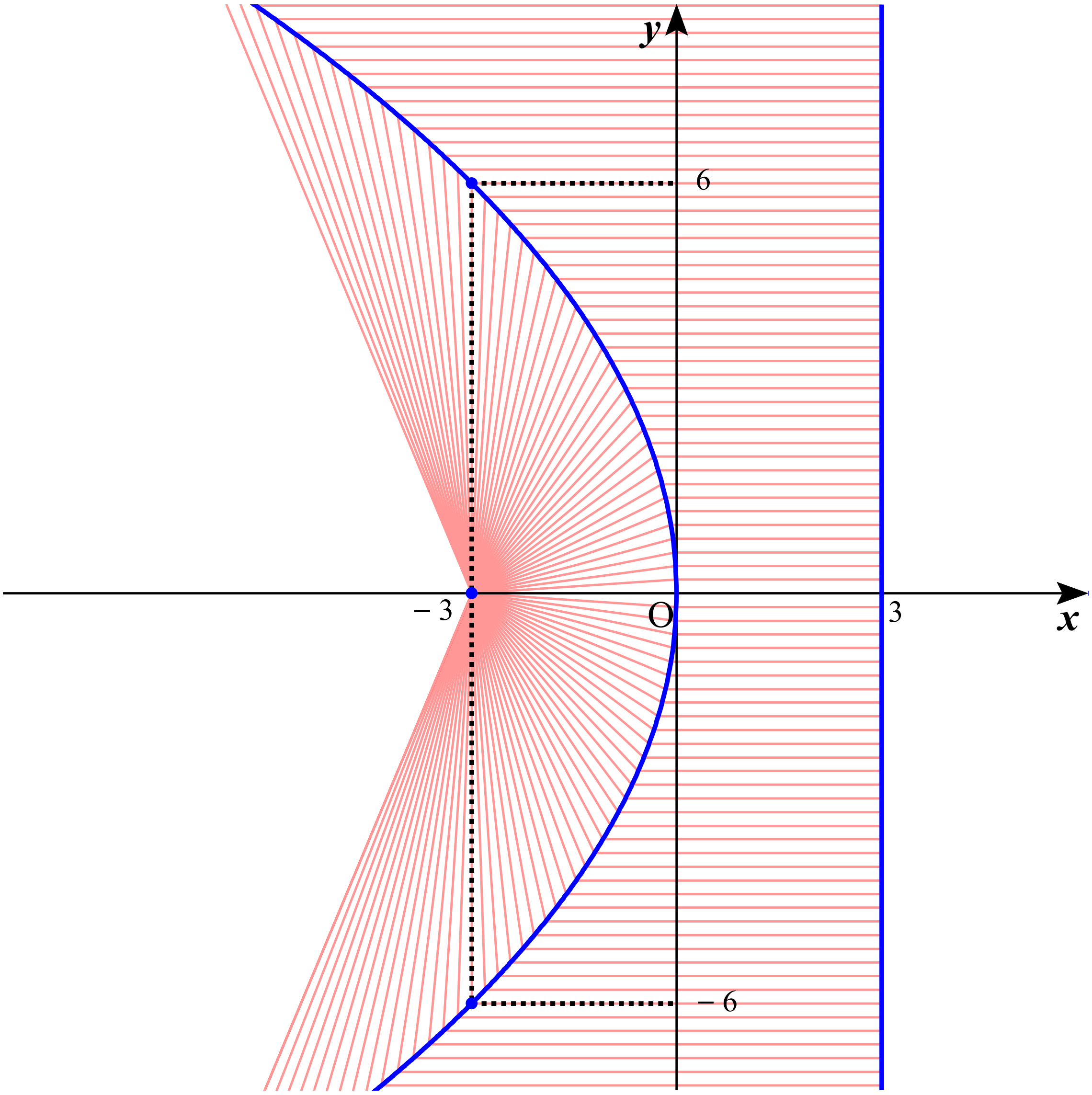
(1)

$y^2=4\cdot\dfrac{3}{2}x$より，焦点$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，準線$x=-\dfrac{3}{2}$



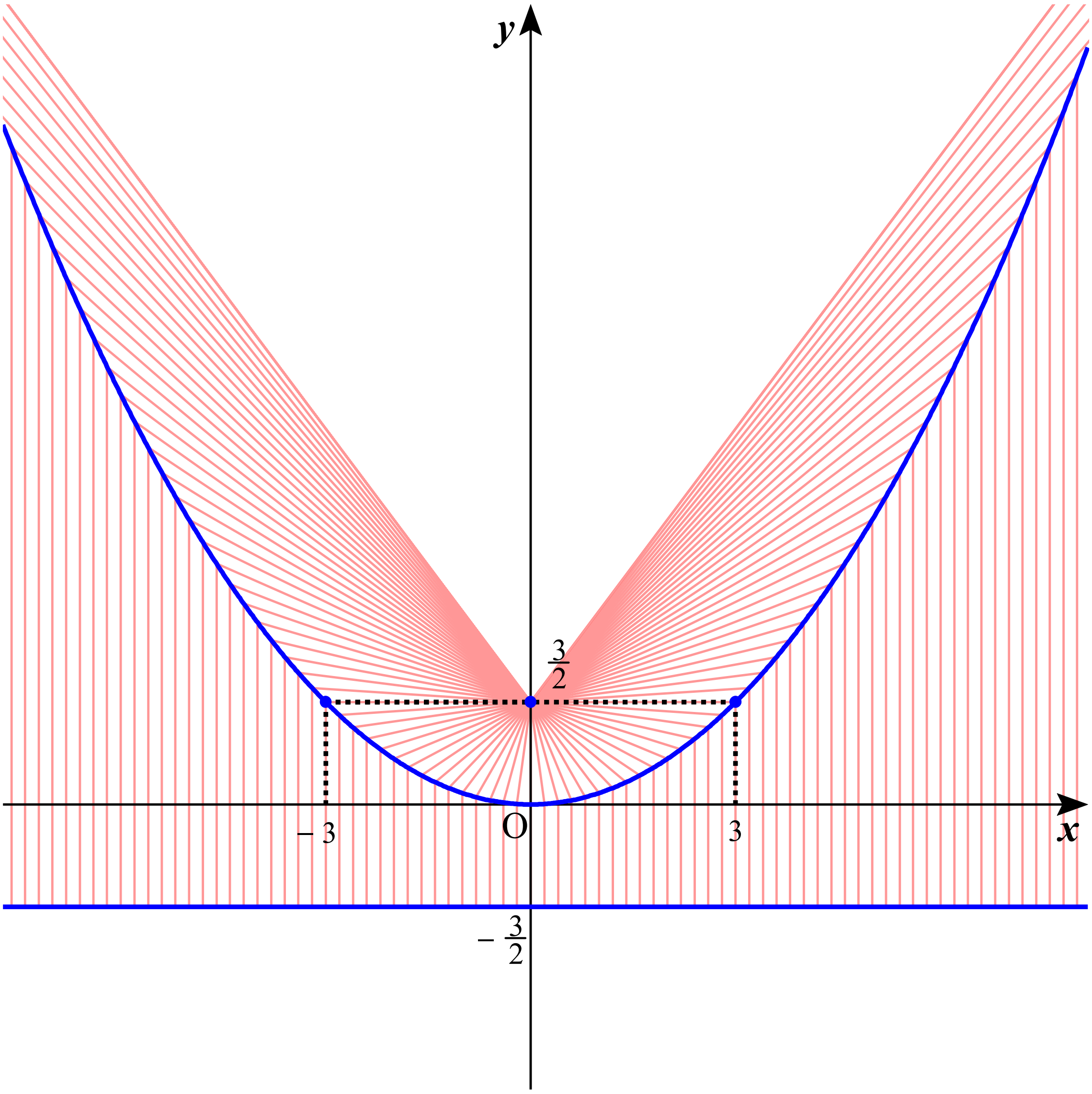
(2)

$y^2 = 4\cdot(-3)x$ より，焦点 $(-3,\ 0)$，準線 $x=3$



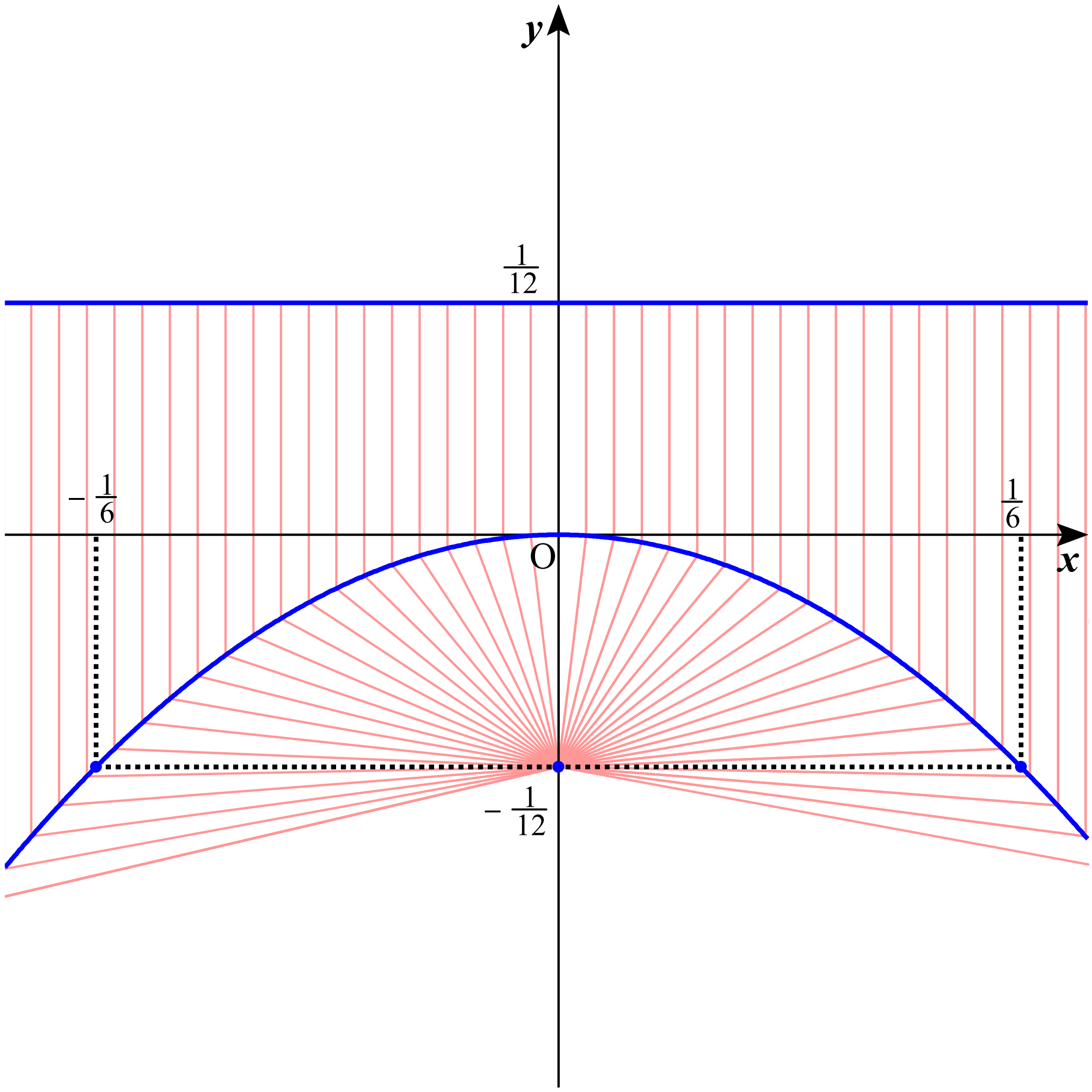
(3)

$x^2=4\cdot\frac{3}{2}y$ より，焦点$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$，準線 $y=-\frac{3}{2}$



(4)

$x^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{12}\right) y$ より，焦点$\left(0,\ -\dfrac{1}{12}\right)$，準線 $y = \dfrac{1}{12}$



58

(1)

$y^2=4\cdot 5x$，すなわち $y^2=20x$

(2)

$x^2=4\cdot(-2)y$，すなわち $x^2=-8y$

59

(1)

軸が x 軸で原点を通る放物線だから，求める放物線の方程式を $y^2=4px$ とおくと，

点 $(8,\ 4)$ を通ることから，$4^2=4p\cdot 8$ より，$p=\dfrac{1}{2}$

よって，求める放物線の方程式は $y^2=2x$

(2)

頂点が原点で焦点が x 軸上にあるから，求める放物線の方程式を $y^2=4px$ とおくと，

点 $(-3,\ 3)$ を通ることから，$3^2=4p\cdot(-3)$ より，$p=-\dfrac{3}{4}$

よって，求める放物線の方程式は $y^2=-3x$

60

(1)

解法 1

点 P は円の中心だから，直線 $x=-2$ からの距離と点 $(2,\ 0)$ からの距離が等しい。

よって，点 P の軌跡は準線を $x=-2$，焦点を $(2,\ 0)$ とする放物線である。

ゆえに，$y^2=8x$

解法 2

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件より，$x-(-2)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

よって，点 P の必要条件は，両辺を 2 乗して整理することにより，$y^2=8x$

逆に，$y^2=8x$ 上の点は与えられた条件を満たす。

ゆえに，点 P の軌跡は $y^2=8x$

(2)

中心を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする円を C_1，円 C_1 の半径を r とする。

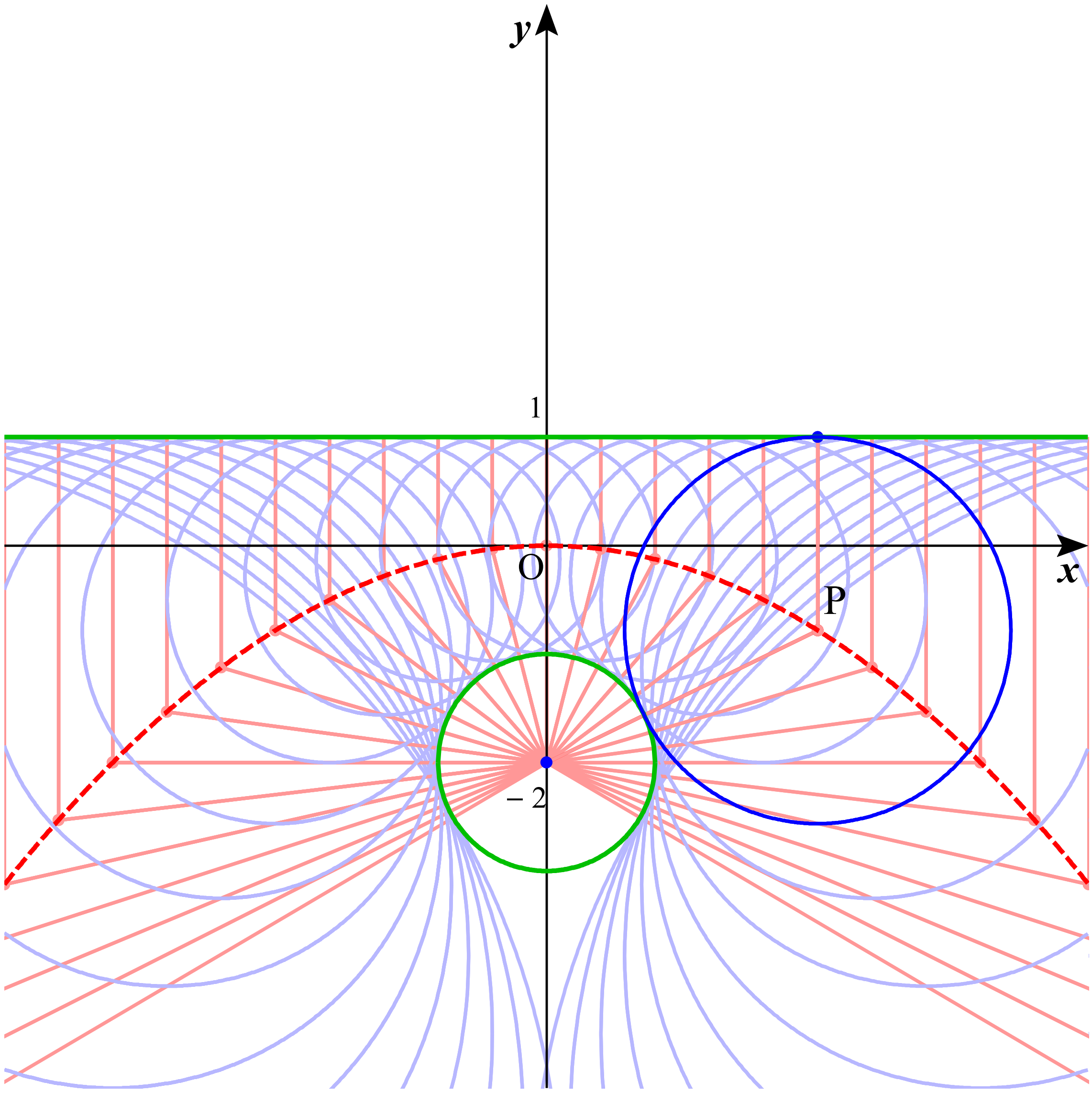
与えられた円が円 C_1 に外接する場合

P と直線 $y=1$ の距離より，$r=1-y$ ・・・①

P と円 C の中心間の距離の関係式は，$r+1=\sqrt{x^2+\{y-(-2)\}^2}$ ・・・②

①，②より，$2-y=\sqrt{x^2+\{y-(-2)\}^2}$

よって，点 P の必要条件は，両辺を 2 乗して整理することにより，$x^2=8y$
逆に，$x^2=8y$ 上の点は条件を満たす。
ゆえに，$x^2=8y$

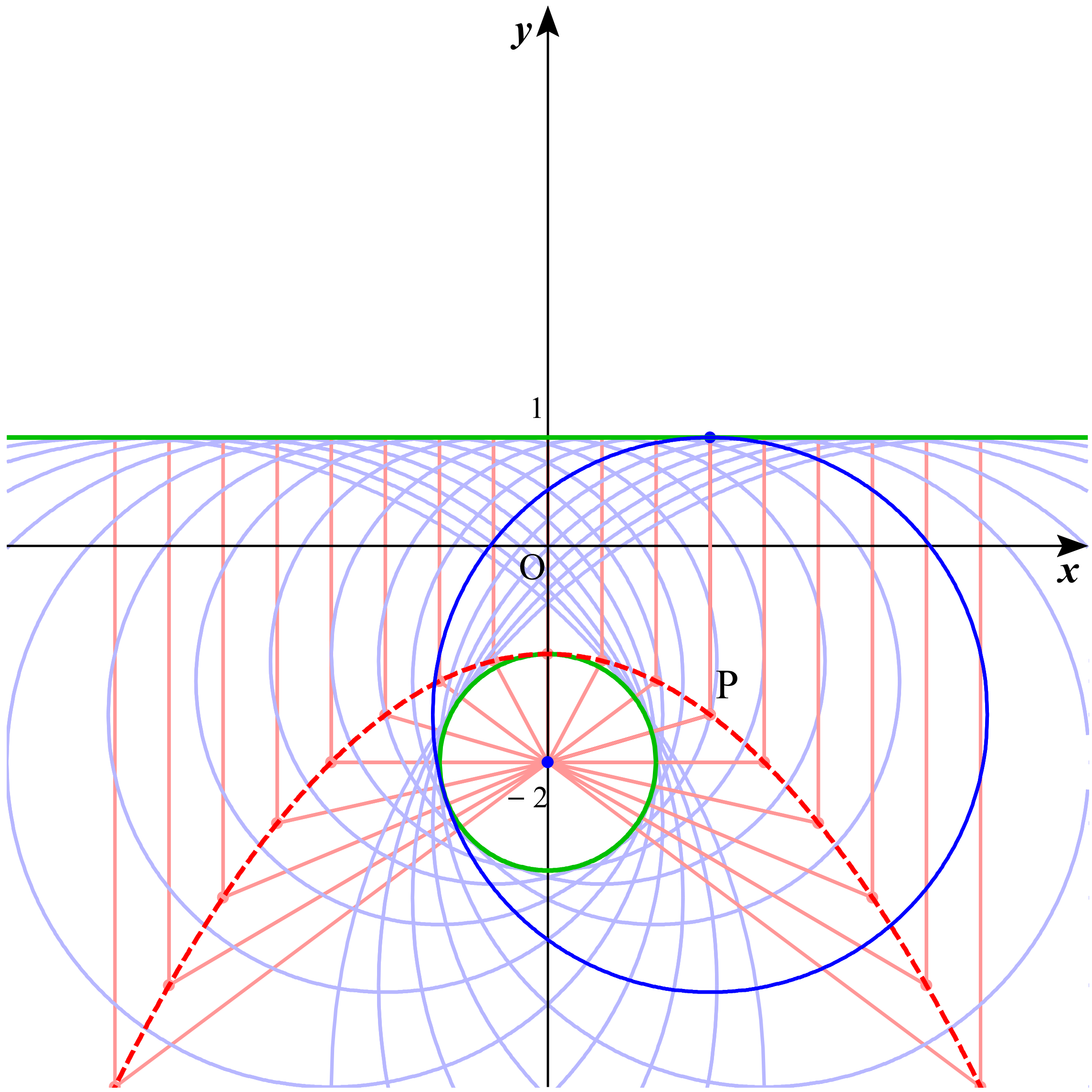


与えられた円が円 C_1 に内接する場合

P と円 C の中心間の距離の関係式は，$r-1=\sqrt{x^2+\{y-(-2)\}^2}$　・・・③

これと①より，$-y=\sqrt{x^2+\{y-(-2)\}^2}$

よって，点 P の必要条件は，両辺を 2 乗して整理することにより，$x^2=-4y-4$
逆に $x^2=-4y-4$ 上の点は条件を満たす。
ゆえに，$x^2=-4y-4$



以上より，求める点 P の軌跡は$x^2=8y$，$x^2=-4y-4$

61

***a* の値**

解法 1

$x^2=4y$ の焦点と準線は，$x^2=4\cdot1\cdot y$ より，それぞれ $(0,1)$, $y=-1$ $\therefore \mathrm{PF}=\mathrm{PH}=\dfrac{a^2}{4}+1$

△PFH は正三角形となるためには $\angle\mathrm{FPH}=60°$ であればよい。

このとき $\angle\mathrm{FPH}$ は鋭角だから，$\dfrac{a^2}{4}>1$

よって，F から PH に下ろした垂線の足を I とすると，$\mathrm{PI}=\dfrac{a^2}{4}-1$

これと $\mathrm{PF}\cos60°=\mathrm{PI}$ より，$\left(\dfrac{a^2}{4}+1\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{4}-1$ $\therefore a=\pm2\sqrt{3}$

解法 2

$\mathrm{FH}=\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}=\dfrac{a^2}{4}+1$ より，△PFH は正三角形ならば $\sqrt{a^2+4}=\dfrac{a^2}{4}+1$

両辺を 2 乗し，整理すると，$(a^2+4)(a^2-12)=0$ $\therefore a=\pm2\sqrt{3}$

$a=\pm2\sqrt{3}$ は $\sqrt{a^2+4}=\dfrac{a^2}{4}+1$ を満たすから，求める a の値は $\pm2\sqrt{3}$ である。

***b* の値**

$a>0$ より $a=2\sqrt{3}$ だから，直線 FH の方程式は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$

よって，交点 Q の y 座標は $\dfrac{b^2}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}b+1$ を満たす。

この両辺を整理すると，$\dfrac{1}{12}\left(3b^2+4\sqrt{3}b-12\right)=0$

したがって，b は $3b^2+4\sqrt{3}b-12=0$ の解であり，これと $0<b<2\sqrt{3}$ より，$b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

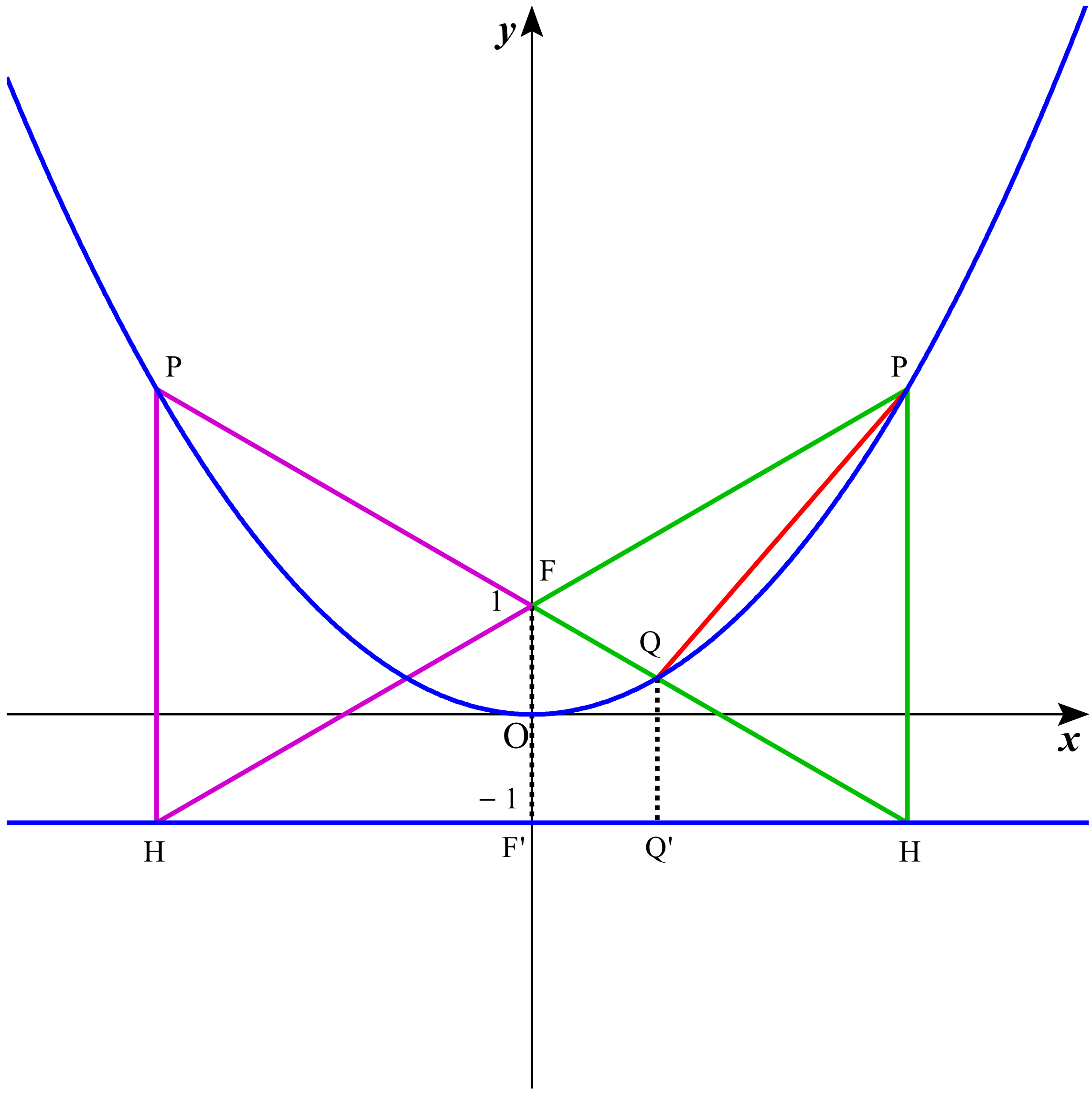
△PFQ の面積

Q から $y=-1$ に下ろした垂線の足を Q'，F から $y=-1$ に下ろした垂線の足を F' とすると，

$\mathrm{FF'}//\mathrm{QQ'}$ より，$\mathrm{FQ}:\mathrm{FH}=\mathrm{F'Q'}:\mathrm{F'H}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-0\right):\left(2\sqrt{3}-0\right)=1:3$

よって，$\Delta\mathrm{PFQ}=\dfrac{1}{3}\Delta\mathrm{PFH}$

これと $\Delta\mathrm{PFH}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}+1\right\}^2\sin60°=4\sqrt{3}$ より，$\Delta\mathrm{PFQ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

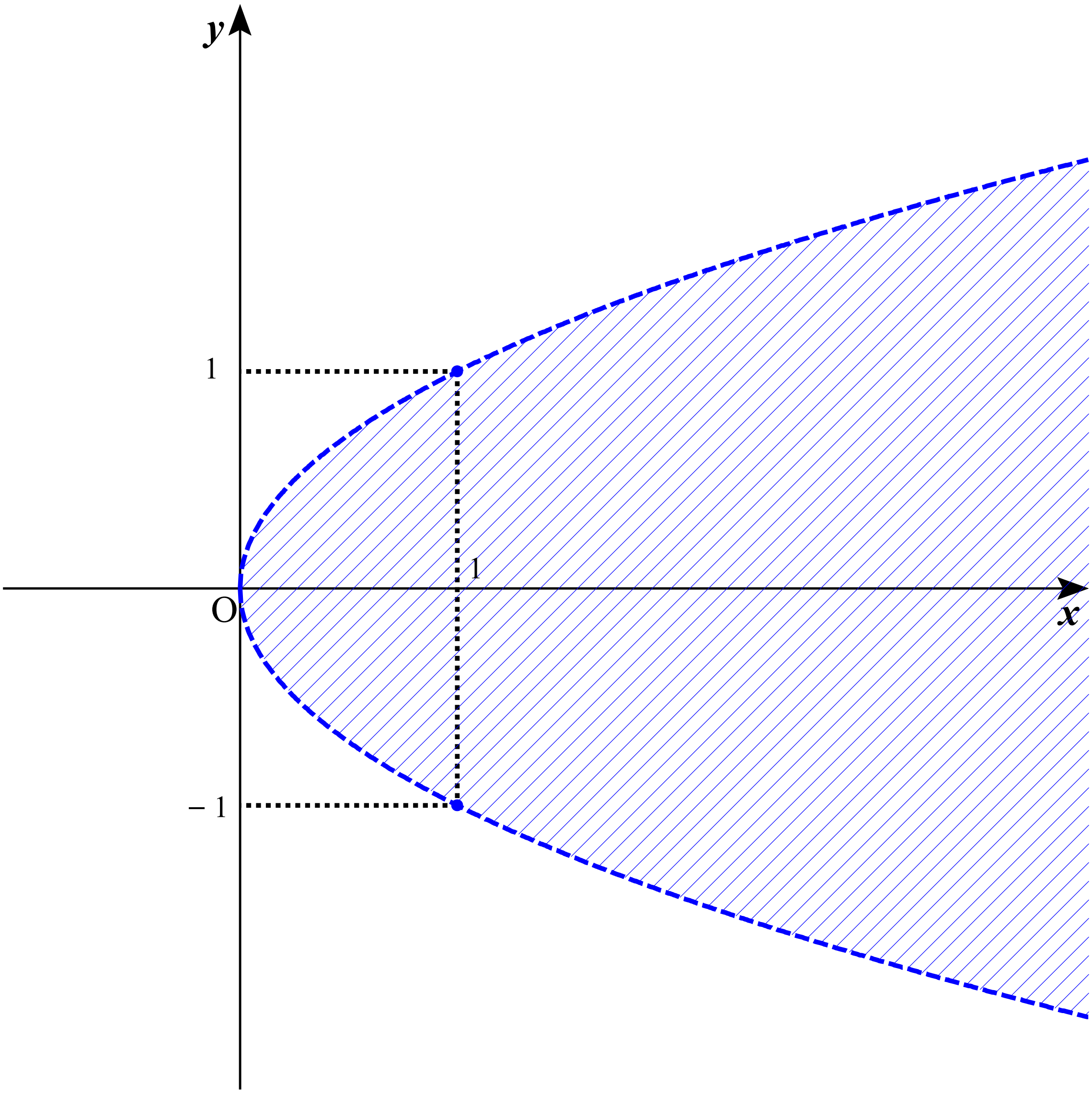

y
P
P
F
1
Q
O
x
− 1
H
F'
Q'
H

63

境界の曲線を含まない場合は曲線を破線で，含む場合は実線で示した。

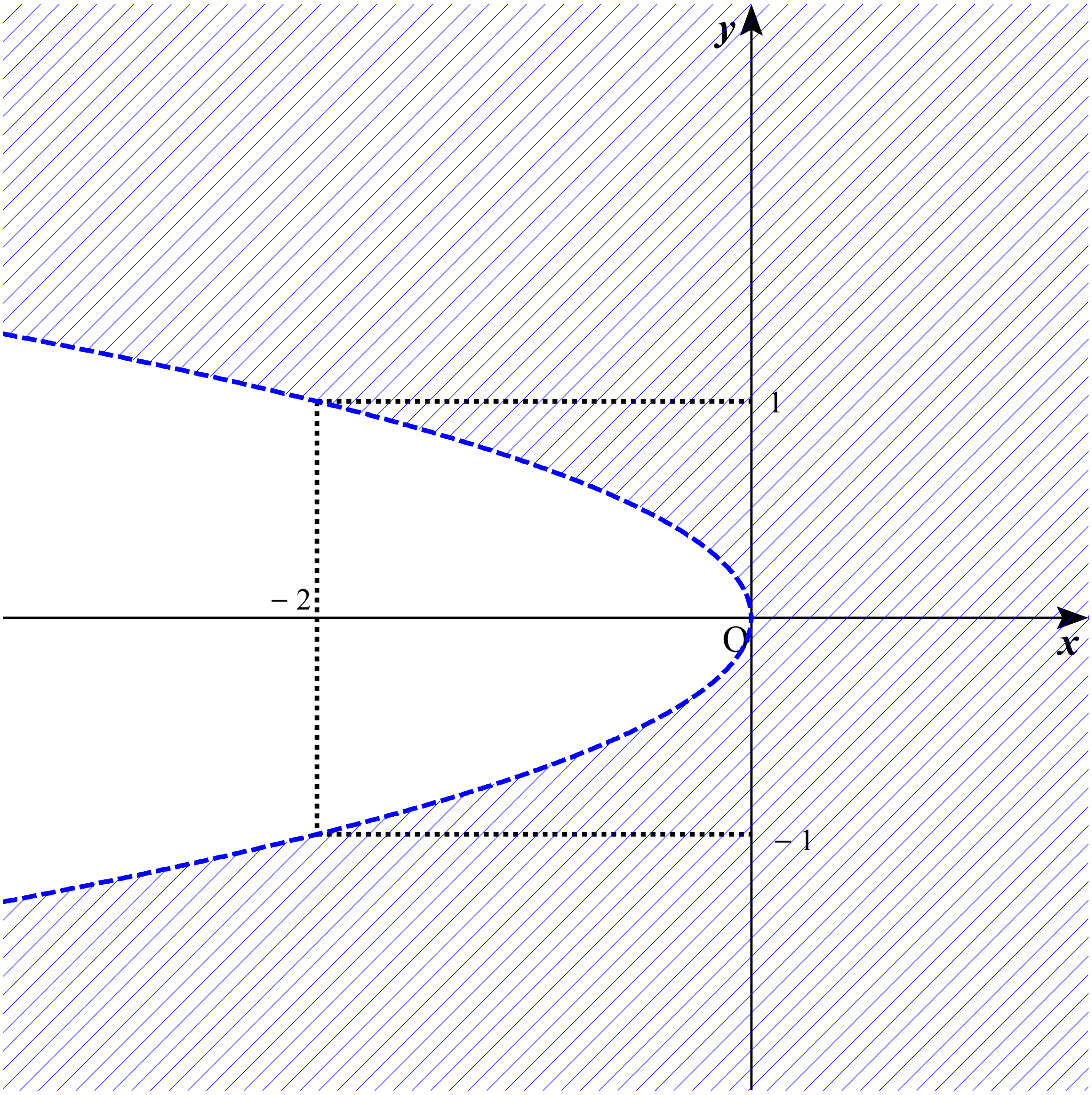
(1)

y が同じときの x の値が $x=y^2$ から求められる値より大きい領域



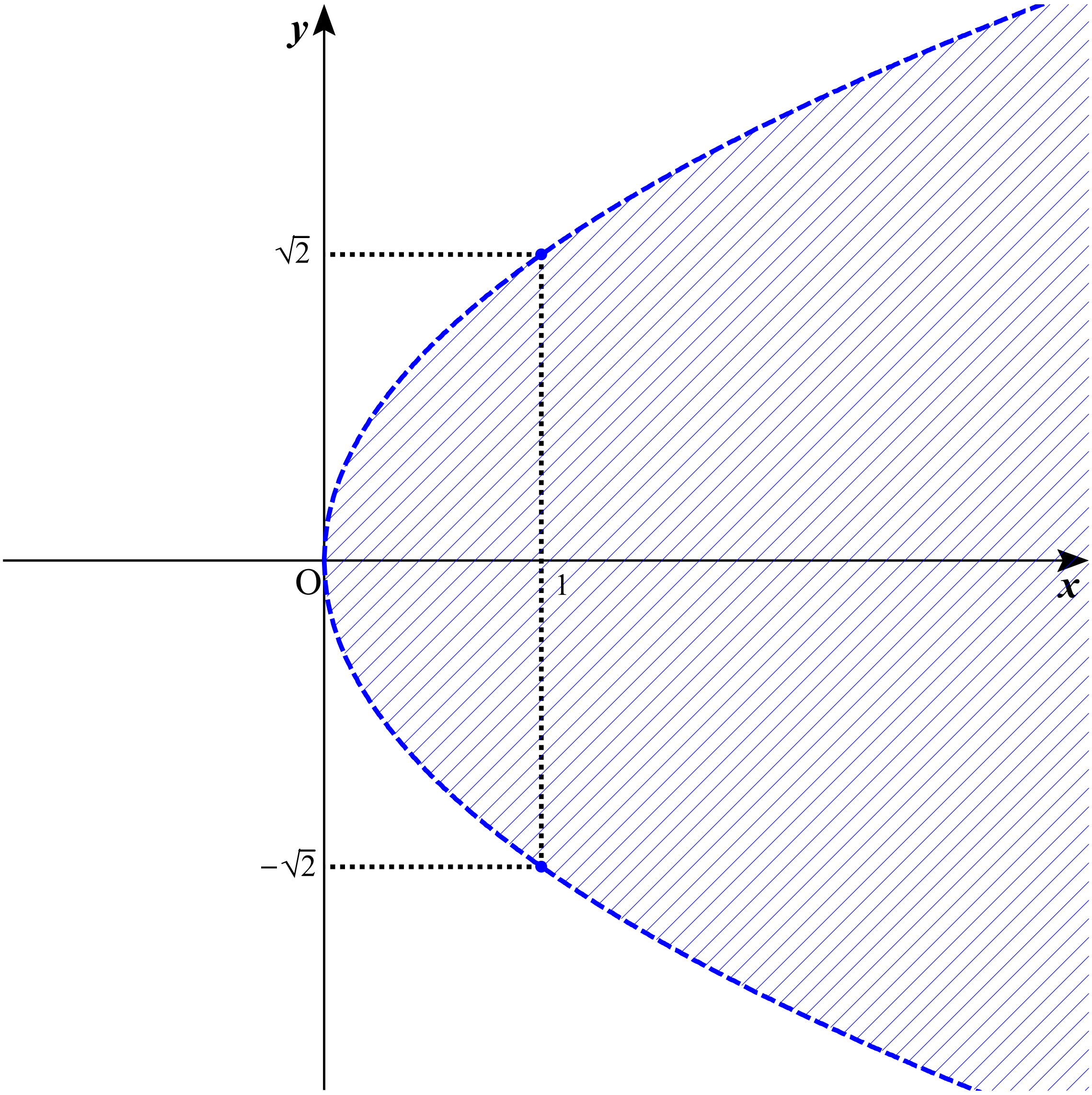
(2)

$x > -2y^2$ より，y が同じときの x の値が $x = -2y^2$ から求められる x の値より大きい領域



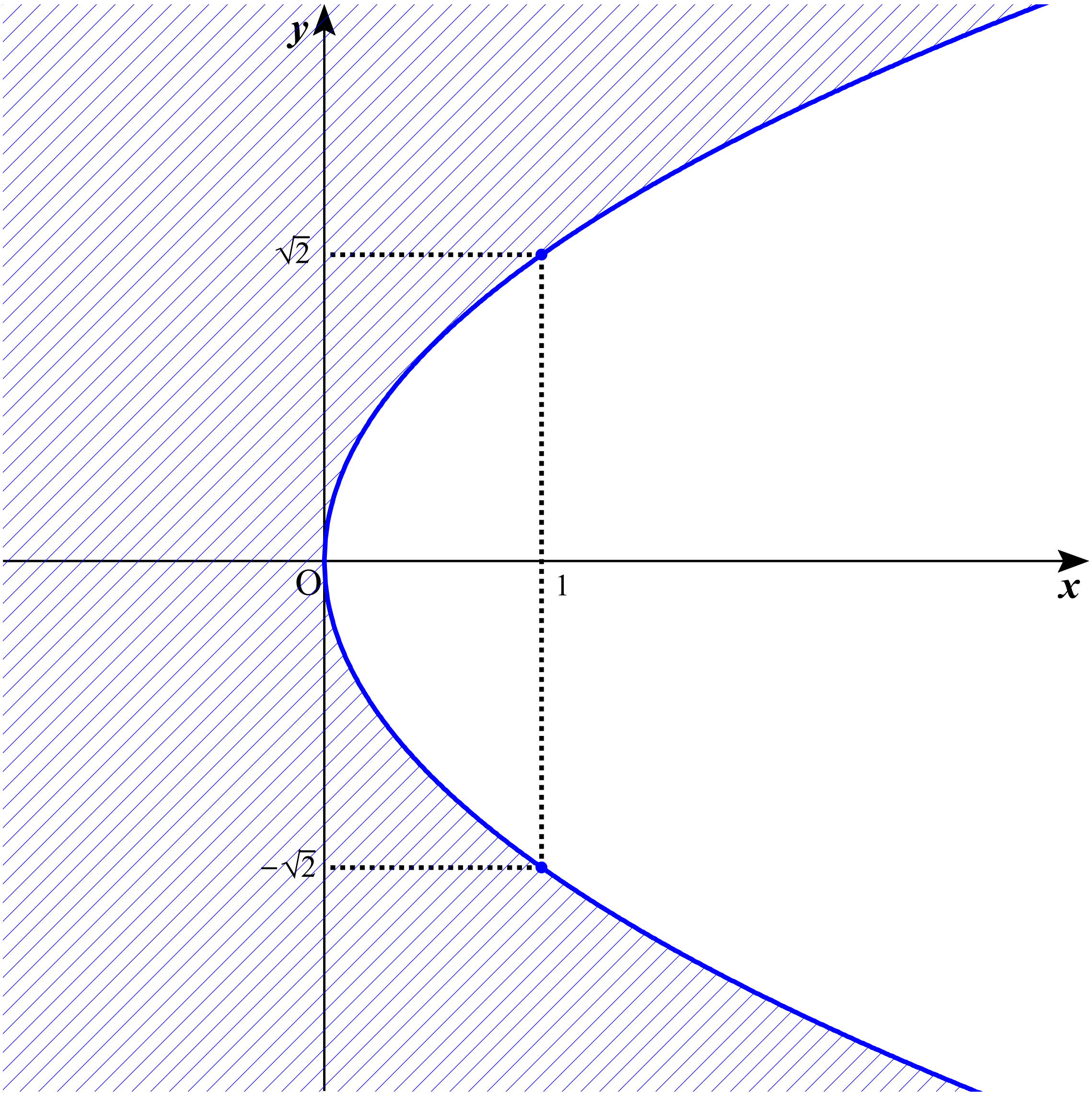
(3)

$x > \dfrac{y^2}{2}$ より，y が同じときの x の値が $x = \dfrac{y^2}{2}$ から求められる x の値より大きい領域



(4)

$x \leq \dfrac{y^2}{2}$ より，y が同じときの x の値が $x = \dfrac{y^2}{2}$ から求められる x の値以下の領域



63

u, v は t の 2 次方程式 $t^2 - yt + x = 0$ の実数解だから，

判別式を D とすると， $D = y^2 - 4x \geq 0$

よって， $y^2 \geq 4x$

ゆえに，下図斜線部（ただし，境界線を含む）