式と曲線 3　双曲線

双曲線の標準形

焦点が x 軸上にある場合

2 つの焦点を $\mathrm{F}(c, 0)$， $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$ とすると，

F， F' からの距離の差が $2a$ となる点 P,

すなわち $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2a$ $(a>0)$ を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=c^2-a^2, b>0)$$

焦点が y 軸上にある場合

2 つの焦点を $\mathrm{F}(0, c)$， $\mathrm{F}'(0, -c)$ $(c>0)$ とすると，

F， F' からの距離の差が $2b$ となる点 P,

すなわち $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2b$ $(b>0)$ を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a^2=c^2-b^2, b>0)$$

焦点が x 軸上にある双曲線の標準形の導き方

$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ， $\mathrm{PF}'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ より，

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a \quad \therefore \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

これより， $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

両辺を 2 乗し，整理すると $cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

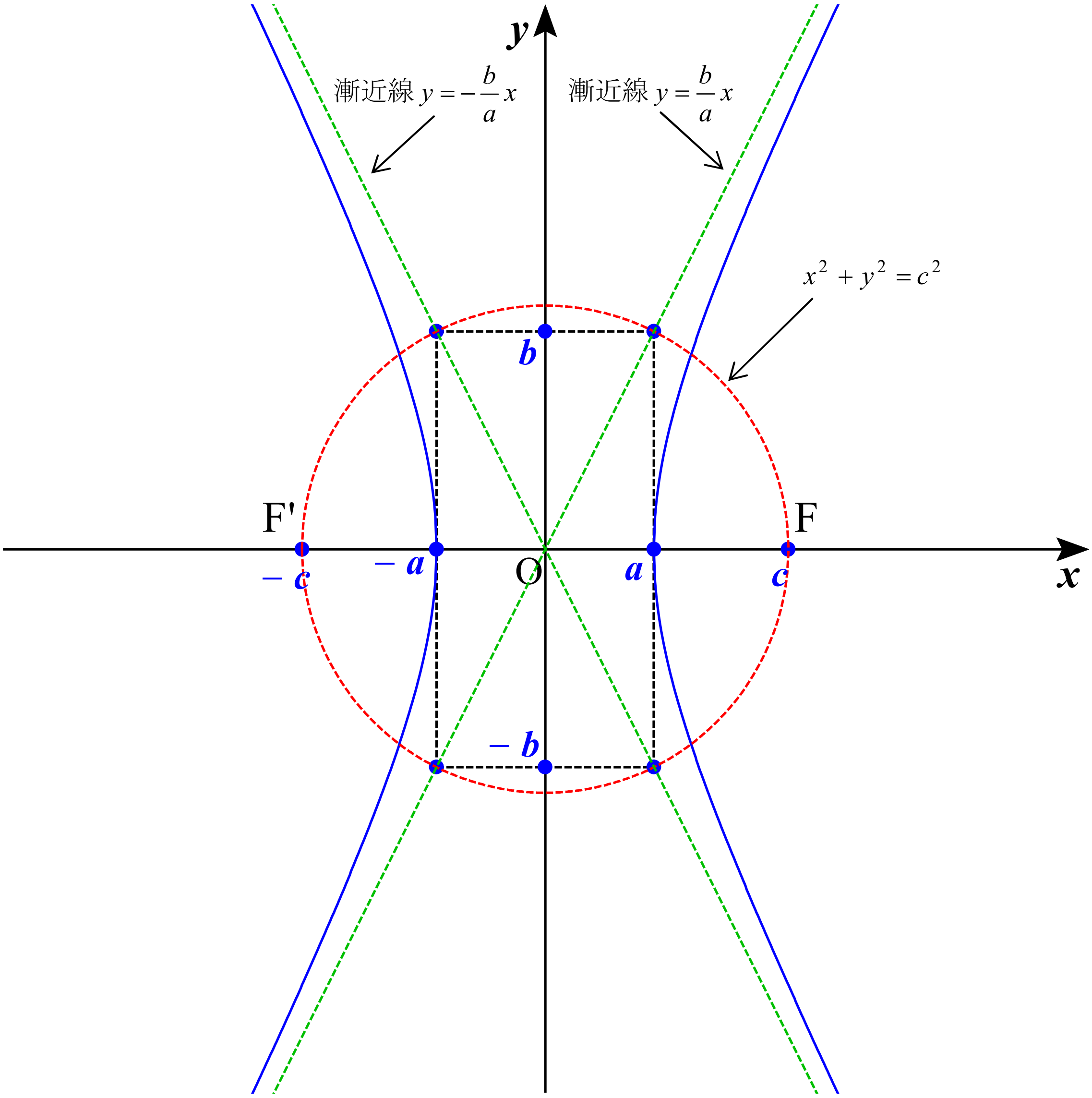
さらに両辺を 2 乗し，整理すると $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ $\quad \therefore \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$

ここで， $\mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{F}'$ は異なる 3 点だから， $\Delta\mathrm{PFF}'$ が成立する。

したがって， $\mathrm{PF}<\mathrm{FF}'+\mathrm{PF}'$ より， $\mathrm{FF}'(=2c)>|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|(=2a)$，すなわち $c>a$

よって， $c^2-a^2=b^2$ とおくと，

標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が得られる。



y
漸近線 $y=-\frac{b}{a}x$
漸近線 $y=\frac{b}{a}x$
$x^2+y^2=c^2$
b
F'
F
$-a$
O
a
$-c$
c
x
$-b$

74

(1)

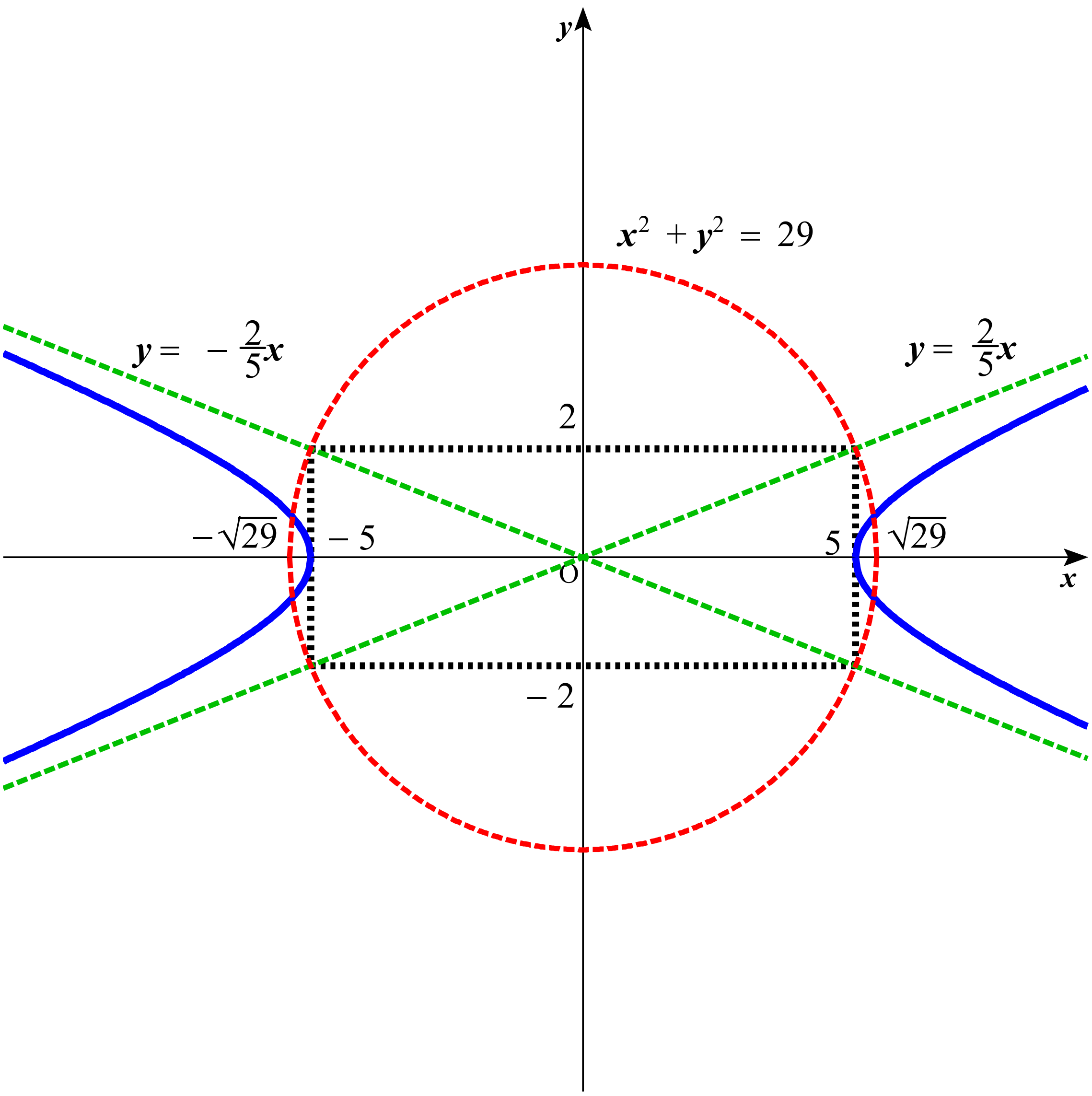
$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ より，

頂点：$(5,\ 0),\ (-5,\ 0)$

焦点：$\left(\sqrt{5^2+2^2},\ 0\right)=\left(\sqrt{29},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{5^2+2^2},\ 0\right)=\left(-\sqrt{29},\ 0\right)$

漸近線：$y=\dfrac{2}{5}x,\ y=-\dfrac{2}{5}x$

焦点までの距離の差：$2\cdot 5=10$



(2)

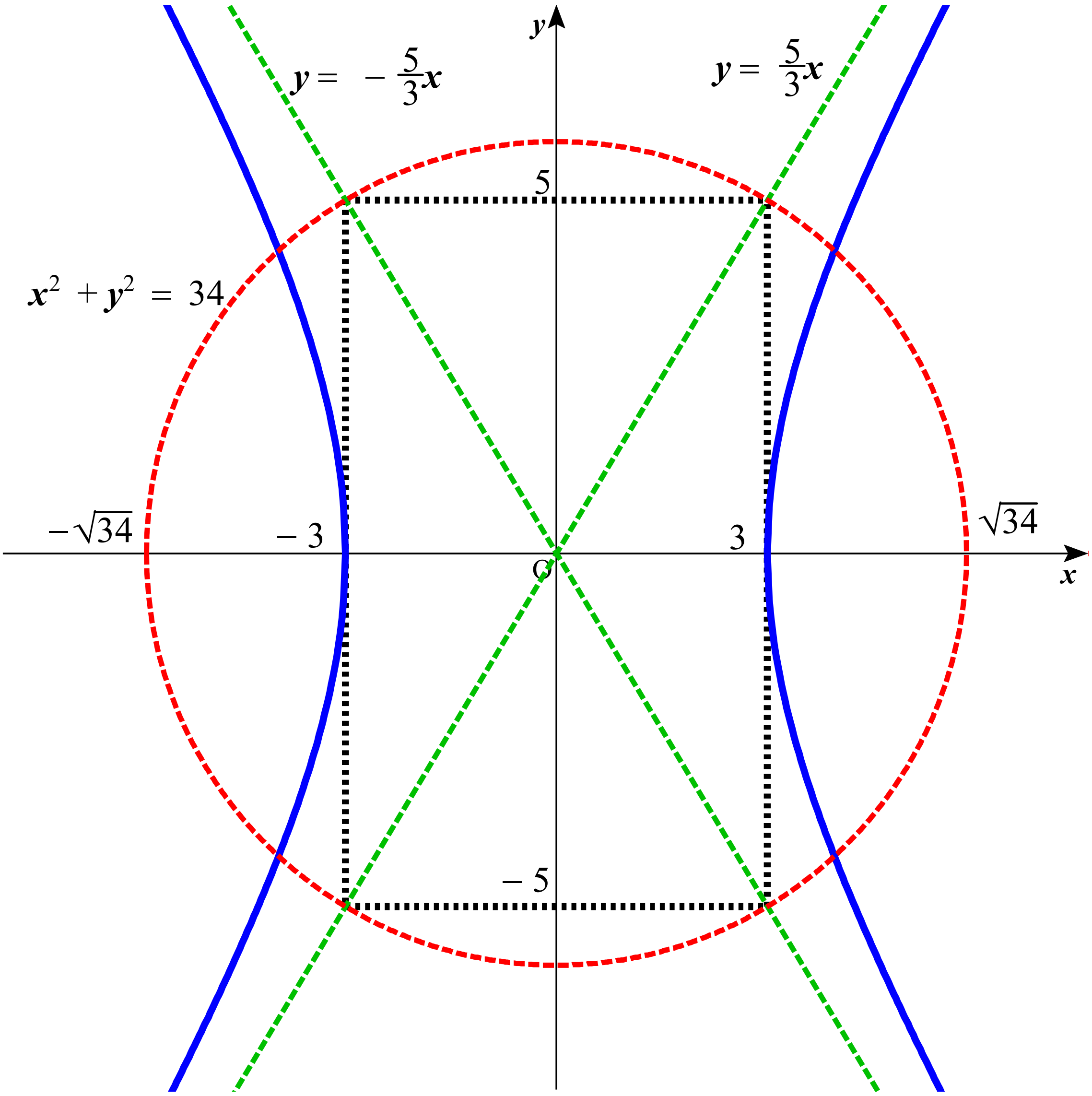
$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$ より,

頂点：$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

焦点：$\left(\sqrt{3^2+5^2},\ 0\right)=\left(\sqrt{34},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{3^2+5^2},\ 0\right)=\left(-\sqrt{34},\ 0\right)$

漸近線：$y=\dfrac{5}{3}x,\ y=-\dfrac{5}{3}x$

焦点までの距離の差：$2\cdot 3=6$



(3)

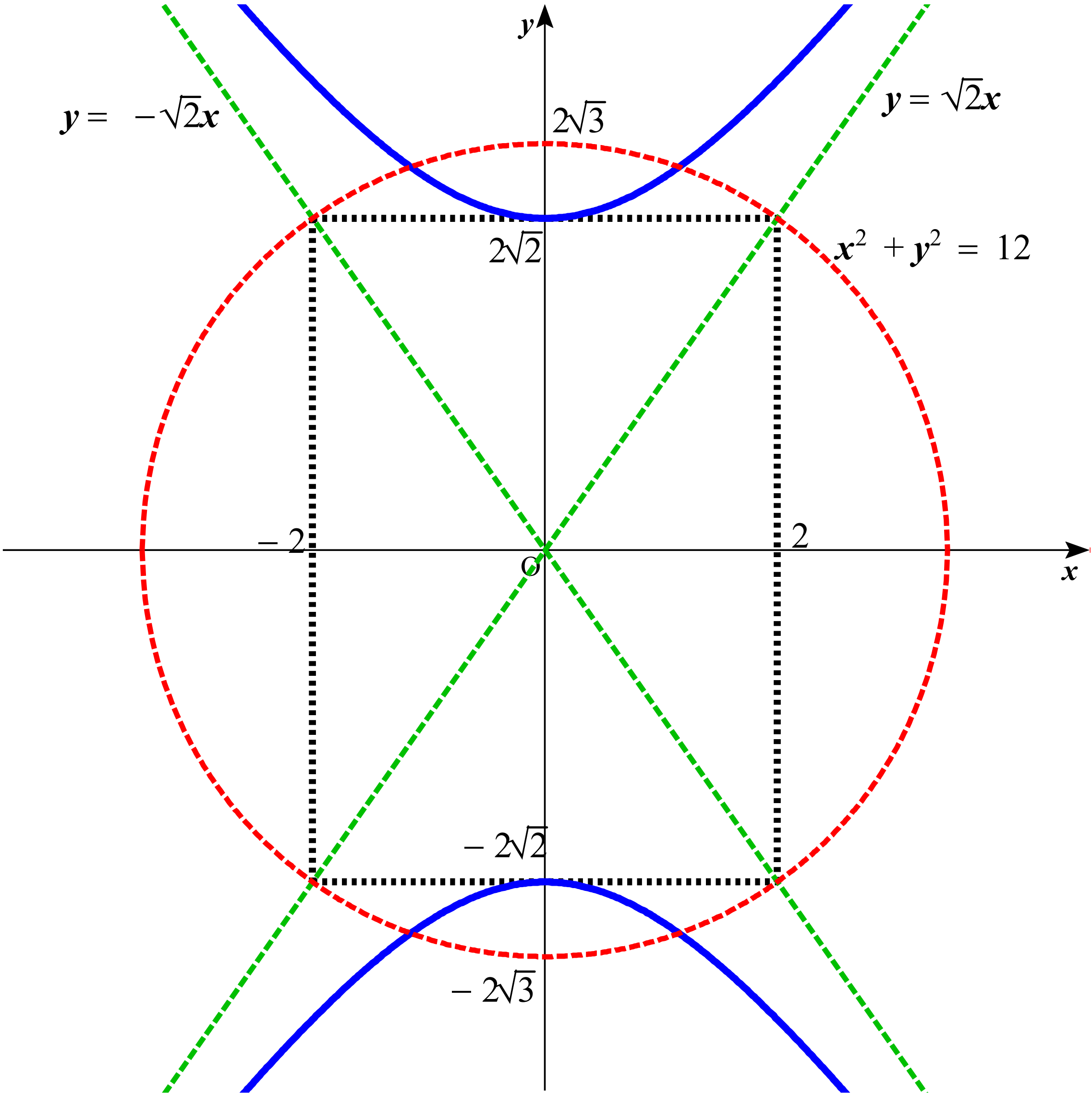
$\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1$ より，

頂点：$\left(0,\ 2\sqrt{2}\right),\ \left(0,\ -2\sqrt{2}\right)$

焦点：$\left(0,\ \sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\right)=\left(0,\ 2\sqrt{3}\right),\ \left(0,\ -\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\right)=\left(0,\ -2\sqrt{3}\right)$

漸近線：$y=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}x,\ y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{2}x$ すなわち $y=\sqrt{2}x,\ y=-\sqrt{2}x$

焦点までの距離の差：$2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$



(4)

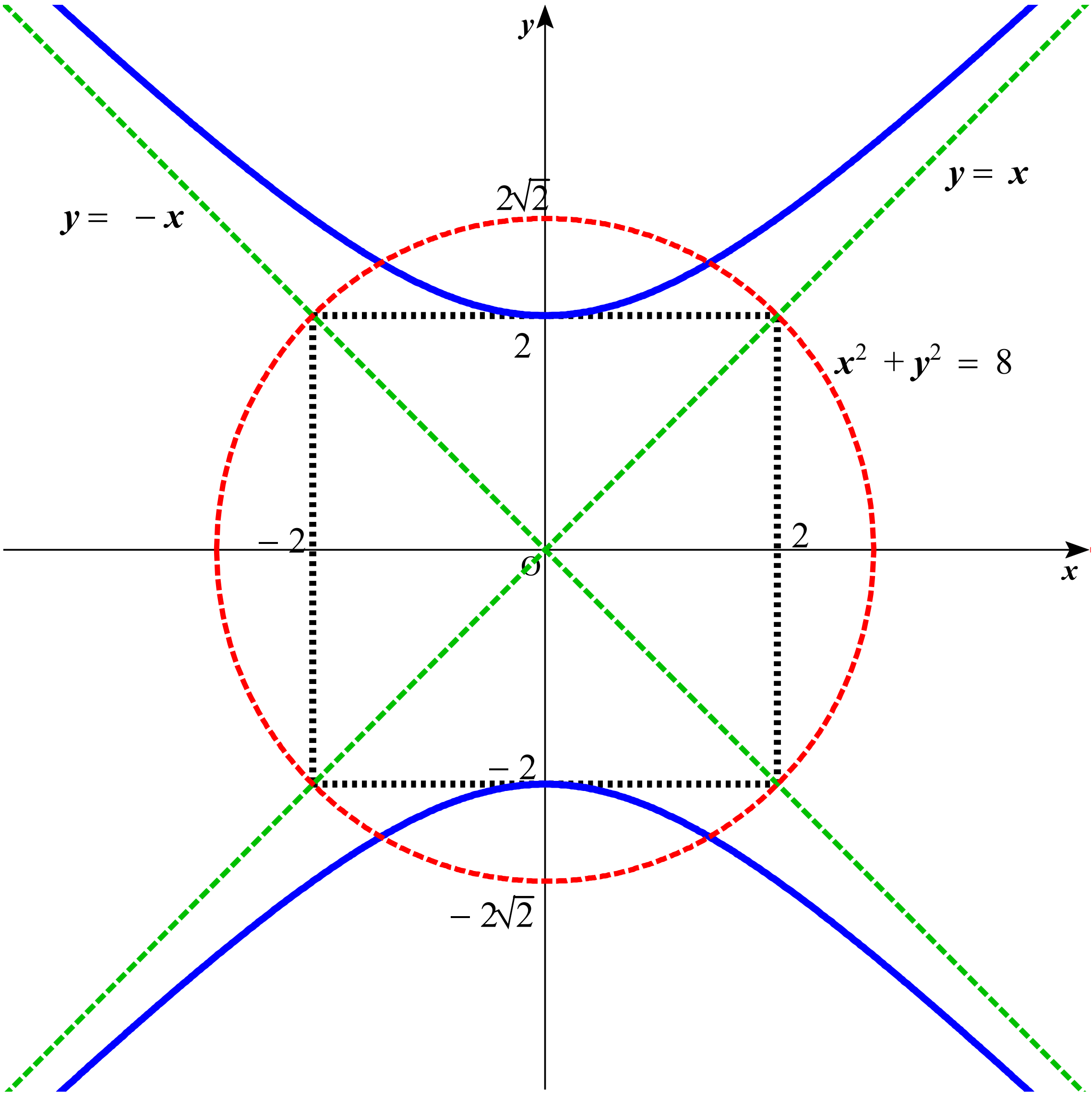
$\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$ より，

頂点：$(0,\ 2),\ (0,\ -2)$

焦点：$\left(0,\ \sqrt{2^2+2^2}\right)=\left(0,\ 2\sqrt{2}\right),\ \left(0,\ -\sqrt{2^2+2^2}\right)=\left(0,\ -2\sqrt{2}\right)$

漸近線：$y=\dfrac{2}{2}x,\ y=-\dfrac{2}{2}x$ すなわち $y=x,\ y=-x$

焦点までの距離の差：$2\cdot 2=4$



75　略解

(1)

双曲線の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$とすると，$a^2+b^2=4^2$，$2a=4$ より，$a^2=4,\ b^2=12$

よって，$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

(2)

解法 1

双曲線の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$とすると，

$a^2+b^2=3^2$すなわち$a^2+b^2=9$　$\therefore b^2=9-a^2$　・・・①

$\dfrac{4^2}{a^2}-\dfrac{5^2}{b^2}=-1$すなわち$25a^2-16b^2=a^2b^2$　$\therefore -a^2b^2+25a^2-16b^2=0$　・・・②

①を②に代入し，aについて整理すると，$a^4+32a^2-144=0$　$\therefore (a^2-4)(a^2+9)=0$

これと①より，$a^2=4,\ b^2=5$

よって，$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=-1$

解法 2

双曲線の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$とすると，

$a^2+b^2=3^2$すなわち$a^2+b^2=9$　・・・①

$2b=\sqrt{(4-0)^2+\{5-(-3)\}^2}-\sqrt{(4-0)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$　$\therefore b^2=5$

これと①より，$a^2=4$

よって，$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=-1$

(3)

条件より，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を頂点とするから，

双曲線の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,\ b>0$）とすると，$a^2=\dfrac{1}{4}$　・・・①

漸近線の傾きより，$\dfrac{b}{a}=2$　$\therefore b^2=4a^2$　・・・②

①，②より，$b^2=1$

よって，$4x^2-y^2=1$

(4)

条件より，双曲線の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1$ （$a>0$）とすると，

$a^2+a^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$ より， $a^2=3$

よって， $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ すなわち $x^2-y^2=-3$

76

焦点の座標は$\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$

漸近線の方程式は $y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x$ すなわち $bx-ay=0,\ bx+ay=0$

焦点$\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$と漸近線 $bx-ay=0$ の距離： $\dfrac{\left|b\sqrt{a^2+b^2}-a\cdot 0\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$

焦点$\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$と漸近線 $bx+ay=0$ の距離： $\dfrac{\left|b\sqrt{a^2+b^2}+a\cdot 0\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$

焦点$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$と漸近線 $bx-ay=0$ の距離： $\dfrac{\left|b\cdot\left(-\sqrt{a^2+b^2}\right)-a\cdot 0\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$

焦点$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$と漸近線 $bx+ay=0$ の距離： $\dfrac{\left|b\cdot\left(-\sqrt{a^2+b^2}\right)+a\cdot 0\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$

よって，焦点と漸近線の距離はいずれも b

77

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点を $(c,\ 0),\ (-c,\ 0)$（$c>0$）とすると，$8=4+c^2$　$\therefore c=2$

また，　$\dfrac{2^2}{8}+\dfrac{p^2}{4}=1$ より，$p=\pm\sqrt{2}$

よって，双曲線は $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ を焦点とし，点 $\left(2,\ \sqrt{2}\right)$ を通る。

この双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,\ b>0$）とすると，

点 $\left(2,\ \sqrt{2}\right)$ と 2 つの焦点までの距離の差は $2a$ だから，

$\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\left(\sqrt{2}-0\right)^2}-\sqrt{(2-2)^2+\left(\sqrt{2}-0\right)^2}=2a$　$\therefore a=\sqrt{2}$

これと $a^2+b^2=2^2$ より，$b=\sqrt{2}$

よって，求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ すなわち $x^2-y^2=2$

また，漸近線の方程式は $y=x,\ y=-x$

漸近線の方程式の別解

双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,\ b>0$）とすると，

点 $\left(2,\ \sqrt{2}\right)$ を通るから，$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$　$\therefore 4b^2-2a^2-a^2b^2=0$　・・・①

$(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ を焦点とするから，$a^2+b^2=2^2$　$\therefore b^2=4-a^2$　・・・②

②を①に代入し，a について整理すると，$a^4-10a^2+16=0$　$\therefore \left(a^2-2\right)\left(a^2-8\right)=0$

②より，$a^2=2$ とすると $b^2=2$，$a^2=8$ とすると $b^2=-4<0$ より不適

よって，双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ すなわち $x^2-y^2=2$

78

解法 1

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より，漸近線は $x+y=0,\ x-y=0$

よって，$\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}&=\frac{|s+t|}{\sqrt{1^2+1^2}}\cdot\frac{|s-t|}{\sqrt{1^2+1^2}}\\&=\frac{|s^2-t^2|}{2}\\&=\frac{|a^2|}{2}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

解法 2

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より，漸近線は $x+y=0,\ x-y=0$

点 P の x 座標を s とすると，P の座標は $\left(s,\ \sqrt{s^2-a^2}\right)$ または $\left(s,\ -\sqrt{s^2-a^2}\right)$

$\left(s,\ \sqrt{s^2-a^2}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}&=\frac{\left|s+\sqrt{s^2-a^2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\cdot\frac{\left|s-\sqrt{s^2-a^2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\\&=\frac{|a^2|}{2}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

同様にして，$\left(s,\ \sqrt{s^2-a^2}\right)$ のときも $\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{a}{2}$

よって，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{a}{2}$

79

$P(x,\ y)$ とすると,

$PA=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, $PB=\sqrt{x^2+(y-b)^2}$, $PC=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$, $PD=\sqrt{x^2+(y+b)^2}$

$PA\cdot PC=PB\cdot PD$ より,

$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+b)^2}$

両辺を 2 乗すると,

$\{(x-a)^2+y^2\}\{(x+a)^2+y^2\}=\{x^2+(y-b)^2\}\{x^2+(y+b)^2\}$

両辺を展開すると,

$(x^2-a^2)^2+y^2\{(x-a)^2+(x+a)^2\}+y^4=x^4+x^2\{(y-b)^2+(y+b)^2\}+(y^2-b^2)^2$

より,

$x^4-2a^2x^2+a^4+2x^2y^2+2a^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+2b^2x^2+y^4-2b^2y^2+b^4$

両辺を整理すると,

$2(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)y^2=(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

$a>0,\ b>0$ より, $a^2+b^2\neq 0$ だから, 点 P の必要条件は $2x^2-2y^2=(a+b)(a-b)$

逆に $2x^2-2y^2=(a+b)(a-b)$ は点 P の条件を満たす。

よって,

$a=b$ のとき

$2x^2-2y^2=0$ すなわち $2(x+y)(x-y)=0$

よって, 2 直線 $x+y=0,\ x-y=0$

$a\neq b$ のとき

$2x^2-2y^2=a^2-b^2$ すなわち双曲線 $x^2-y^2=\dfrac{a^2-b^2}{2}$