式と曲線 4　2 次曲線の平行移動

1．関数の平行移動

点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 移動した点を $\mathrm{B}(X,\ Y)$ とすると，

$(X,\ Y)=(x+p,\ y+q)$ より，$(x,\ y)=(X-p,\ Y-q)$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X-p,\ Y-q)$ より，点 B は $Y-q=f(X-p)$ を満たす。

すなわち点 B は $y=f(x-p)+q$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X-p,\ Y-q)$ より，点 B は $f(X-p,\ Y-q)=0$ を満たす。

すなわち点 B は $f(x-p,\ y-q)=0$ 上の点である。

2．関数の対称移動

2-1．関数の，x 軸に関しての，対称移動

点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $\mathrm{B}(X,\ Y)$ とすると，

$(X,\ Y)=(x,\ -y)$ より，$(x,\ y)=(X,\ -Y)$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X,\ -Y)$ より，点 B は $-Y=f(X)$ を満たす。

すなわち点 B は $y=-f(x)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X,\ -Y)$ より，点 B は $f(X,\ -Y)=0$ を満たす。

すなわち点 B は $f(x,\ -y)=0$ 上の点である。

2-2．関数の，y 軸に関しての，対称移動

点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $\mathrm{B}(X,\ Y)$ とすると，

$(X,\ Y)=(-x,\ y)$ より，$(x,\ y)=(-X,\ Y)$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(-X,\ Y)$ より，点 B は $Y=f(-X)$ を満たす。

すなわち点 B は $y=f(-x)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(-X,\ Y)$ より，点 B は $f(-X,\ Y)=0$ を満たす。

すなわち点 B は $f(-x,\ y)=0$ 上の点である。

2-3．関数の，y 軸に関しての，対称移動

点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $\mathrm{B}(X,\ Y)$ とすると，

$(X,\ Y)=(-x,\ -y)$ より，$(x,\ y)=(-X,\ -Y)$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(-X,\ -Y)$ より，点 B は $-Y=f(-X)$ を満たす。

すなわち点 B は $y=-f(-x)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(-X,\ -Y)$ より，点 B は $f(-X,\ -Y)=0$ を満たす。

すなわち点 B は $f(-x,\ -y)=0$ 上の点である。

2-4．関数の，$y=x$ に関しての，対称移動

点 A$(x,\ y)$ を $y=x$ 軸に関して対称移動した点を B$(X,\ Y)$ とすると，

$(X,\ Y)=(y,\ x)$ より，$(x,\ y)=(Y,\ X)$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

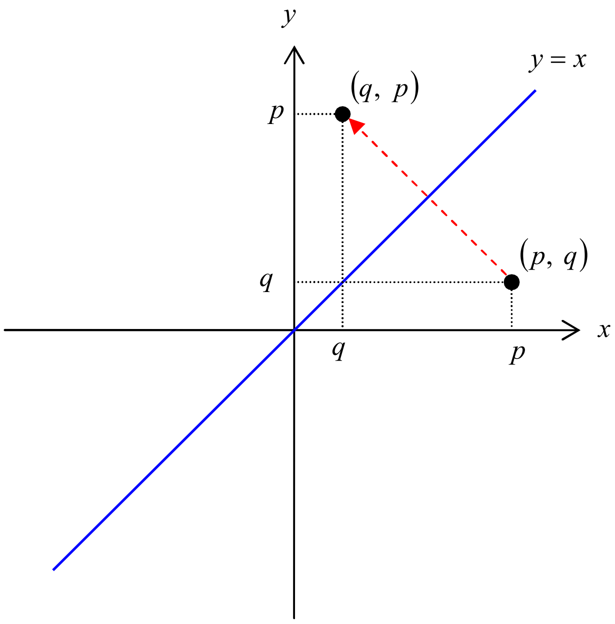
$(x,\ y)=(Y,\ X)$ より，点 B は $X=f(Y)$ を満たす。

すなわち点 B は $x=f(y)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(Y,\ X)$ より，点 B は $f(Y,\ X)=0$ を満たす。

すなわち点 B は $f(y,\ x)=0$ 上の点である。



3. 関数の回転移動

$A(x,\ y)$ を原点 O を中心として角 θ だけ回転した点を $B(X,\ Y)$ とすると，
$A(x,\ y)$ は $B(X,\ Y)$ を原点を中心として角 $-\theta$ だけ回転した点だから，

$(X,\ Y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ （$r=\mathrm{OB}=\sqrt{X^2+Y^2}$ ）とすると，

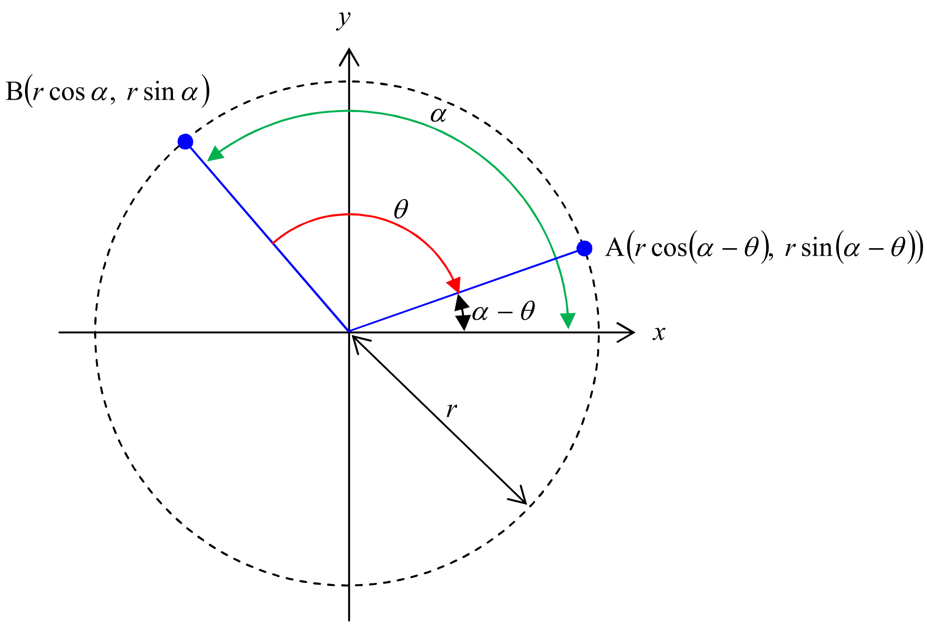
$$
\begin{aligned}
(x,\ y)&=(r\cos(\alpha-\theta),\ r\sin(\alpha-\theta))\\
&=(r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta-r\cos\alpha\sin\theta)\\
&=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)
\end{aligned}
$$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$ より，
点 B は $-X\sin\theta+Y\cos\theta=f(X\cos\theta+Y\sin\theta)$ を満たす。
すなわち点 B は $-x\sin\theta+y\cos\theta=f(x\cos\theta+y\sin\theta)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合

$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$ より，
点 B は $f(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)=0$ を満たす。
すなわち点 B は $f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)=0$ 上の点である。



80

(1)

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線の方程式

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

焦点の座標

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{16-9},\ 0\right)$, すなわち $\left(\sqrt{7},\ 0\right), \left(-\sqrt{7},\ 0\right)$ だから,

これを $\left(\sqrt{7},\ 0\right), \left(-\sqrt{7},\ 0\right)$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動すればよい。

よって,その座標は $\left(\sqrt{7}+2,\ 3\right), \left(-\sqrt{7}+2,\ 3\right)$

(2)

$x^2-y^2=1$ を x 軸方向に -1, y 軸方向に 5 だけ平行移動した曲線の方程式

$$(x+1)^2-(y-5)^2=1$$

焦点の座標

$x^2-y^2=1$ の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{1^2+1^2},\ 0\right)$, すなわち $\left(\sqrt{2},\ 0\right), \left(-\sqrt{2},\ 0\right)$ だから,

これを x 軸方向に -1, y 軸方向に 5 だけ平行移動すればよい。

よって,その座標は $\left(\sqrt{2}-1,\ 5\right), \left(-\sqrt{2}-1,\ 5\right)$

(3)

$y^2=x$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式

$$(y+2)^2=x-3$$

焦点の座標

$y^2=x$ の焦点の座標は $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ だから,

これを x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動すればよい。

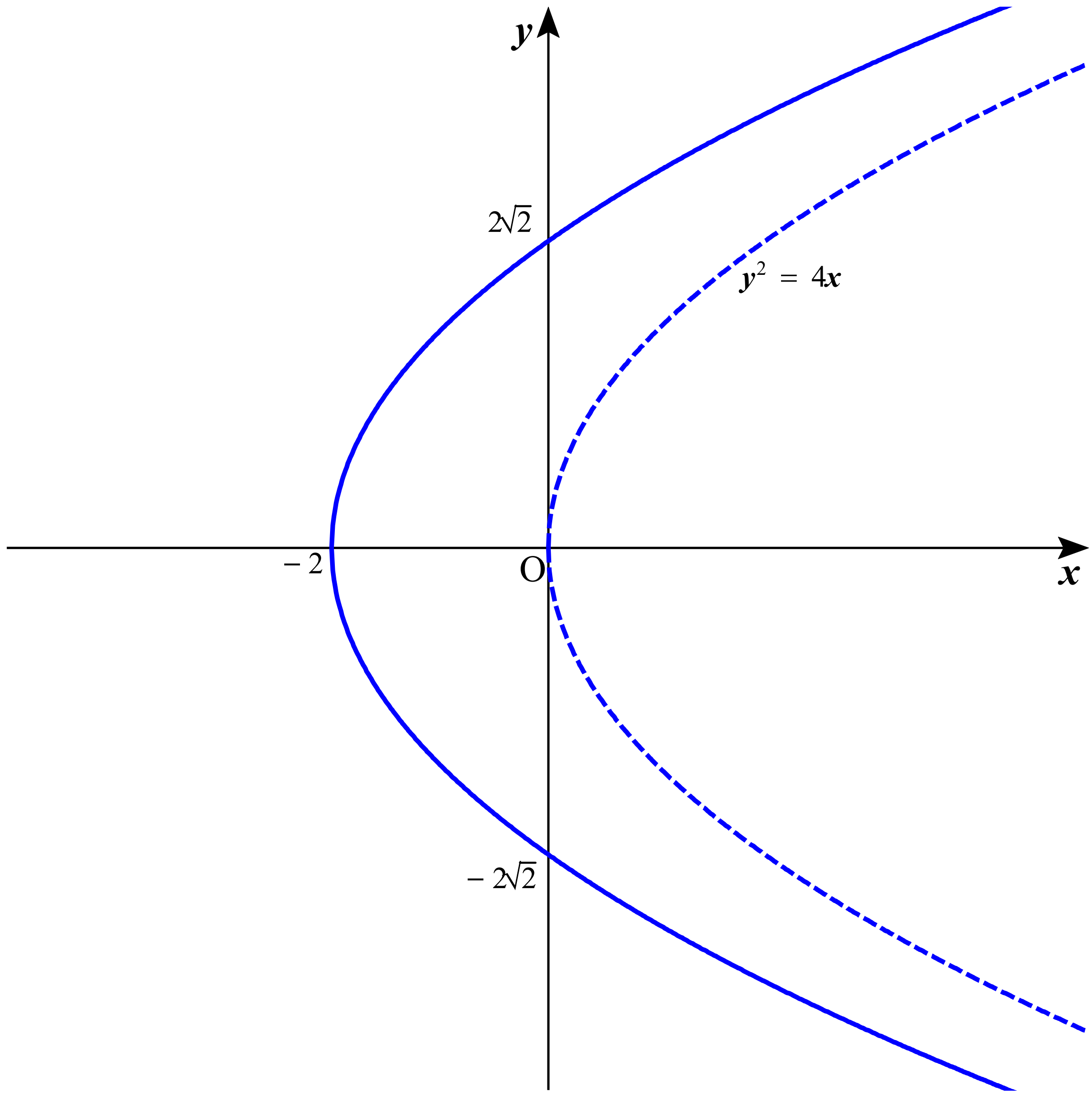
よって, $\left(\dfrac{13}{4},\ -2\right)$

81

(1)

$y^2=4(x+2)$ より，

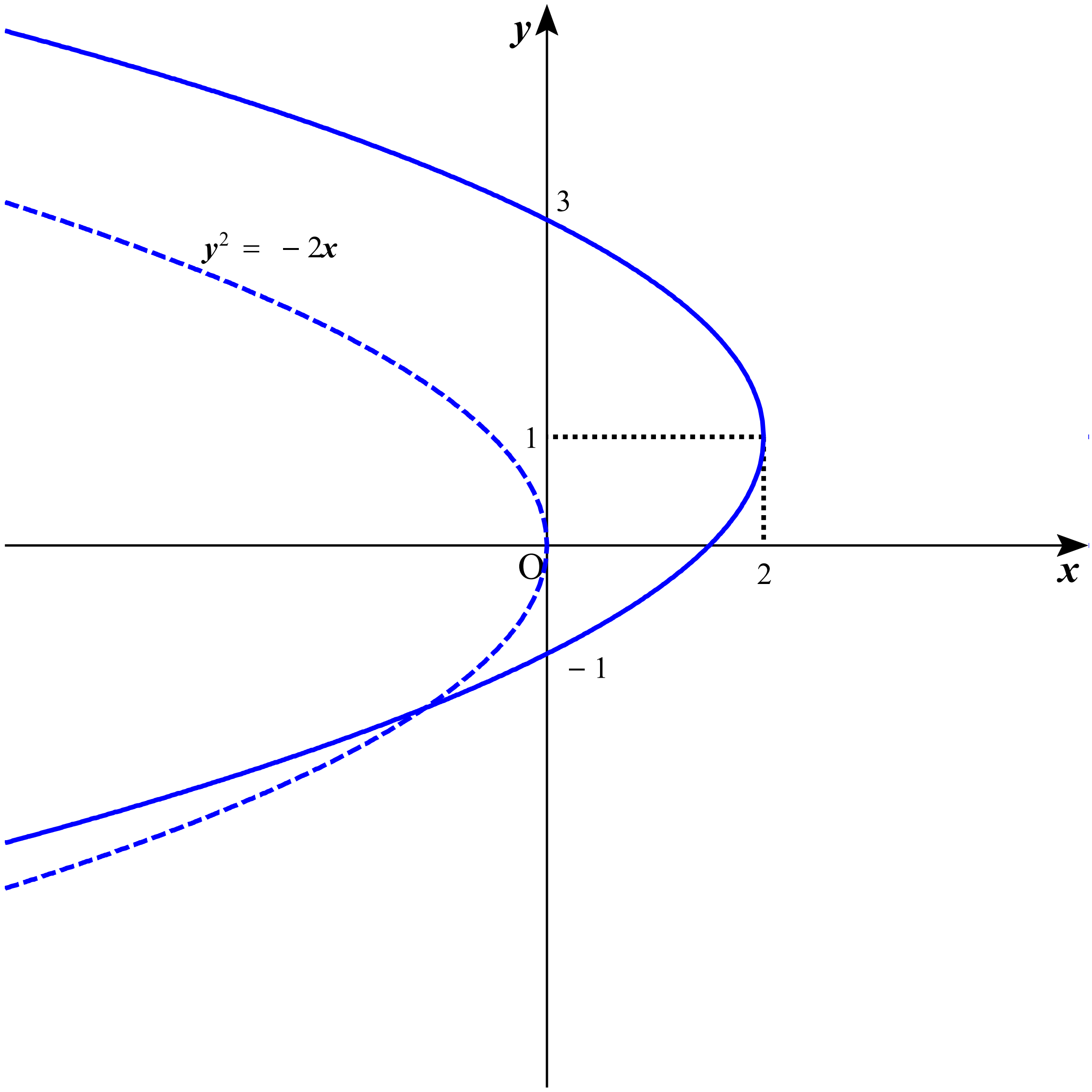
放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線を表す。



(2)

$(y-1)^2=-2(x-2)$ より，

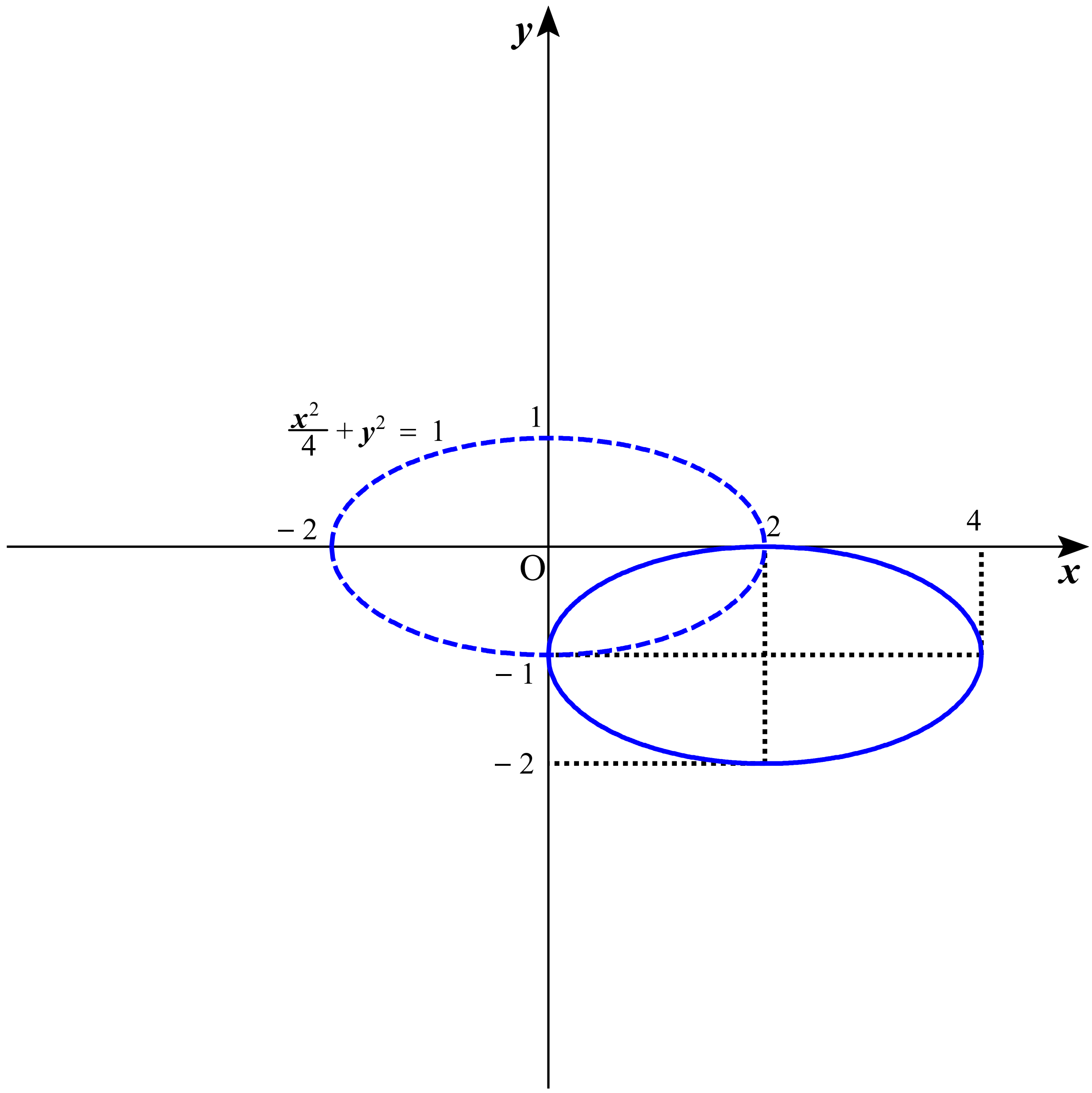
放物線 $y^2=-2x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線を表す。



(3)

$(x-2)^2+4(y+1)^2-4=0$ すなわち $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$ より，

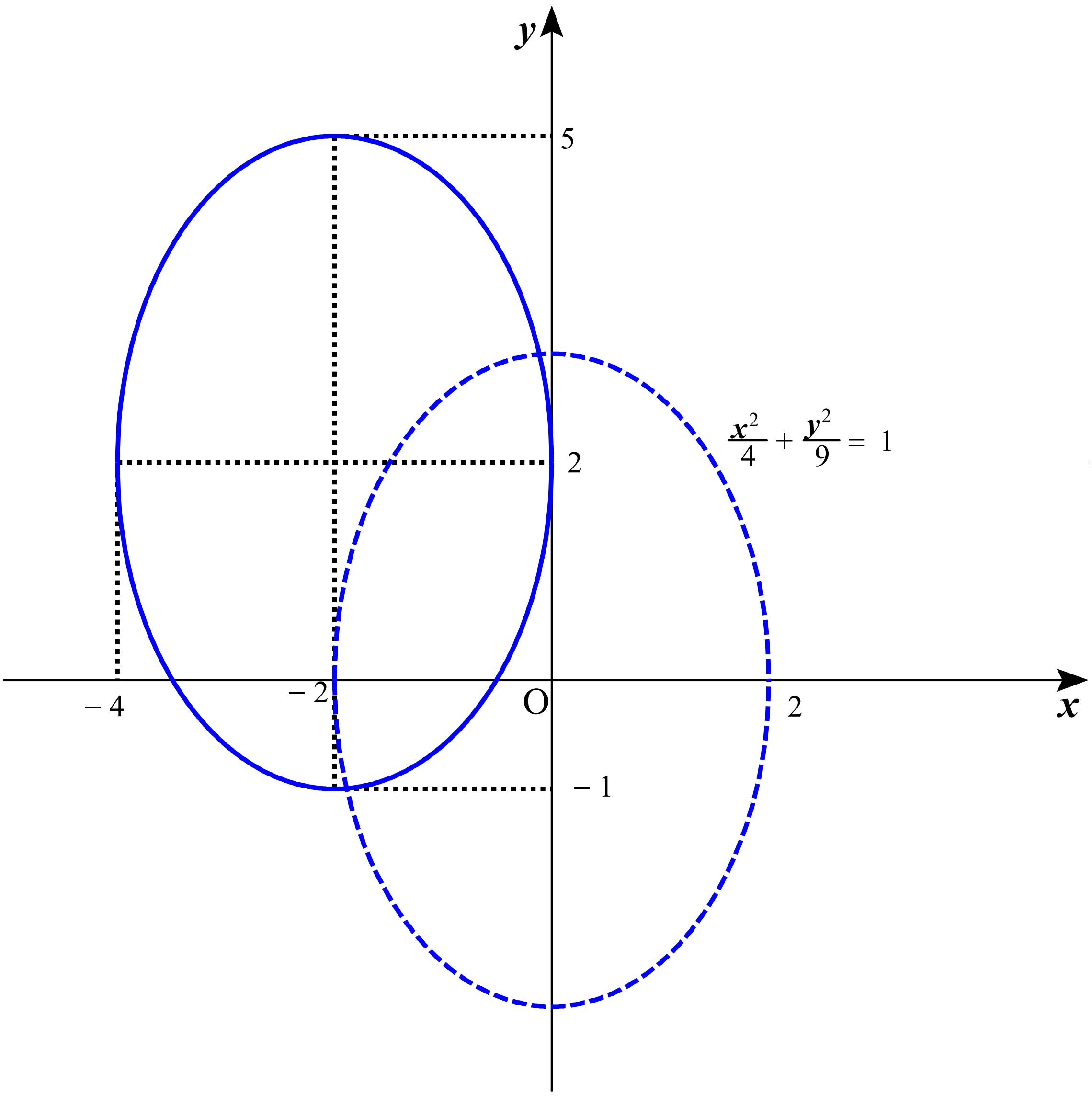
楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円を表す。



(4)

$9(x+2)^2+4(y-2)^2=36$ すなわち $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ より，

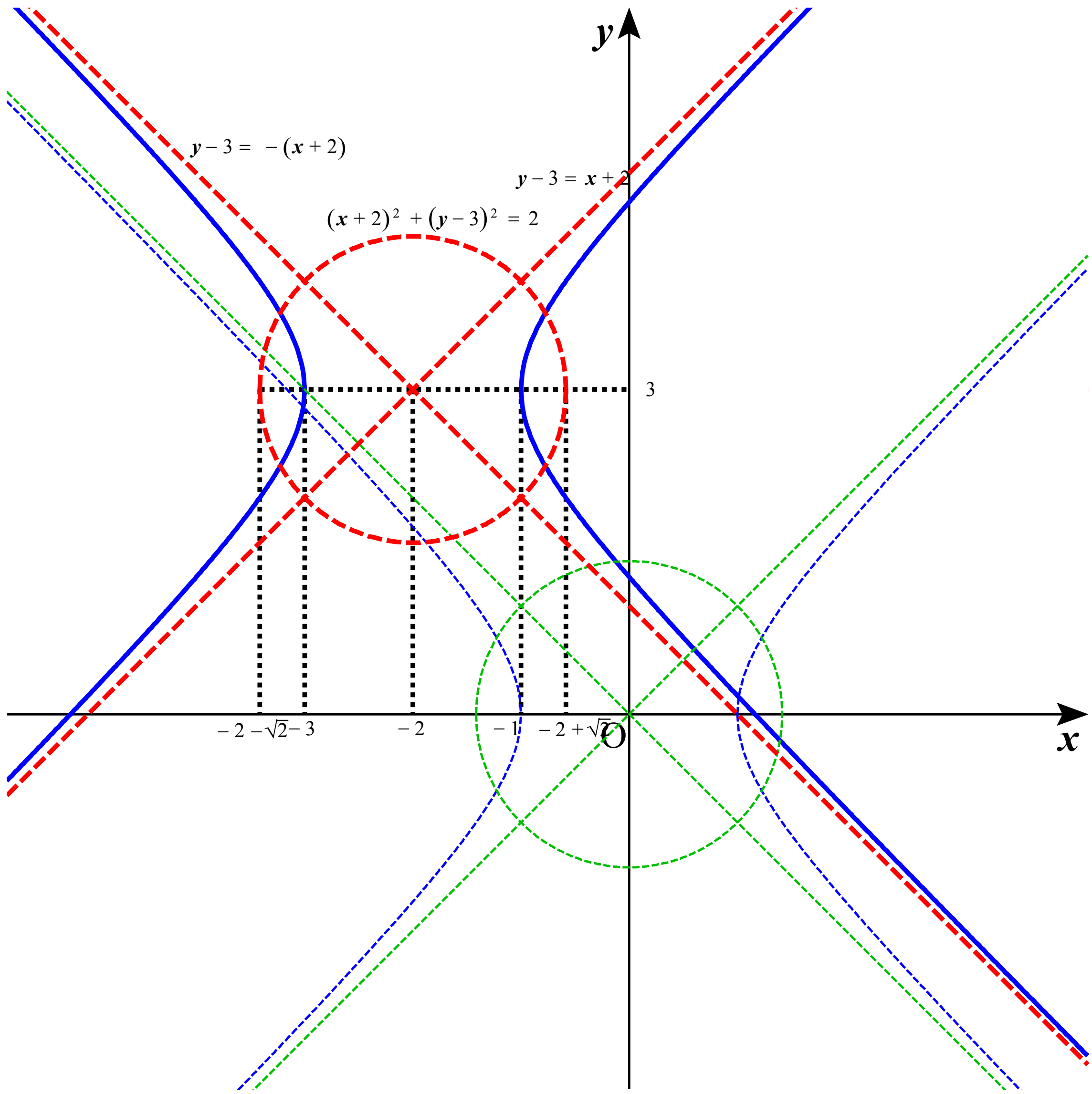
楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に -2， y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円を表す。



(5)

$(x+2)^2-(y-3)^2=1$ より，

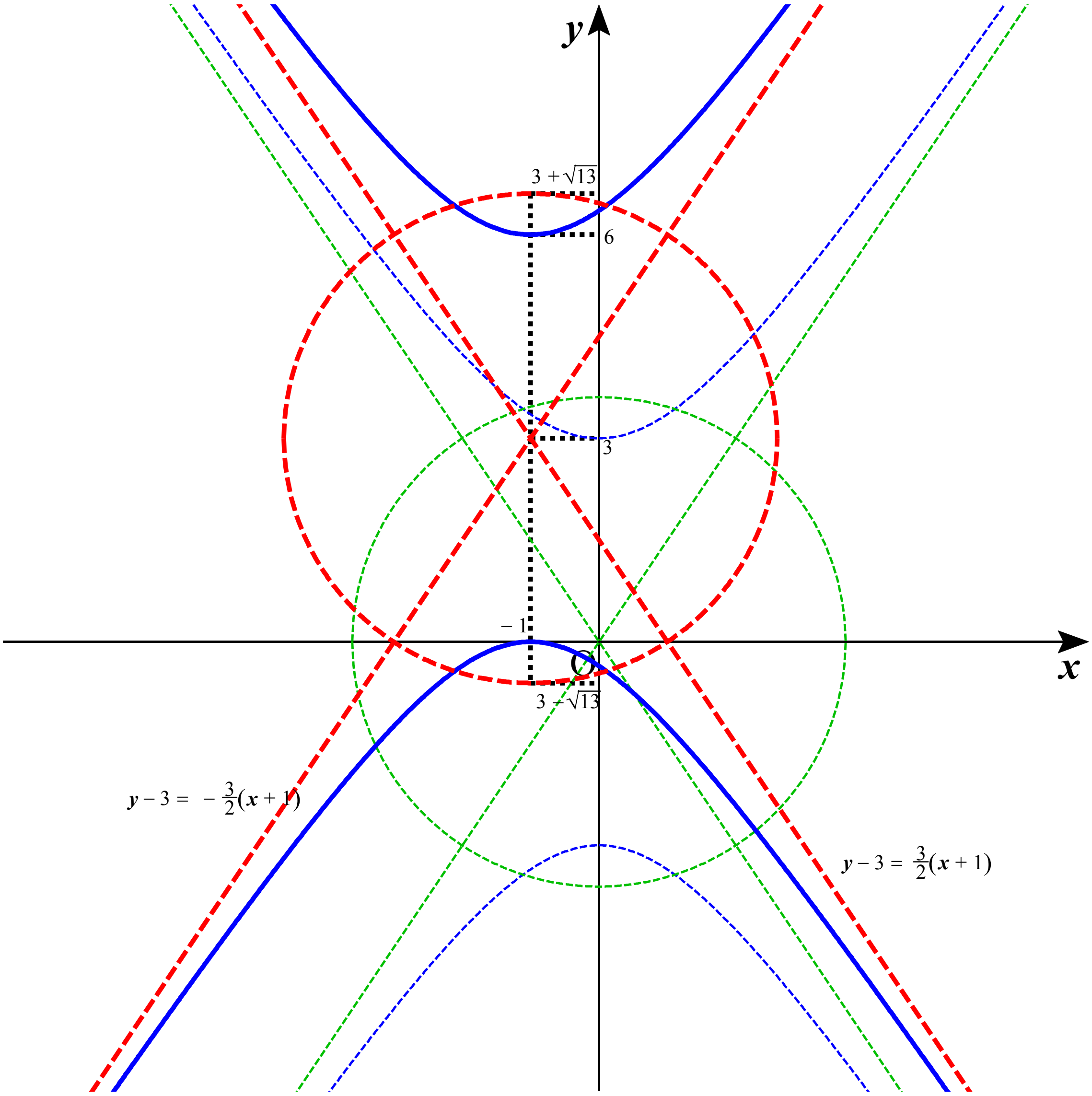
双曲線 $x^2-y^2=1$ を x 軸方向に -2， y 軸方向に 3 だけ平行移動した双曲線を表す。



(6)

$-9(x+1)^2+4(y-3)^2=36$ すなわち $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=-1$ より，

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に -1，　y 軸方向に 3 だけ平行移動した双曲線を表す。



82

(1)

条件から$(1,\ -3)$, $(1,\ -1)$は楕円の 2 つの焦点であり, 2 焦点の中点の座標は$(1,\ -2)$だから,
求める点の軌跡は$(0,\ -1)$, $(0,\ 1)$を焦点とし，各焦点からの距離の和が 4 の楕円である。
x 軸方向に 1， y 軸方向に-2 だけ平行移動した楕円である。
$(0,\ -1)$と$(0,\ 1)$を 2 つの焦点とし，焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると， $2b=4,\ a^2+1^2=b^2$ より， $a^2=3,\ b^2=4$

よって， $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

ゆえに，求める点の軌跡は$\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

(2)

条件から$(-7,\ 2)$, $(1,\ 2)$は双曲線の 2 つの焦点であり, 2 焦点の中点の座標は$(-3,\ 2)$だから,
求める点の軌跡は$(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$を焦点とし, 各焦点からの距離の差が 6 の双曲線である。
x 軸方向に-3， y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線である。
$(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$を焦点とし，各焦点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると， $a^2+b^2=4^2,\ 2a=6$ より， $a^2=9,\ b^2=7$

よって， $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

ゆえに，求める点の軌跡は$\dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{7}=1$

(3)

条件から，点の軌跡は $y=\dfrac{1}{2}$ を準線， $\left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)$を焦点とする放物線である。

この放物線の頂点の座標は，焦点から準線に下ろした垂線の足$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$と焦点の中点より,

$(2,\ 1)$だから，この放物線は準線を $y=-\dfrac{1}{2}$， 焦点を$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$とする放物線,

すなわち$x^2=2y$ を x 軸方向に 2， y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線である。
よって，求める点の軌跡は$(x-2)^2=2(y-1)$

(4)

条件から，点の軌跡は $x=2$ を準線，$(-4,\ 3)$ を焦点とする放物線である。

この放物線の頂点の座標は，焦点から準線に下ろした垂線の足 $(2,\ 3)$ と焦点の中点より，

$(-1,\ 3)$ だから，この放物線は準線を $x=3$，焦点を $(-3,\ 0)$ とする放物線，

すなわち $y^2=-12y$ を x 軸方向に -1 y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線である。

よって，求める点の軌跡は $(y-3)^2=-12(x+1)$

83

双曲線の中心は漸近線の交点だから，その座標は $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=-2x-3 \end{cases}$ の解より $(-2,\ 1)$

よって，この双曲線は漸近線の方程式が $y=2x,\ y=-2x$，点 $(1,\ 0)$ を通る双曲線を

x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

漸近線の方程式が $y=2x,\ y=-2x$，点 $(1,\ 0)$ を通る双曲線の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>0,\ b>0$） とすると，

$\dfrac{b}{a}=2$，$\dfrac{1^2}{a^2}+\dfrac{0^2}{b^2}=1$ より，$a^2=1,\ b^2=4$

よって，$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

ゆえに，求める双曲線の方程式は $(x+2)^2-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

84

$y^2=-4x$ 上の点を $(x,\ y)$ とし，これを対称移動した点を $(X,\ Y)$ とする。

(1)

$x=X,\ y=-Y$ より，$(X,\ Y)$ は $(-Y)^2=-4X$ を満たす。

よって，求める方程式は $y^2=-4x$

(2)

$x=-X,\ y=Y$ より，$(X,\ Y)$ は $Y^2=-4(-X)$ を満たす。

よって，求める方程式は $y^2=4x$

(3)

$x=-X,\ y=-Y$ より，$(X,\ Y)$ は $(-Y)^2=-4(-X)$ を満たす。

よって，求める方程式は $y^2=4x$

(4)

$x=Y,\ y=X$ より，$(X,\ Y)$ は $X^2=-4Y$ を満たす。

よって，求める方程式は $x^2=-4y$

(5)

$\dfrac{x+X}{2}=-1,\ y=Y$ より，$x=-X-2,\ y=Y$

よって，$(X,\ Y)$ は $Y^2=-4(-X-2)$ を満たす。ゆえに，求める方程式は $y^2=4(x+2)$

(6)

$x=X,\ \dfrac{y+Y}{2}=2$ より，$x=X,\ y=-Y+4$

よって，$(X,\ Y)$ は $(-Y+4)^2=-4X$ を満たす。ゆえに，求める方程式は $(y-4)^2=-4x$

(7)

$\dfrac{x+X}{2}=3,\ \dfrac{y+Y}{2}=-1$ より，$x=-X+6,\ y=-Y-2$

よって，$(X,\ Y)$ は $(-Y-2)^2=-4(-X+6)$ を満たす。

ゆえに，求める方程式は $(y+2)^2=4(x-6)$

85

$7x^2+48xy-7y^2+25=0$，すなわち $(7x-y)(x+7y)+25=0$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，

点 P を $y=-\dfrac{1}{2}x$ に関して対称移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とする。

P と Q の中点は $y=-\dfrac{1}{2}x$ 上にあるから，

$\dfrac{y+Y}{2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+X}{2}$ より，$x+2y=-X-2Y$ ・・・①

直線 PQ と $y=-\dfrac{1}{2}x$ は直交するから，$-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y-Y}{x-X}=-1$ より，$2x-y=2X-Y$ ・・・②

①かつ②より，$x=\dfrac{3X-4Y}{5},\ y=\dfrac{-4X-3Y}{5}$

これを $(7x-y)(x+7y)+25=0$ に代入し，整理することにより，$X^2-Y^2=1$

よって，求める曲線の方程式は $x^2-y^2=1$

86

楕円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，P を $y=x$ に関して対称移動した点の座標は $(y,\ x)$，

これを更に x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した点の座標は $(y-2,\ x+1)$

これを点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，$(X,\ Y)=(y-2,\ x+1)$ より，$x=Y-1,\ y=X+2$

これを与えられた楕円の方程式に代入すると，$\dfrac{Y^2}{9}+(X-1)^2=1$

よって，求める曲線の方程式は $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{9}=1$

87

$\mathrm{P}(x,\ y)$ を原点を中心として角 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，
$\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を原点を中心として角 $-\theta$ だけ回転した点だから，
$(X,\ Y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ とすると，

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(r\cos(\alpha-\theta),\ r\sin(\alpha-\theta))\\&=(r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta-r\cos\alpha\sin\theta)\\&=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)\end{aligned}$$

点 A が $y=f(x)$ 上の点の場合
$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$ より，
点 B は $-X\sin\theta+Y\cos\theta=f(X\cos\theta+Y\sin\theta)$ を満たす。
すなわち点 B は $-x\sin\theta+y\cos\theta=f(x\cos\theta+y\sin\theta)$ 上の点である。

点 A が $f(x,\ y)=0$ 上の点の場合
$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$ より，
点 B は $f(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)=0$ を満たす。
すなわち点 B は $f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)=0$ 上の点である。

(1)

$xy=-1$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，

これを原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$(x,\ y)=\left(X\cos\dfrac{\pi}{4}+Y\sin\dfrac{\pi}{4},\ -X\sin\dfrac{\pi}{4}+Y\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，

$$\begin{aligned}xy&=\left(X\cos\frac{\pi}{4}+Y\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(-X\sin\frac{\pi}{4}+Y\cos\frac{\pi}{4}\right)\\&=\left(-X^2+Y^2\right)\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+XY\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-X^2+Y^2\right)\sin\frac{\pi}{2}+XY\cos\frac{\pi}{2}\\&=-\frac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)\end{aligned}$$

これと $xy=-1$ より，$-\dfrac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)=-1$

これより，点 Q は $X^2-Y^2=2$ を満たす。
ゆえに，求める曲線の方程式は $x^2-y^2=2$

(2)

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，

これを原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(X\cos\frac{\pi}{3}+Y\sin\frac{\pi}{3},\ -X\sin\frac{\pi}{3}+Y\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{X+\sqrt{3}Y}{2},\ \frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right)$$

より，

$$\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{1}{4}\left(\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2}{16}+\frac{3X^2-2\sqrt{3}XY+Y^2}{4}$$
$$=\frac{13X^2-6\sqrt{3}XY+7Y^2}{16}$$

これと $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ より，$\dfrac{13X^2-6\sqrt{3}XY+7Y^2}{16}=1$

これより，点 Q は $13X^2-6\sqrt{3}XY+7Y^2=16$ を満たす。

ゆえに，求める曲線の方程式は $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2=16$

(3)

$y^2=4x$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，

これを原点を中心として $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(X\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+Y\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ -X\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+Y\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=\left(X\cos\frac{\pi}{6}-Y\sin\frac{\pi}{6},\ X\sin\frac{\pi}{6}+Y\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}X-Y}{2},\ \frac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)$$

および $y^2=4x$ より，$\left(\dfrac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)^2=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}X-Y}{2}$ $\quad\therefore \dfrac{X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2}{4}=2\sqrt{3}X-2Y$

これより，点 Q は $X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2-8\sqrt{3}X+8Y=0$

ゆえに，求める曲線の方程式は $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-8\sqrt{3}x+8y=0$

8

(1)

$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=16$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，

これを原点を中心として $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(X\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+Y\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ -X\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+Y\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=\left(X\cos\frac{\pi}{6}-Y\sin\frac{\pi}{6},\ X\sin\frac{\pi}{6}+Y\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}X-Y}{2},\ \frac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)$$

より，

$$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=7\left(\frac{\sqrt{3}X-Y}{2}\right)^2-6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}X-Y}{2}\cdot\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}+13\left(\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)^2$$
$$=4X^2+16Y^2$$

これと $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=16$ より， $4X^2+16Y^2=16$

これより，点 Q は $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$ を満たす。

ゆえに，求める曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)

$3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-8x+8\sqrt{3}y=0$ すなわち $\left(\sqrt{3}x+y\right)^2-8\left(x-\sqrt{3}y\right)=0$ 上の任意の点を

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，これを原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(X\cos\frac{\pi}{3}+Y\sin\frac{\pi}{3},\ -X\sin\frac{\pi}{3}+Y\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{X+\sqrt{3}Y}{2},\ \frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right)$$

より，

$$\left(\sqrt{3}x+y\right)^2-8\left(x-\sqrt{3}y\right)=\left\{\frac{\sqrt{3}\left(X+\sqrt{3}Y\right)}{2}+\frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right\}^2-8\left\{\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}-\frac{\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}X+Y\right)}{2}\right\}$$
$$=4Y^2-16X$$

これと $\left(\sqrt{3}x+y\right)^2-8\left(x-\sqrt{3}y\right)=0$ より，$4Y^2-16X=0$

これより，点 Q は $Y^2=4X$ を満たす。
ゆえに，求める曲線の方程式は $y^2=4x$