式と曲線 5　2 次曲線と直線

89 略解

(1)

$4x^2+9y^2=36$，$2x=3y$ より，$4x^2+(3y)^2=4x^2+(2x)^2=8x^2=36$　$\therefore x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，$\left(\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \pm\sqrt{2}\right)$

(2)

$x^2-4y^2=4$，$2y=1-x$ より，$x^2-(2y)^2=x^2-(1-x)^2=2x-1=4$　$\therefore x=\dfrac{5}{2}$

ゆえに，$\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

(3)

$y^2-4x=0$，$y=1-x$ より，$y^2-4x=(1-x)^2-4x=x^2-6x+1=0$　$\therefore x=3\pm2\sqrt{2}$

ゆえに，$\left(3\pm2\sqrt{2},\ -2\mp2\sqrt{2}\right)$

(4)

$y^2-6x=0$，$x=2y-6$ より，

$y^2-6x=y^2-6(2y-6)=y^2-12y+36=(y-6)^2=0$　$\therefore y=6$

ゆえに，$(6,\ 6)$

90　略解

(1)

$x^2-y^2-1=x^2-(2x+a)^2-1=-3x^2-4ax-a^2-1=0$　$\therefore 3x^2+4ax+a^2+1=0$

判別式 $D>0$ より，$\dfrac{D}{4}=4a^2-3(a^2+1)=a^2-3>0$　$\therefore a<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<a$

(2)

$4x^2+9y^2-36=4x^2+9(mx+3)^2-36=(9m^2+4)x^2+54mx+45=0$

判別式 $D=0$ より，$\dfrac{D}{4}=(27m)^2-45(9m^2+4)=9^2\cdot3^2m^2-9^2\cdot5m^2-45=36(9m^2-5)=0$

$\therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{54m}{9m^2+4}\right)=\dfrac{27\cdot\left(\mp\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)}{9\cdot\dfrac{5}{9}+4}=\mp\sqrt{5}$

また，$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(\mp\sqrt{5}\right)+3=\dfrac{4}{3}$　ゆえに，接点の座標は$\left(\pm\sqrt{5},\ \dfrac{4}{3}\right)$

(3)

$y^2+8x=y^2+8(2-by)=y^2-8by+16=0$

判別式 $D<0$ より，$\dfrac{D}{4}=16b^2-16=16(b^2-1)<0 \quad \therefore -1<b<1$

91　略解

(1)

$4x^2-9(k-x)^2-36=-5x^2+18kx-9k^2-36=0$，すなわち $5x^2-18kx+9k^2+36=0$ より，

$\dfrac{D}{4}=81k^2-5(9k^2+36)=36(k^2-5)=36(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

よって，$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ のとき 0 個，$k=\pm\sqrt{5}$ のとき 1 個，$k<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<k$ のとき 2 個

(2)

$y^2+4x=(2x+k)^2+4x=4x^2+4(k+1)x+k^2=0$ より，$\dfrac{D}{4}=\{2(k+1)\}^2-4k^2=4(2k+1)$

よって，$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 0 個，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個，$-\dfrac{1}{2}<k$ のとき 2 個

(3)

$x^2-y^2-2=x^2-(kx+2)^2-2=(1-k^2)x^2-4kx-6=0$

$1-k^2=0$，すなわち $k=\pm1$ のとき

上式は 1 次方程式となるので，1 個

$1-k^2\neq0$ のとき

$\dfrac{D}{4}=4k^2+6(1-k^2)=-2(k^2-3)=-2(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})$ より，

$k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき 0 個，$k=\pm\sqrt{3}$ のとき 1 個，$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき 2 個

以上より，

$k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ のとき 0 個，$k=\pm1,\ \pm\sqrt{3}$ のとき 1 個，

$-\sqrt{3}<k<-1,\ -1<k<1,\ 1<k<\sqrt{3}$ のとき 2 個

92　略解

直線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の交点の座標を $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ とすると，

中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ であり， $y=f(x)$ を満たすから $\dfrac{y_1+y_2}{2}=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

交点を結んだ線分の長さ＝$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

(1)

$x^2-y^2-1=x^2-(-2x+3)^2-1=-3x^2+12x-10=0$，すなわち $3x^2-12x+10=0$

よって，解と係数の関係より， $x_1+x_2=4,\ x_1x_2=\dfrac{10}{3}$

ゆえに，

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ -2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+3\right)=(2,\ -1)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\{(-2x_1+3)-(-2x_2+3)\}^2}\\&=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{5\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}}\\&=\sqrt{\frac{40}{3}}\\&=\frac{2\sqrt{30}}{3}\end{aligned}$$

(2)

$x^2+9y^2-9=x^2+(1-x)^2-9=2x^2-2x-8=2(x^2-x-4)=0$，すなわち $x^2-x-4=0$

よって，解と係数の関係より， $x_1+x_2=1,\ x_1x_2=-4$

ゆえに，

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ -\frac{1}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left\{\left(-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}\right)\right\}^2}\\&=\sqrt{\frac{10}{9}(x_1-x_2)^2}\\&=\frac{\sqrt{10\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}}}{3}\\&=\frac{\sqrt{170}}{3}\end{aligned}$$

93　略解

(1)

接線の方程式を $y=m(x-3)$ とすると，接点の x 座標は

$x^2+4y^2-4=x^2+4\{m(x-3)\}^2-4=(4m^2+1)x^2-24m^2x+36m^2-4=0$ の重解だから，

判別式を D とすると， $D=0$ より， $\dfrac{D}{4}=144m^4-(4m^2+1)(36m^2-4)=4(1-5m^2)=0$

よって $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに，求める接線の方程式は $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x-3),\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$

(2)

接線の方程式を $y=x+m$ とすると，　接点の x 座標は

$2x^2-y^2+2=2x^2-(x+m)^2+2=x^2-2mx-m^2+2=0$ の重解だから，

判別式を D とすると， $D=0$ より， $\dfrac{D}{4}=m^2+m^2-2=2(m^2-1)=0$

よって， $m=\pm1$

ゆえに，求める接線の方程式は $y=x+1,\ y=x-1$

94　略解

(1)

$\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると，P,Q の中点 R は $y=x+k$ 上の点だから， $(X,\ Y)=(X,\ X+k)$

したがって，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$， $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$（$x_1\neq x_2$）とすると，

$(X,\ Y)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{x_1+x_2}{2}+k\right)$　・・・①

$x_1,\ x_2$ は $x^2+4(x+k)^2-4=0$ すなわち $5x^2+8kx+4k^2-4=0$ の異なる 2 実数解だから，

判別式を D とすると， $D>0$ より， $\dfrac{D}{4}=(4k)^2-5(4k^2-4)=-4(k^2-5)>0$

$\therefore -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$　・・・②

解と係数の関係より， $x_1+x_2=-\dfrac{8}{5}k$

①，②より， $(X,\ Y)=\left(-\dfrac{4}{5}k,\ \dfrac{1}{5}k\right)$， $-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<X<\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

これから k を消去することにより，R は $Y=-\dfrac{1}{4}X$， $-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<X<\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ を満たす点，

すなわち，直線 $y=-\dfrac{1}{4}x$ の $-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<x<\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は点 R の条件を満たす。

(2)

直線の方程式を $y=2x+k$ とおき，

$\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると，P,Q の中点 R は $y=2x+k$ 上の点だから，$(X,\ Y)=(X,\ 2X+k)$

したがって，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$（$x_1 \neq x_2$）とすると，

$(X,\ Y)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_1+x_2+k\right)$ ・・・①

$x_1,\ x_2$ は $x^2-(2x+k)^2-1=0$ すなわち $3x^2+4kx+k^2+1=0$ の異なる 2 実数解だから，

判別式を D とすると，$D>0$ より，$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(k^2+1)=k^2-3>0$

$\therefore k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ ・・・②

解と係数の関係より，$x_1+x_2=-\dfrac{4}{3}k$

①，②より，$(X,\ Y)=\left(-\dfrac{2}{3}k,\ -\dfrac{1}{3}k\right)$，$X<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}<X$

これから k を消去することにより，R は $Y=\dfrac{1}{2}X$，$X<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}<X$ を満たす点，

すなわち，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の $x<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は点 R の条件を満たす。

95

楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,\ b>0$）とすると，

$(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ を通るから，$\dfrac{4}{a^2}=1$ $\therefore a^2=4$

ゆえに，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，$b^2x^2+4y^2-4b^2=0$

よって，直線 $y=2x+5$ との共有点の x 座標は

$b^2x^2+4(2x+5)^2-4b^2=0$ すなわち $(b^2+16)x^2+80x+100-4b^2=0$ の重解である。

したがって，判別式を D とすると，$D=0$ より，

$\dfrac{D}{4}=(40)^2-(b^2+16)(100-4b^2)=4b^2(b^2-9)=0$

これと $b>0$ より，$b=3$

ゆえに，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

96

$x^2+y^2=1$ の接線で y 軸平行な接線は $x=1,\ x=-1$ である。

$x=1$ のとき $y^2=3\sqrt{5}$ より $y=\pm\sqrt{3\sqrt{5}}$ となり，$x=1$ は $y^2=3\sqrt{5}x$ と 2 点で交わる。

$x=-1$ は $y^2=3\sqrt{5}x$ の解ではない。
よって，y 軸平行な共通接線は存在しない。
また，$y^2=3\sqrt{5}x$ は $y=0$ を軸とする放物線だから，x 軸に平行な共通接線も存在しない。
そこで，求める共通接線の方程式を $y=mx+n$ （$m\neq 0$）とすると，
$y^2=3\sqrt{5}x$ と共通接線の接点の x 座標は
$(mx+n)^2-3\sqrt{5}x=0$ すなわち $m^2x^2+\left(2mn-3\sqrt{5}\right)x+n^2=0$ の重解だから，
判別式を D_1 とすると，$D_1=0$ より，

$$D_1=\left(2mn-3\sqrt{5}\right)^2-4m^2n^2=-12mn\sqrt{5}+45=0 \quad \therefore n=\frac{3\sqrt{5}}{4m} \quad ・・・①$$

$x^2+y^2=1$ と共通接線の接点の x 座標は
$x^2+(mx+n)^2-1=0$ すなわち $\left(m^2+1\right)x^2+2mnx+n^2-1=0$ の重解だから，
判別式を D_2 とすると，$D_2=0$ より，

$$\frac{D_2}{4}=(mn)^2-\left(m^2+1\right)\left(n^2-1\right)=m^2-n^2+1=0 \quad ・・・②$$

①を②に代入して整理すると，$\dfrac{1}{16m^2}\left(4m^2-5\right)\left(4m^2+9\right)=0$

よって，$m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

このとき①より，$n=\pm\dfrac{3}{2}$

ゆえに，求める共通接線の方程式は $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{3}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{3}{2}$

97

点 $(3,\ 4)$ を通る直線のうち

$x=3$ は，$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と 2 点で交わるから，接線ではない。

$y=4$ は，$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と共有点を持たないから，接線ではない。

そこで，求める接線の方程式を $y=m(x-3)+4$ すなわち $y=mx-(3m-4)$ とすると，

接点の x 座標は $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{\{mx-(3m-4)\}^2}{9}=1$ の

すなわち $(16m^2+9)x^2-32m(3m-4)x+16\{(3m-4)^2-9\}=0$ の重解だから，

判別式を D_1 とすると，$D_1=0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{4}&=\{16m(3m-4)\}^2-16\{(3m-4)^2-9\}(16m^2+9)\\&=-16\{(3m-4)^2\cdot 9-9\cdot 16m^2-9\cdot 9\}\\&=144\{-(3m-4)^2+16m^2+9\}\\&=144(7m^2+24m-7)\\&=0\end{aligned}$$

よって，点 $(3,\ 4)$ を通る接線の傾き m は $7m^2+24m-7=0$ の解である。

$7m^2+24m-7=0$ の判別式を D_2 とすると，$\dfrac{D_2}{4}=14^2-7^2>0$ より，

$7m^2+24m-7=0$ は異なる 2 実数解をもつ。

すなわち点 $(3,\ 4)$ を通る傾きが異なる 2 本の接線が存在する。

この 2 つの接線の傾きを $m_1,\ m_2$ とすると，

$7m^2+24m-7=0$ の解と係数の関係より，$m_1m_2=-1$

よって，2 本の接線は直交する。

98

【1】 $y_1=0$ のとき

$\dfrac{x^2}{a^2}=1$ より，接点 P の座標は $(a,\ 0),\ (-a,\ 0)$ だから，接線の方程式は $x=a,\ x=-a$

【2】 $y_1\neq 0$ のとき

接線の方程式を $y=m(x-x_1)+y_1$ すなわち $y=mx-(mx_1-y_1)$ とすると，

x_1 は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{\{mx-(mx_1-y_1)\}^2}{b^2}=1$ の

すなわち $(a^2m^2-b^2)x^2-2a^2m(mx_1-y_1)x+a^2\{(mx_1-y_1)^2+b^2\}=0$ の重解だから，

$a^2m^2-b^2\neq 0$ より， $m\neq\pm\dfrac{b}{a}$

このとき解と係数の関係より $2x_1=\dfrac{2a^2m(mx_1-y_1)}{a^2m^2-b^2}$

両辺を $a^2m^2-b^2$ 倍し整理すると， $a^2y_1m=b^2x_1$ 　$\therefore m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

これを $y=m(x-x_1)+y_1$ に代入すると， $y=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)-y_1$ より，

$b^2x_1(x-x_1)-a^2y_1(y-y_1)=0$

両辺を a^2b^2 で割ると， $\dfrac{x_1(x-x_1)}{a^2}-\dfrac{y_1(y-y_1)}{b^2}=0$

両辺を整理すると， $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=\dfrac{x_1{}^2}{a^2}-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}$ 　・・・①

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点だから， $\dfrac{x_1{}^2}{a^2}-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$ 　・・・②

①，②より， $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ に $(a,\ 0),\ (-a,\ 0)$ を代入すると，それぞれ $x=a,\ x=-a$ となることから，

【1】,【2】をまとめることにより，求める接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

99

(1)

$\dfrac{\frac{3}{2}}{9}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y=1$ を整理することにより，$2x+3\sqrt{3}y-12=0$

(2)

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\left(-\dfrac{1}{2}\right)y=1$ を整理することにより，$\sqrt{3}x-2y-4=0$

(3)

$\dfrac{-2\sqrt{5}}{16}x-\dfrac{1}{4}y=1$ を整理することにより，$\sqrt{5}x+2y+8=0$

(4)

$-2y=2\cdot 1(x+1)$ より，$x+y+1=0$

放物線の接線の方程式の求め方

接線の方程式の求め方には，

$y=mx+n$ とおいて始める方法と接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおいて始める方法がある。

1．$y=mx+n$ とおいて求めた接線の方程式

$\boldsymbol{y^2=4px}$ **の接線：** $\boldsymbol{y=mx+\dfrac{p}{m}}$　　$\boldsymbol{x^2=4py}$ **の接線：** $\boldsymbol{y=mx-pm^2}$

求め方

放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式を $y=mx+n$ とすると，

接点の x 座標は $(mx+n)^2=4px$，すなわち $m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$ の重解である。

よって，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=0$ より，$4p(p-mn)=0$

これと $p\neq 0$ より，$n=\dfrac{p}{m}$

ゆえに，接線の方程式は $y=mx+\dfrac{p}{m}$

同様に，放物線 $x^2=4py$ の接線を $y=mx+n$ とすると，

共有点の x 座標は $x^2=4p(mx+n)$，すなわち $x^2-4pmx-4pn=0$ の重解である。

よって，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=4p^2m^2+4pn=0$ より，$4p(pm^2+n)=0$

これと $p\neq 0$ より，$n=-pm^2$

ゆえに，接線の方程式は $y=mx-pm^2$

2. 接点を(x_1, y_1)とおいて求めた接線の方程式

$y^2=4px$ の接線：$y_1y=2p(x+x_1)$　$x^2=4py$ の接線：$x_1x=2p(y+y_1)$

求め方

方法 **1**：重解と解と係数の関係を用いる

$y^2=4px$ 上の原点でない点(x_1, y_1)の接線の傾きを m とすると，

接線の方程式は $y=m(x-x_1)+y_1$ だから，接点の x 座標 x_1 を求める方程式は，

$\{m(x-x_1)+y_1\}^2=4px$，すなわち $m^2x^2-2(m^2x_1-my_1+2p)x+(mx_1-y_1)^2=0$

$x=x_1$ はこの方程式の重解だから，解と係数の関係より，$x_1+x_1=\dfrac{2(m^2x_1-my_1+2p)}{m^2}$

すなわち $x_1=\dfrac{m^2x_1-my_1+2p}{m^2}$　$\therefore m=\dfrac{2p}{y_1}$

これを $y=m(x-x_1)+y_1$ に代入し，整理すると $y_1y=2p(x-x_1)+{y_1}^2$

これと ${y_1}^2=4px_1$ より，$y_1y=2p(x+x_1)$

方法 **2**：極限を使う

$y^2=4px$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$を通る直線の傾きを m とすると，

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\dfrac{{y_2}^2}{4p}-\dfrac{{y_1}^2}{4p}}=\frac{4p}{y_2+y_1}\quad\left(\because {y_1}^2=4px_1, {y_2}^2=4px_2\right)$$

$$\left(\text{または，}\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{y_2+y_1}=\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2+y_1}=\frac{4px_2-4px_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2+y_1}=\frac{4p}{y_2+y_1}\right)$$

$\mathrm{Q}(x_2, y_2)\to\mathrm{P}(x_1, y_1)$のときの m の極限は $\mathrm{P}(x_1, y_1)$における接線の傾きだから，

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$における接線の傾き$=\displaystyle\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{P}} m=\lim_{y_2\to y_1}\frac{4p}{y_2+y_1}=\frac{2p}{y_1}$

よって，$\mathrm{P}(x_1, y_1)$における接線の式は，$y=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1$

これと ${y_1}^2=4px_1$ より，$y_1y=2p(x+x_1)$

方法 **3**：微分を使う

$y^2=4px$ より，$2y\dfrac{dy}{dx}=4p$　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$

ゆえに，$y^2=4px$ 上の点(x_1, y_1)における接線の式は $y=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1$

これと ${y_1}^2=4px_1$ より，$y_1y=2p(x+x_1)$

楕円の接線の方程式の求め方

$y=mx+n$ とおいて始める方法と接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおいて始める方法がある。

1．$\boldsymbol{y=mx+n}$ とおいて求めた接線の方程式

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の接線： $\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

求め方

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線の式を $y=mx+n$ とすると，

接点の x 座標は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$ の重解である。

この両辺を a^2b^2 倍し， x について整理すると $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2n^2-a^2b^2=0$

よって，判別式を D とすると， $D=0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^4m^2n^2-(a^2m^2+b^2)(a^2n^2-a^2b^2)\\&=a^2\{a^2m^2n^2-(a^2m^2+b^2)(n^2-b^2)\}\\&=a^2b^2(a^2m^2-n^2+b^2)\\&=0\end{aligned}$$

$a\neq0,\ b\neq0$ より， $a^2m^2-n^2+b^2=0$ $\quad\therefore n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

ゆえに， $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

補足： $\boldsymbol{\dfrac{1}{a^2}=A}$， $\boldsymbol{\dfrac{1}{b^2}=B}$ と置き換えると処理が楽である。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を $Ax^2+By^2=1$ $\left(A=\dfrac{1}{a^2},B=\dfrac{1}{b^2}\right)$，接線の式を $y=mx+n$ とおくと，

接点の x 座標は $Ax^2+B(mx+n)^2=1$，すなわち $(A+Bm^2)x^2+2Bmnx+Bn^2-1=0$

よって，判別式を D とすると， $D=0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=B^2m^2n^2-(A+Bm^2)(Bn^2-1)\\&=-(ABn^2-A-Bm^2)\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

ゆえに， $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

2．接点を $\left(x_1, y_1\right)$ とおいて求めた接線の方程式

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

求め方

方法 **1**：重解と解と係数の関係を使う

$Ax^2+By^2=1 \quad \left(A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}\right)$ 上の点 $\left(x_1, y_1\right)$ を接点とする接線の傾きを m とすると，

その方程式 $y=m\left(x-x_1\right)+y_1$

よって，x_1 は $Ax^2+B\left\{m\left(x-x_1\right)+y_1\right\}^2=1$，

すなわち $\left(A+Bm^2\right)x^2-2\left(Bm^2x_1-Bmy_1\right)x+B\left(m^2x_1{}^2-2mx_1y_1+y_1{}^2\right)-1=0$ の重解である。

よって，解と係数の関係より，$x_1+x_1=\dfrac{2\left(Bm^2x_1-Bmy_1\right)}{A+Bm^2} \qquad \therefore m=-\dfrac{Ax_1}{By_1}$

これを $y=m\left(x-x_1\right)+y_1$ に代入すると，$y=-\dfrac{Ax_1}{By_1}\left(x-x_1\right)+y_1$

両辺を By_1 倍し，整理すると $Ax_1x+By_1y=Ax_1{}^2+By_1{}^2$

これと $Ax_1{}^2+By_1{}^2=1$ より，$Ax_1x+By_1y=1$

$A=\dfrac{1}{a^2}$，$B=\dfrac{1}{b^2}$ より，接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

方法 **2**：極限を使う

$Ax^2+By^2=1 \quad \left(A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}\right)$ 上の 2 点

$\mathrm{P}\left(x_1, y_1\right)$，$\mathrm{Q}\left(x_2, y_2\right)$ を通る直線の傾きを m とすると，

$$
\begin{aligned}
m&=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
&=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{y_2+y_1}\cdot\frac{x_2+x_1}{x_2+x_1}\\
&=\frac{y_2{}^2-y_1{}^2}{x_2{}^2-x_1{}^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \qquad \cdots ①
\end{aligned}
$$

また，$Ax_1{}^2+By_1{}^2=1$ と $Ax_2{}^2+By_2{}^2=1$ の両辺の差をとると，

$A\left(x_2{}^2-x_1{}^2\right)+B\left(y_2{}^2-y_1{}^2\right)=0 \qquad \therefore \dfrac{y_2{}^2-y_1{}^2}{x_2{}^2-x_1{}^2}=-\dfrac{A}{B} \qquad \cdots ②$

①，②より，$m=-\dfrac{A\left(x_2+x_1\right)}{B\left(y_2+y_1\right)}$

$\mathrm{Q}\left(x_2, y_2\right)\to\mathrm{P}\left(x_1, y_1\right)$ のときの m の極限は $\mathrm{P}\left(x_1, y_1\right)$ における接線の傾きだから，

$\mathrm{P}\left(x_1, y_1\right)$ における接線の傾き $=\displaystyle\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{P}} m=-\frac{Ax_1}{By_1}$

よって，$\mathrm{P}(x_1, y_1)$における接線の方程式は$y=-\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)+y_1$

両辺をBy_1倍し，整理すると，$Ax_1x+By_1y=Ax_1{}^2+By_1{}^2$

これと$Ax_1{}^2+By_1{}^2=1$より，$Ax_1x+By_1y=1$

$A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}$より，接線の方程式は$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

方法 3：微分を使う

$Ax^2+By^2=1 \quad \left(A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}\right)$より，$2Ax+2By\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{Ax}{By}$

ゆえに，$Ax^2+By^2=1$上の点(x_1, y_1)における接線の方程式は$y=-\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)+y_1$

両辺をBy_1倍し，整理すると$Ax_1x+By_1y=Ax_1{}^2+By_1{}^2$

これと$Ax_1{}^2+By_1{}^2=1$より，$Ax_1x+By_1y=1$

$A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}$より，接線の方程式は$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線の接線の方程式の求め方

$y=mx+n$ とおいて始める方法と接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおいて始める方法がある。

尚，$y=\pm\frac{b}{a}$ は漸近線だから，これを除外する。

1．$y=mx+n$ とおいて求めた接線の方程式

双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ の接線：$\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$

双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$ の接線：$\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{-a^2m^2+b^2}}$

求め方

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ を $Ax^2-By^2=1$ $\left(A=\frac{1}{a^2}, B=\frac{1}{b^2}\right)$，接線の方程式を $y=mx+n$ とおくと，

接点の x 座標は $Ax^2-B(mx+n)^2=1$，すなわち $(A-Bm^2)x^2-2Bmnx-Bn^2-1=0$ の重解

よって，判別式を D とすると，$D=0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=B^2m^2n^2+(A-Bm^2)(Bn^2+1)\\&=ABn^2+A-Bm^2\\&=0\end{aligned}$$

$$\therefore n^2=\frac{m^2}{A}-\frac{1}{B}$$

これと $A=\frac{1}{a^2}$，$B=\frac{1}{b^2}$ より，$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

ゆえに，$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

2．接点を (x_1, y_1) と置いて求めた接線の方程式

双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1}$ の接線：$\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1}$

求め方

方法 1：重解と解と係数の関係を使う

$Ax^2-By^2=1$ $\left(A=\frac{1}{a^2}, B=\frac{1}{b^2}\right)$ 上の点 (x_1, y_1) を接点とする接線の傾きを m とすると，

その方程式は $y=m(x-x_1)+y_1$

よって，x_1 は $Ax^2-B\{m(x-x_1)+y_1\}^2=1$，

すなわち $(A-Bm^2)x^2+2(Bm^2x_1-Bmy_1)x-B(m^2x_1{}^2-2mx_1y_1+y_1{}^2)-1=0$ の重解である。

よって，解と係数の関係より，$x_1+x_1=-\frac{2(Bm^2x_1-Bmy_1)}{A-Bm^2}$　$\therefore m=\frac{Ax_1}{By_1}$

これを $y=m(x-x_1)+y_1$ に代入すると， $y=\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)+y_1$

両辺を By_1 倍し，整理すると $Ax_1x-By_1y=Ax_1^{\ 2}-By_1^{\ 2}$

これと $Ax_1^{\ 2}-By_1^{\ 2}=1$， $A=\dfrac{1}{a^2}$, $B=\dfrac{1}{b^2}$ より，

接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

方法 2：極限を使う

$Ax^2-By^2=1$ $\left(A=\dfrac{1}{a^2}, B=\dfrac{1}{b^2}\right)$ 上の 2 点

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ を通る直線の傾きを m とすると，

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{y_2+y_1}\cdot\frac{x_2+x_1}{x_2+x_1}$$
$$=\frac{y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$
$$=\frac{y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \quad \cdots ①$$

また， $Ax_1^{\ 2}-By_1^{\ 2}=1$ と $Ax_2^{\ 2}-By_2^{\ 2}=1$ の両辺の差をとると，

$$A(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2})-B(y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2})=0 \qquad \therefore \frac{y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}=\frac{A}{B} \quad \cdots ②$$

①，②より， $m=\dfrac{A(x_2+x_1)}{B(y_2+y_1)}$

$\mathrm{Q}(x_2, y_2)\to\mathrm{P}(x_1, y_1)$ のときの m の極限は $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ における接線の傾きだから，

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$ における接線の傾き $=\displaystyle\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{P}}m=\frac{Ax_1}{By_1}$

よって，$\mathrm{P}(x_1, y_1)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)+y_1$

両辺を By_1 倍し，整理すると $Ax_1x-By_1y=Ax_1^{\ 2}-By_1^{\ 2}$

これと $Ax_1^{\ 2}-By_1^{\ 2}=1$， $A=\dfrac{1}{a^2}$, $B=\dfrac{1}{b^2}$ より，

接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

方法 3：微分を使う

$Ax^2-By^2=1\quad\left(A=\dfrac{1}{a^2},B=\dfrac{1}{b^2}\right)$より，$2Ax-2By\dfrac{dy}{dx}=0\quad\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{Ax}{By}$

ゆえに，$Ax^2-By^2=1$上の点(x_1,y_1)における接線の方程式は$y=\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)+y_1$

両辺をBy_1倍し，整理すると$Ax_1x-By_1y=Ax_1{}^2-By_1{}^2$

これと$Ax_1{}^2-By_1{}^2=1$，$A=\dfrac{1}{a^2}$, $B=\dfrac{1}{b^2}$より，

接線の方程式は$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

100

(1)

解法 1

$4x^2+y^2=4$ の両辺を x で微分すると $8x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$ における接線の方程式は，それぞれ $x=1,\ x=-1$ だから，

点 $\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$ を通らない。

よって，$y_1\neq 0$ であり，これより，$(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x_1}{y_1}$

したがって，

$(x_1,\ y_1)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=-\dfrac{4x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1$ より，$4x_1x+y_1y=4{x_1}^2+{y_1}^2$ ・・・①

点 $\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=-\dfrac{4x_1}{y_1}\left(x-\sqrt{5}\right)+2\sqrt{5}$ より，$4x_1x+y_1y=4\sqrt{5}x_1+2\sqrt{5}y_1$ ・・・②

$(x_1,\ y_1)$ は $4x^2+y^2=4$ 上の点だから $4{x_1}^2+{y_1}^2=4$ ・・・③

①，②，③より，$4\sqrt{5}x_1+2\sqrt{5}y_1=4{x_1}^2+{y_1}^2=4$

これを解いて接点の座標を求めると，$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

よって，①，③より，$4x_1x+y_1y=4$ だから，

求めた $x_1,\ y_1$ をこれを代入し，整理することにより

求める接点の座標と接線の方程式は

$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$4x-y-2\sqrt{5}=0$

$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，$x-y+\sqrt{5}=0$

解法 2

x 軸と垂直な接線は，接点が $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ より，$x=1,\ -1$ であり，

これは点 $\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$ を通らない。

よって，接線は x 軸と垂直でない。

そこで，接線の傾きを m とし，

計算の煩雑さを避ける目的で $\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)=(p,\ q)$　・・・①とおくと，

接線の方程式は $y=m(x-p)+q$ すなわち $y=mx-(mp-q)$　・・・②

よって，接点の x 座標は $4x^2+\{mx-(mp-q)\}^2=4$

すなわち $(m^2+4)x^2-2m(mp-q)x+(mp-q)^2-4=0$　・・・③　の重解である。

よって，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=m^2(mp-q)^2-(m^2+4)\{(mp-q)^2-4\}$$
$$=4m^2-4(mp-q)^2+16$$
$$=-4\{(p^2-1)m^2-2pqm+q^2-4\}$$

これと $D=0$ より，$(p^2-1)m^2-2pqm+q^2-4=0$

これに①を代入し，整理すると，$4(m-1)(m-4)=0$　$\therefore m=1,\ 4$

$m=1$ のとき

接点の x 座標は③の重解より，$x=\dfrac{m(mp-q)}{m^2+4}$

これと①より，$x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

①，②より，接線の方程式は $y=x+\sqrt{5}$ だから，

接点の y 座標は $y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$m=4$ のとき

同様にして，接点の x 座標 $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，接線の方程式 $y=4x-2\sqrt{5}$ より，

接点の y 座標は $y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

以上より，求める接線の方程式と接点の座標は

$y=x+\sqrt{5}$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

$y=4x-2\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)

解法 1

$4x^2+y^2=4$ の両辺を x で微分すると $\dfrac{x}{2}-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，

$y_1=0$ のとき

$(x_1,\ y_1)=(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ より，接線の方程式は，それぞれ $x=2,\ x=-2$

このうち $x=2$ は点 $(2,\ 3)$ を通るから，

条件を満たす接線の方程式と接点の座標は $x=2,\ (2,\ 0)$

$y_1\neq 0$ のとき

$(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x_1}{4y_1}$

したがって，

$(x_1,\ y_1)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=\dfrac{x_1}{4y_1}(x-x_1)+y_1$ より，$x_1x-4y_1y={x_1}^2-4{y_1}^2$　・・・①

点 $(2,\ 3)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=\dfrac{x_1}{4y_1}(x-2)+3$ より，$x_1x-4y_1y=2x_1-12y_1$　・・・②

$(x_1,\ y_1)$ は $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上の点だから ${x_1}^2-4{y_1}^2=4$　・・・③

①，②，③より，$2x_1-12y_1={x_1}^2-4{y_1}^2=4$

これを解いて接点の座標を求めると，$(x_1,\ y_1)=\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

よって，このとき，①，③より，接線の方程式は $-\dfrac{5}{2}x+3y=4$ すなわち $5x-6y+8=0$

以上をまとめると，

求める接線の方程式と接点の座標は

$x=2$，$(2,\ 0)$

$5x-6y+8=0$，$\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

解法 2

x 軸と垂直な接線

接点が $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ より, $x=2,\ -2$ であり,

このうち $x=2$ は点 $(2,\ 3)$ を通るから,

条件を満たす接線の方程式と接点の座標は $x=2,\ (2,\ 0)$

x 軸と垂直でない接線

接線の傾きを m とすると, 点 $(2,\ 3)$ を通ることから,

接線の方程式は $y=m(x-2)+3$ すなわち $y=mx-(2m-3)$ ・・・①

よって, 接点の x 座標は $\dfrac{x^2}{4}-\{mx-(2m-3)\}^2=1$

すなわち $(4m^2-1)x^2-8m(2m-3)x+4\{(2m-3)^2+1\}=0$ の重解である。

よって, 接点の x 座標は, 解と係数の関係より, $x=\dfrac{4m(2m-3)}{4m^2-1}$ ・・・②

また, 判別式を D とすると,

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4}&=16m^2(2m-3)^2-4(4m^2-1)\{(2m-3)^2+1\}\\
&=-16m^2+4(2m-3)^2+4\\
&=-12m+10
\end{aligned}
$$

$D=0$ より, $-12m+10=0$ $\therefore m=\dfrac{5}{6}$ ・・・③

したがって, ②, ③より, 接点の x 座標は $-\dfrac{5}{2}$

これと①, ③より, 接線の方程式は $y=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{4}{3}$ だから,

接点の y 座標は $y=\dfrac{5}{6}\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{4}$

よって, 接線の方程式と接点の座標は $y=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{4}{3}$, $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

以上をまとめると,

求める接線の方程式と接点の座標は

$x=2$, $(2,\ 0)$

$5x-6y+8=0$, $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

(3)

解法 1

$y^2=8x$ の両辺を x で微分し，整理すると $y\dfrac{dy}{dx}=4$

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，

$y_1=0$ のとき

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 0)$ より，接線の方程式は， $x=0$

これは点 $(3,\ 5)$ を通らないから，条件を満たさない。

$y_1\neq 0$ のとき

$(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y_1}$

したがって，

$(x_1,\ y_1)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=\dfrac{4}{y_1}(x-x_1)+y_1$ より， $4x-y_1y=4x_1-{y_1}^2$

$(x_1,\ y_1)$ は $y^2=8x$ 上の点だから， ${y_1}^2=8x_1$ より， $4x_1-{y_1}^2=-\dfrac{{y_1}^2}{2}$

よって， $4x-y_1y=-\dfrac{1}{2}{y_1}^2$ ・・・①

点 $(3,\ 5)$ を通ることを使って接線の方程式を表すと

$y=\dfrac{4}{y_1}(x-3)+5$ より， $4x-y_1y=12-5y_1$ ・・・②

①，②より， $12-5y_1=-\dfrac{{y_1}^2}{2}$ すなわち $(y_1-4)(y_1-6)=0$ $\therefore y_1=4,\ 6$

これと ${y_1}^2=8x_1$ および①より，

求める接線の方程式と接点の座標は

$x-y+2=0$， $(2,4)$

$2x-3y+9=0$， $\left(\dfrac{9}{2},\ 6\right)$

解法 2

x 軸と垂直な接線

原点が接点となるから，接線の方程式は，$x=0$

これは点 $(3,\ 5)$ を通らないから，条件を満たさない。

x 軸と垂直でない接線

接線の傾きを m とすると，点 $(3,\ 5)$ を通ることから，

接線の方程式は $y=m(x-3)+5$ すなわち $y=mx-(3m-5)$ ・・・①

よって，接点の x 座標は $\{mx-(3m-5)\}^2=8x$

すなわち $m^2x^2-2\{m(3m-5)+4\}x+(3m-5)^2=0$ の重解である。

よって，接点の x 座標は，解と係数の関係より，$x=\dfrac{m(3m-5)+4}{m^2}$ ・・・②

また，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{m(3m-5)+4\}^2-m^2(3m-5)^2\\&=8m(3m-5)+16\\&=8(3m-2)(m-1)\end{aligned}$$

$D=0$ より，$(3m-2)(m-1)=0$ $\therefore m=\dfrac{2}{3},\ 1$ ・・・③

①～③より，

求める接線の方程式と接点の座標は

$y=\dfrac{2}{3}x+3$，$\left(\dfrac{9}{2},\ 6\right)$

$y=x+2$，$(2,4)$

101

解法 1

$P(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$（$0 \leq \theta < 2\pi$）とすると，直線 AB と点 P の距離最大となることは△APB の面積が最大となるための必要十分条件である。

直線 AB の方程式は $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ すなわち $2x-3y+6=0$ だから，

直線 AB と点 P の距離を h とすると，

$$h=\frac{|2\cdot 3\cos\theta-3\cdot 2\sin\theta+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{6|\cos\theta-\sin\theta+1|}{\sqrt{13}}$$
$$=\frac{6\left|\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+1\right|}{\sqrt{13}}$$

よって，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ のとき h は最大となる。

このとき，$0 \leq \theta < 2\pi$ より，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=2\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{7}{4}\pi$　よって，$P\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right)$

解法 2

直線 AB と平行な直線を l，l と楕円の交点を P とすると，点 P と直線 AB の距離，
すなわち底辺を AB とする△APB の高さは l と直線 AB の距離は等しい。
したがって，l と直線 AB の距離が最大となるような点 P ならば△APB の面積も最大である。
このとき点 P は l と楕円の接点のうち直線 AB から遠い方の点である。
そこで，この P を $(s,\ t)$ とすると，

点 P は接点だから，l の方程式は $\dfrac{s}{9}x+\dfrac{t}{4}y=1$ すなわち $4sx+9ty-36=0$

一方，直線 AB の方程式は $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ より，$2x-3y+6=0$

l と直線 AB は平行だから，$\dfrac{9t}{4s}=-\dfrac{3}{2}$　$\therefore s=-\dfrac{3}{2}t$　・・・①

点 P は楕円上の点だから，$\dfrac{s^2}{9}+\dfrac{t^2}{4}=1$　・・・②

点 P は l と楕円の接点のうち直線 AB から遠い方の点だから，$s>0,\ t<0$　・・・③

①～③より，$P\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right)$

102

接点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，

【1】 $t=0$ のとき

P は原点だから，接線は $x=0$ すなわち y 軸

よって，点 Q は原点である。

ゆえに，点 Q は y 軸上にある。

【2】 $t\neq 0$ のとき

接線の方程式は $ty=2p(x+s)$ すなわち $y=\dfrac{2p}{t}x+\dfrac{2ps}{t}$

これと $t^2=4ps$ より， $y=\dfrac{2p}{t}x+\dfrac{t}{2}$ ・・・①

一方，直線 FQ の方程式は $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を通り接線と直交する直線の方程式だから，

$y=-\dfrac{t}{2p}(x-p)$ すなわち $y=-\dfrac{t}{2p}x+\dfrac{t}{2}$ ・・・②

①，②よりこれら 2 直線の交点、すなわち点 Q の座標は $\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$

よって，点 Q は y 軸上にある。

【1】,【2】より，点 Q は y 軸上にある。

103

原点が不等式を満たすか否かで曲線を境界として原点を含む領域か否かを決めればよい。

104

(1)

共有点の座標は連立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=k \\ 4x^2+9y^2=36 \end{cases}$ の解である。

共有点の座標は実数だから，共有点が存在するための必要十分条件は，

この連立方程式が実数解をもつことである。

連立方程式の x の解を求めるための 2 次方程式は，

$3y=k-2x$ を $4x^2+9y^2=36$ に代入し整理することにより，$8x^2-4kx+k^2-36=0$

したがって，この方程式の判別式を D とすると，

解 x が実数であるための必要十分条件は $D\geq 0$ である。

これと $\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-8(k^2-36)=-4(k^2-72)$ より，$k^2-72\leq 0$　$\therefore -6\sqrt{2}\leq k\leq 6\sqrt{2}$

このとき，$2x+3y=k$ より，y の解も実数となる。

ゆえに，$-6\sqrt{2}\leq k\leq 6\sqrt{2}$

(2)

解法 1

$4x^2+9y^2\leq 36$ より，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$

よって，$4x^2+9y^2\leq 36$ が表す領域は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の周およびその内部である。

したがって，$2x+3y=k$ とおくと，次ページ図より，

k の値の範囲は $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ と $2x+3y=k$ が共有点をもつときの範囲，

すなわち(1)で求めた k の値の範囲と一致する。

ゆえに，$2x+3y$ の最大値は $6\sqrt{2}$，最小値は $-6\sqrt{2}$

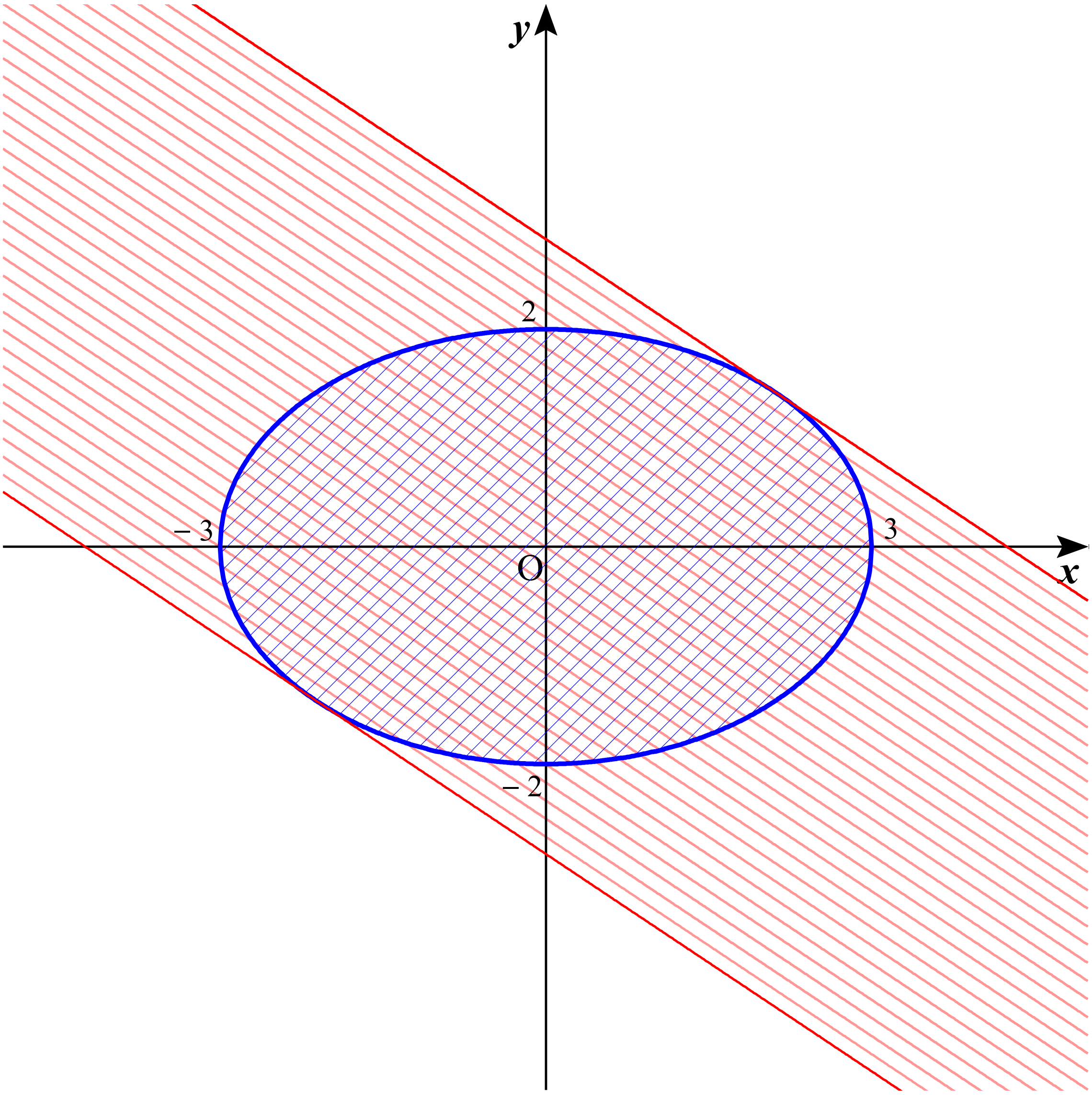
また，このときの x, y の値については，

$8x^2-4kx+k^2-36=0$ は $2x+3y=\pm 6\sqrt{2}$ すなわち $k=\pm 6\sqrt{2}$ のとき重解をもつことと

重解は，解と係数の関係より，$\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{-4k}{8}\right)=\dfrac{k}{4}$ であることから，

$2x+3y=6\sqrt{2}$ すなわち $k=6\sqrt{2}$ のとき $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$

$2x+3y=-6\sqrt{2}$ すなわち $k=-6\sqrt{2}$ のとき $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$


y
2
−3
3
O
x
−2

解法 2

$2x+3y=k$ とおくと，$3y=k-2x$ より，$9y^2=(k-2x)^2$

これと $4x^2+9y^2\leq 36$ より，$4x^2+(k-2x)^2\leq 36$

よって，$0\leq 8\left(x-\dfrac{k}{4}\right)^2\leq 36-\dfrac{k^2}{2}$

ゆえに，$36-\dfrac{k^2}{2}\geq 0$ より，$-6\sqrt{2}\leq k\leq 6\sqrt{2}$

$k=6\sqrt{2}$ のとき

$x=\dfrac{k}{4}$ より，$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

また，$2x+3y=k$ より，$y=\sqrt{2}$

$k=-6\sqrt{2}$ のとき

$x=\dfrac{k}{4}$ より，$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

また，$2x+3y=k$ より，$y=-\sqrt{2}$

よって，

$2x+3y$ は

$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $6\sqrt{2}$

$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-6\sqrt{2}$

をとる。

105

(1)

$y=2x^2-5$ より，$2x^2=y+5$　・・・①

これを $4x^2+y^2=25$ に代入し，整理すると $(y-3)(y+5)=0$　$\therefore y=3,\ -5$

これと①より，$y=3$ のとき $x=\pm 2$，$y=-5$ のとき $x=0$

ゆえに，共有点の座標は $(2,\ 3),\ (-2,\ 3),\ (0,\ -5)$

(2)

$x=y^2-1$ より，$y^2=x+1$　・・・①

これを $x^2-y^2=1$ に代入し，整理すると $(x+1)(x-2)=0$　$\therefore x=-1,\ 2$

これと①より，$x=-1$ のとき $y=0$，$x=2$ のとき $y=\pm\sqrt{3}$

ゆえに，共有点の座標は $(-1,\ 0),\ \left(2,\ \sqrt{3}\right),\ \left(2,\ -\sqrt{3}\right)$

(3)

$x^2-y^2=9$ より，$y^2=x^2-9$　・・・①

これを $(x-1)^2-y^2=-1$ に代入し，x を求めると，$x=\dfrac{11}{2}$

これと①より，$y=\pm\dfrac{\sqrt{85}}{2}$

ゆえに，共有点の座標は $\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{\sqrt{85}}{2}\right),\ \left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{\sqrt{85}}{2}\right)$