式と曲線 6　2 次曲線の性質

106

点 P の座標を (x,y)，点 P から直線 $x=-1$ に下ろした垂線の足を H とする。

(1)

PF：PH＝2：1 より，$\mathrm{PF}^2=4\mathrm{PH}^2$ が成り立つ。

これと $\mathrm{PF}^2=(x-2)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$ より，

点 P は $(x-2)^2+y^2=4(x+1)^2$ すなわち $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ を満たす。

逆に $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上の任意の点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は双曲線 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ である。

(2)

PF：PH＝1：1 より，$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$ が成り立つ。

これと $\mathrm{PF}^2=(x-2)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$ より，

点 P は $(x-2)^2+y^2=(x+1)^2$ すなわち $y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ を満たす。

逆に，$y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 上の任意の点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は放物線 $y^2=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(3)

PF：PH＝$\dfrac{1}{2}$：1 より，$4\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$

これと $\mathrm{PF}^2=(x-2)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$ より，

点 P は $4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+1)^2$ すなわち $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を満たす。

逆に，$\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の任意の点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は楕円 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ である。

107

点 P の座標を(x,y)，点 P から直線$y=3$に下ろした垂線の足を H とすると，

PF：PH＝1：$\sqrt{3}$ より，$3\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$が成り立つ。

これと$\mathrm{PF}^2=x^2+(y-1)^2$，$\mathrm{PH}^2=(y-3)^2$より，

点 P は$3\{x^2+(y-1)^2\}=(y-3)^2$すなわち$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$を満たす。

逆に，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$上の任意の点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は楕円$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$である。

108

点 P の座標を(x,y)，点 P から定直線$x=\dfrac{b^2}{a}$に下ろした垂線の足を H とすると，

PF：PH＝a ：b より，$b^2\mathrm{PF}^2=a^2\mathrm{PH}^2$が成り立つ。

これと$\mathrm{PF}^2=(x-a)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=\left(x-\dfrac{b^2}{a}\right)^2$より，

点 P は$b^2\{(x-a)^2+y^2\}=a^2\left(x-\dfrac{b^2}{a}\right)^2$すなわち$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2-a^2}=1$を満たす。

逆に，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2-a^2}=1$上の任意の点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は楕円$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2-a^2}=1$である。

109

楕円周上の点を $P(x,y)$，点 P から準線に下ろした垂線の足を H とすると，

$e=\dfrac{PF}{PH}$ より，$e^2PH^2=PF^2$ が成り立つ。

これと $PH^2=(x-k)^2$，$PF^2=\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2$ より，

$e^2(x-k)^2=\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2$ すなわち $y^2=\left(e^2-1\right)x^2-2\left(ke^2-\sqrt{5}\right)x+k^2e^2-5$ ・・・①

一方，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ より，$y^2=-\dfrac{4}{9}x^2+4$ ・・・②

①と②は同値式だから，

$e^2-1=-\dfrac{4}{9}$ ・・・③

$ke^2-\sqrt{5}=0$ ・・・④

$k^2e^2-5=4$ ・・・⑤

③および $e>0$ より，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

これと④より，$k=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

また，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$k=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ は⑤を満たす。

よって，$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$k=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$