

関数 1 分数関数

平行移動

$y = f(x)$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, $y = f(x-p) + q$ になる。

解説

$y = f(x)$ 上の任意の点 $P(s, t)$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q 移動した点を $P'(s', t')$ とすると,

$$(s', t') = (s + p, t + q) \text{ より, } (s, t) = (s' - p, t' - q)$$

$$\text{これと } t = f(s) \text{ より, } t' - q = f(s' - p) \quad \therefore t' = f(s' - p) + q$$

これは, $P'(s', t')$ が $y = f(x - p) + q$ 上の点であることを示している。

150

(1)

解説

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2x+1}{2x-3} \\ &= \frac{-(2x-3)-2}{2x-3} \\ &= -1 - \frac{2}{2x-3} \\ &= -1 - \frac{2}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} \\ &= -1 - \frac{1}{x - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{x - \frac{3}{2}} - 1$$

よって, $y = \frac{-2x+1}{2x-3}$ は $y = -\frac{1}{x}$ を x 軸方向に $\frac{3}{2}$, y 軸方向に -1 平行移動したものであり,

漸近線は $x = \frac{3}{2}$, $y = -1$ となる。

(2)

解説

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2x-7}{x-3} \\
 &= \frac{2(x-3)-1}{x-3} \\
 &= 2 - \frac{1}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{x-3} + 2$$

よって、 $y = \frac{2x-7}{x-3}$ は $y = -\frac{1}{x}$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 平行移動したものであり、

漸近線は $x=3$, $y=2$ となる。

151

解説

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2x-5}{x-3} \\
 &= \frac{2(x-3)+1}{x-3} \\
 &= 2 + \frac{1}{x-3}
 \end{aligned}$$

よって、 $y = \frac{1}{x-3} + 2$ のグラフから求めればよい。

別解

$$0 \leq \frac{2x-5}{x-3} < 1 \quad (x \neq 3) \text{ より, } 0 \leq (x-3)^2 \cdot \frac{2x-5}{x-3} < (x-3)^2 \quad (x \neq 3)$$

$$\therefore 0 \leq (x-3)(2x-5) < (x-3)^2 \quad (x \neq 3)$$

$$0 \leq (x-3)(2x-5) \quad (x \neq 3) \text{ より, } x \leq \frac{5}{2} \text{ または } x > 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(x-3)(2x-5) < (x-3)^2 \text{ より, } (x-3)(x-2) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ より, } 2 < x \leq \frac{5}{2}$$

152

$$y = \frac{x-1}{3-x} = \frac{(x-3)+2}{3-x} = -1 - \frac{2}{x-3} \text{ より,}$$

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ は } y = -\frac{2}{x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } 3, y \text{ 軸方向に } -1 \text{ だけ平行移動したものである。} \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1} \text{ より,}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} \text{ は } y = -\frac{2}{x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } -1, y \text{ 軸方向に } 2 \text{ だけ平行移動したものである。} \cdots$$

②

したがって, ①, ②より,

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } -1-3=-4, y \text{ 軸方向に } 2-(-1)=3 \text{ 平行移動すれば,}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} \text{ になる。}$$

補足

漸近線の移動で考えればわかりやすい。

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ の漸近線は } x=3, y=-1, y = \frac{2x}{x+1} \text{ の漸近線は } x=-1, y=2 \text{ だから,}$$

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ の漸近線を } x \text{ 軸方向に } -1-3=-4, y \text{ 軸方向に } 2-(-1)=3 \text{ 平行移動すれば,}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} \text{ になる。}$$

あるいは,

①より,

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } -3, y \text{ 軸方向に } 1 \text{ だけ平行移動すると } y = -\frac{2}{x} \text{ になり,}$$

$$y = -\frac{2}{x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } -1, y \text{ 軸方向に } 2 \text{ だけ平行移動すると } y = \frac{2x}{x+1} \text{ になるから,}$$

$$y = \frac{x-1}{3-x} \text{ を } x \text{ 軸方向に } -3+(-1)=-4, y \text{ 軸方向に } 1+2=3 \text{ 平行移動すれば,}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} \text{ になる。}$$

153

$x=p$, $y=q$ を漸近線とする双曲線は, $y=\frac{a}{x-p}+q$ と表せる。

(1)

$x=2$, $y=1$ を漸近線とする直角双曲線の方程式は $y=\frac{a}{x-2}+1$ ($a \neq 0$) と表せるから,

$$y=\frac{x-2+a}{x-2} \quad (a \neq 0)$$

これが点(1,0)を通るから, $0=-a+1 \quad \therefore a=1$

$$\text{よって, } y=\frac{x-1}{x-2}$$

(2)

$$y=\frac{a}{x+1}+2 \quad (a \neq 0) \text{ より, } y=\frac{2x+2+a}{x+1} \quad (a \neq 0)$$

これが原点(0,0)を通るから, $0=2+a \quad \therefore a=-2$

$$\therefore y=\frac{2x}{x+1}$$

154

(1)

$$\frac{x-4}{x^2+x-6} > 0 \text{ であるためには,}$$

$x-4 > 0$ かつ $x^2+x-6 > 0$, または $x-4 < 0$ かつ $x^2+x-6 < 0$ であることが必要であり,
逆に, $x-4 > 0$ かつ $x^2+x-6 > 0$, または $x-4 < 0$ かつ $x^2+x-6 < 0$ であれば,

$$\frac{x-4}{x^2+x-6} > 0 \text{ となる。}$$

したがって, $\frac{x-4}{x^2+x-6} > 0$ であるための必要十分条件は,

$x-4 > 0$ かつ $x^2+x-6 > 0$, または $x-4 < 0$ かつ $x^2+x-6 < 0$ である。

よって, $-3 < x < 2$, $4 < x$

(2)

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2(x-1)-x(x-1)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)} \leq 0$$

よって, $(x+1)(x-2) \geq 0$ かつ $x(x-1) < 0$, または $(x+1)(x-2) \leq 0$ かつ $x(x-1) > 0$

$$\therefore -1 \leq x < 0, \quad 1 < x \leq 2$$