演習問題

25

$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$ より，$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

また，$f^{-1}(x)=g(x)$

よって，$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \Leftrightarrow x=g(y)$

これより，$-2=g(1) \Leftrightarrow 1=f(-2)$

よって，$1=\dfrac{-2a+1}{-4+b}$ $\therefore b-4=-2a+1$ （$b\neq 4$）

$\therefore 2a+b=5$ （$b\neq 4$）　・・・①

また，$f(2)=9$ より，$\dfrac{2a+1}{4+b}=9$ $\therefore 2a+1=9b+36$ （$b\neq -4$）

$\therefore 2a-9b=35$ （$b\neq -4$）　・・・②

①かつ②より，

$a=4$，$b=-3$

26

(1)

$y=f(x)=\sqrt{2(x+1)}-1$ とすると，$y\geq -1$，$x\geq -1$，$(y+1)^2=2(x+1)$ より，

$x=\dfrac{1}{2}(y+1)^2-1$ （$y\geq -1, x\geq -1$）

x を y に，y を x に書き替えることにより，$y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$ （$x\geq -1, y\geq -1$）

よって，$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$ （$x\geq -1$）

(2)

$\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}=\sqrt{2(x+1)}-1$ $\therefore (x+1)^2=2\sqrt{2(x+1)}$

両辺を 2 乗すると，$(x+1)^4=8(x+1)$ $\therefore (x+1)\{(x+1)^3-8\}=0$

$(x+1)\{(x+1)^3-8\}=0$ の解は，$x=-1,1$ であり，

これらは，いずれも $\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}=\sqrt{2(x+1)}-1$ を満たし，

$x=-1$ のとき $y=-1$，$x=1$ のとき $y=1$

よって，共有点の座標は，$(x,y)=(-1,-1),(1,1)$

27

(1)

$$g(f(x))=2\{f(x)\}^2+k=2(ax^3+bx+c)^2+k$$
$$=2(a^2x^6+b^2x^2+c^2+2abx^4+2acx^3+2bcx)+k$$
$$=2a^2x^6+4abx^4+4acx^3+2b^2x^2+4bcx+2c^2+k$$

$$f(g(x))=a\{g(x)\}^3+bg(x)+c$$
$$=a(2x^2+k)^3+b(2x^2+k)+c$$
$$=a(8x^6+k^3+12kx^4+6k^2x^2)+2bx^2+bk+c$$
$$=8ax^6+12akx^4+(6ak^2+2b)x^2+ak^3+bk+c$$

$g(f(x))$と$f(g(x))$はxについての恒等式の関係にあるから，

係数比較より，

$2a^2=8a \quad \therefore a(a-4)=0$ ・・・①

$4ab=12ak \quad \therefore a(b-3k)=0$ ・・・②

$4ac=0$ ・・・③

$2b^2=6ak^2+2b \quad \therefore b^2-b=3ak^2$ ・・・④

$4bc=0$ ・・・⑤

$2c^2+k=ak^3+bk+c \quad \therefore k(ak^2+b-1)=2c^2-c$ ・・・⑥

が成り立つ。

$a\neq 0$と③より，$c=0$であり，これは⑤を満たす。

また，$a\neq 0$と①より，$a=4$

よって，このとき，

②は，$b-3k=0$ ・・・②’

④は，$b^2-b=12k^2$ ・・・④’

⑥は，$4k^2+b-1=0$ ・・・⑥’（$\because k\neq 0$）

となる。

②’，④’，⑥’を満たすbとkを求めると，

②’より，$b=3k$，これを④’に代入して整理すると，$k(k+1)=0$

これと$k\neq 0$より，$k=-1$

また，これより$b=-3$となり，これらは，⑥’を満たす。

以上より，①～⑥の連立方程式の解は，

$a=4$，$b=-3$，$c=0$，$k=-1$

29

$2\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x+k$ を同値変形すると，$4(x-1)=\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2$ かつ $\frac{1}{2}x+k\geq 0$ より，

$x^2+2(2k-8)x+4k^2+16=0$ かつ $x+2k\geq 0$

これを満たす異なる 2 実数解を α,β，判別式を D とすると，

$D>0$ より，$\frac{D}{4}=(2k-8)^2-(4k^2+16)=-32k+48>0 \quad \therefore k<\frac{3}{2}$ ・・・①

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2(2k-8)$，$\alpha\beta=4k^2+16$

$\alpha+2k\geq 0$，$\beta+2k\geq 0$ より，$(\alpha+2k)+(\beta+2k)\geq 0$，$(a+2k)(\beta+2k)\geq 0$

よって，

$(\alpha+2k)+(\beta+2k)=\alpha+\beta+4k=-2(2k-8)+4k=16\geq 0$

$(a+2k)(\beta+2k)=\alpha\beta+2k(\alpha+\beta)+4k^2=4k^2+16+2k\{-2(2k-8)\}+4k^2=32k+16\geq 0$

$\therefore k\geq -\frac{1}{2}$ ・・・②

①かつ②より，$-\frac{1}{2}\leq k<\frac{3}{2}$

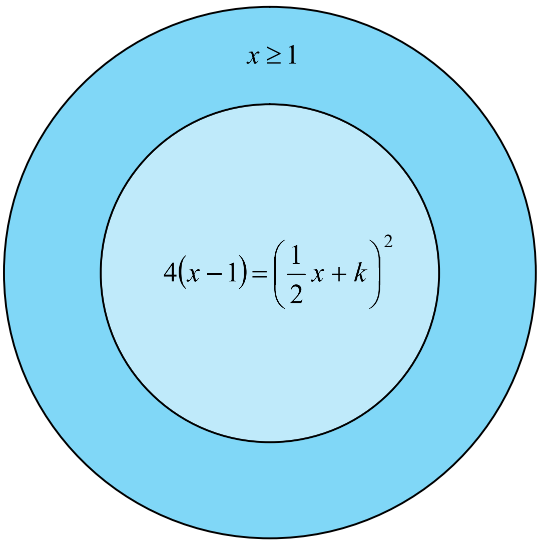
補足：同値変形について

$x\geq 1$ は $4(x-1)=\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2$ が成り立つための必要条件であるから，

$4(x-1)=\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2 \Rightarrow x\geq 1$ が成り立つ。

よって，包含関係は次のようになる。

ゆえに，$2\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x+k \Leftrightarrow 4(x-1)=\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2$ かつ $\frac{1}{2}x+k\geq 0$



30

解法 **1**：直接解く

$\dfrac{ax}{x-1}<1$ より，$\dfrac{ax}{x-1}-1<0$ $\quad\therefore \dfrac{(a-1)x+1}{x-1}<0$

ここで，$a=1$ とすると，$\dfrac{1}{x-1}<0$ より，$x<1$

$a\neq 1$ とすると，$(x-1)\{(a-1)x+1\}<0$ より，$(a-1)(x-1)\left(x-\dfrac{1}{1-a}\right)<0$

$0<a<1$ のとき

$a-1<0$ より，$(x-1)\left(x-\dfrac{1}{1-a}\right)>0$

また，$1<\dfrac{1}{1-a}$

よって，$x<1$，$\dfrac{1}{1-a}<x$

$1<a$ のとき

$a-1>0$ より，$(x-1)\left(x-\dfrac{1}{1-a}\right)<0$

また，$\dfrac{1}{1-a}<1$

よって，$\dfrac{1}{1-a}<x<1$

以上をまとめると，

$0<a<1$ のとき，$x<1$，$\dfrac{1}{1-a}<x$

$a=1$ のとき，$x<1$

$1<a$ のとき，$\dfrac{1}{1-a}<x<1$

解法 **2**：グラフを利用して解く

$a>0$，$\dfrac{ax}{x-1}<1$ より，$\dfrac{x}{x-1}<\dfrac{1}{a}$

よって，曲線 $y=\dfrac{x}{x-1}$ の y の値 $\dfrac{1}{a}$ より小さいときの x の範囲が不等式の解である。

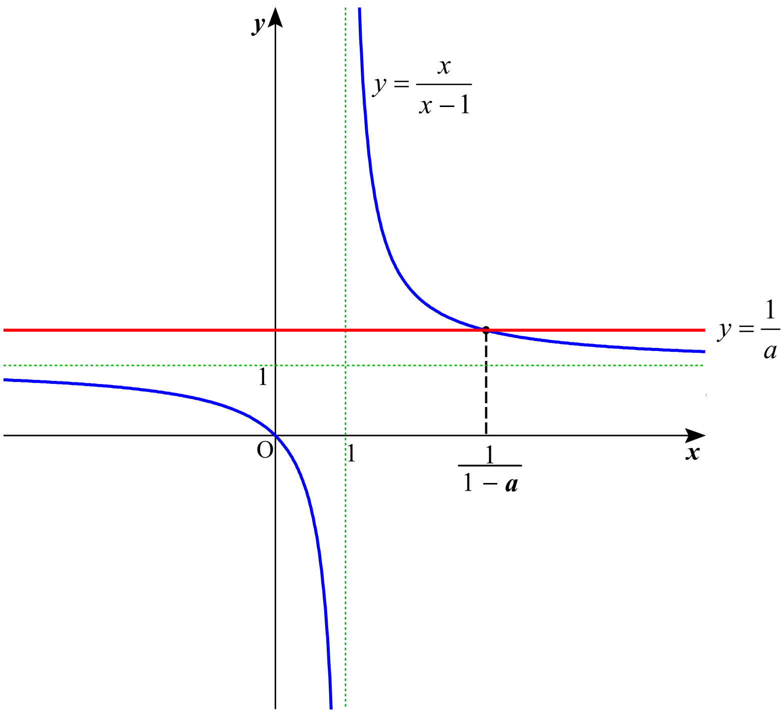
$y=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ より，$y=\dfrac{x}{x-1}$ は $y=\dfrac{1}{x}$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動した曲線であり，この曲線と $y=\dfrac{1}{a}$ との大小関係を調べ，不等式の解を求めることにする。

$\dfrac{1}{a}>1$，すなわち $0<a<1$ のとき

曲線 $y=\dfrac{x}{x-1}$ と直線 $y=\dfrac{1}{a}$ の交点の x 座標は，$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{a}$ を満たすから，

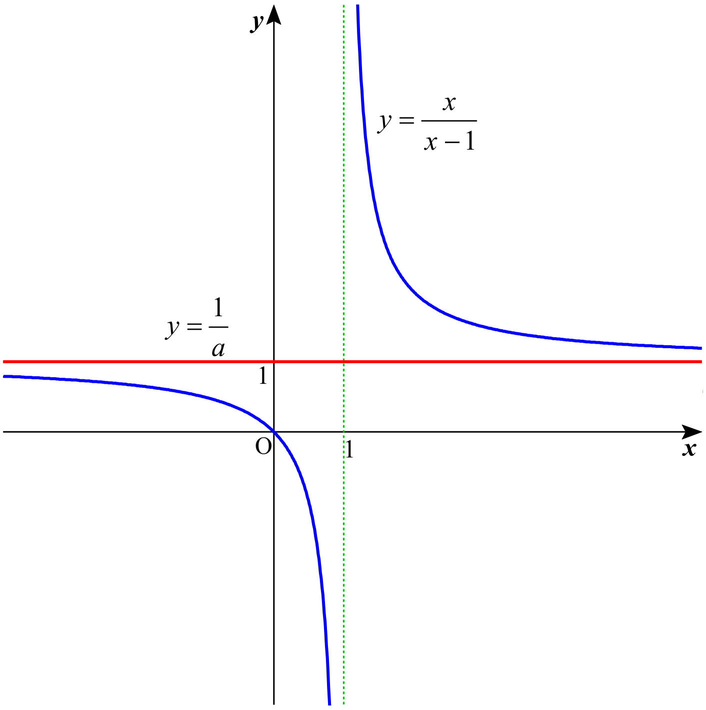
$x-1=ax$ より，$x=\dfrac{1}{1-a}$

これと下図より，解は，$x<1$，$\dfrac{1}{1-a}<x$



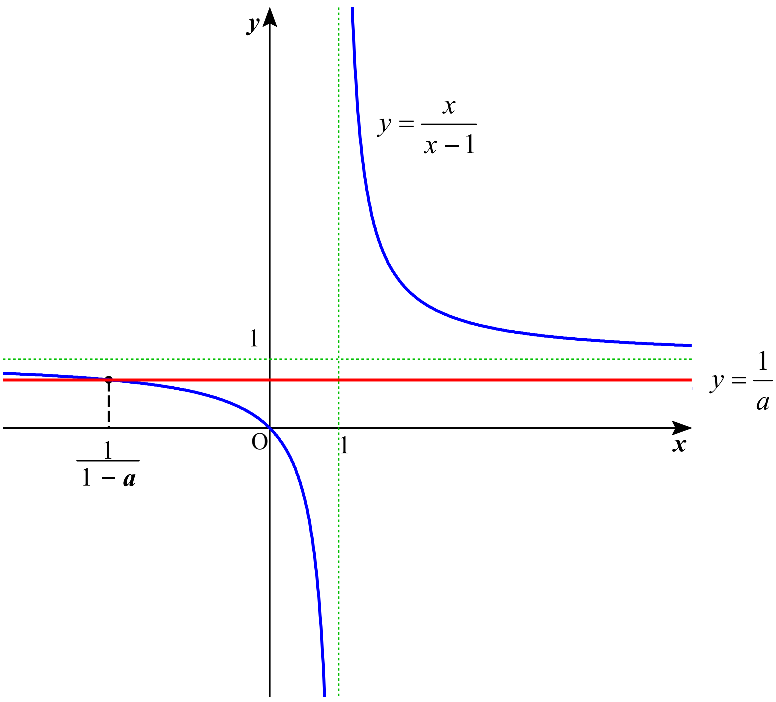
$\dfrac{1}{a}=1$，すなわち $a=1$ のとき

次図より，解は，$x<1$



$\frac{1}{a}<1$，すなわち$1<a$のとき

下図より，解は，$\frac{1}{1-a}<x<1$



31

$3^x>0$，$3^{-x}>0$ より，$\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}\geq\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=1$（相加平均≥相乗平均）

等号成立は$3^x=3^{-x}$のとき，すなわち$x=0$のとき

よって，$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$の値域は，$y\geq 1$

また，$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$より、$3^x-2y+3^{-x}=0$　$\therefore (3^x)^2-2y\cdot(3^x)+1=0$

これを3^xの2次方程式と見なし，この方程式を解くと，

$3^x>0$かつ$y\geq 1$より，$3^x=y+\sqrt{y^2-1}$

よって，$x=\log_3\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$（$y\geq 1$）

xをyに，yをxに書き替えることにより，
求める逆関数は，

$y=\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$（$x\geq 1$）

補足
　不等式に対しては,「相加平均≥相乗平均が使えないか？」を常に意識しよう。

32

$(f\circ g)(x)=x$ より，$g(x)$は$f(x)$の逆関数であるから，$g(x)=f^{-1}(x)$は恒等式である。

$y=f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$とおくと，$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2(2x+1)}$より，$y\neq\dfrac{3}{2}$

これと$y(2x+1)=3x-1$から$x=\dfrac{y+1}{-2y+3}$が得られ,

この式のxをyに，yをxに書き替えることにより,

$y=f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$の逆関数は，$y=f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{-2x+3}$となる。

よって，xについての恒等式$\dfrac{ax+1}{bx+c}=\dfrac{x+1}{-2x+3}$が得られ,

さらに，$(bx+c)(x+1)+(2x-3)(ax+1)=0$ より,
恒等式$(2a+b)x^2+(-3a+b+c+2)x+c-3=0$が得られる。

よって，$\begin{cases}2a+b=0\\-3a+b+c+2=0\\c-3=0\end{cases}$より，$a=1$，$b=-2$，$c=3$

33

(1)

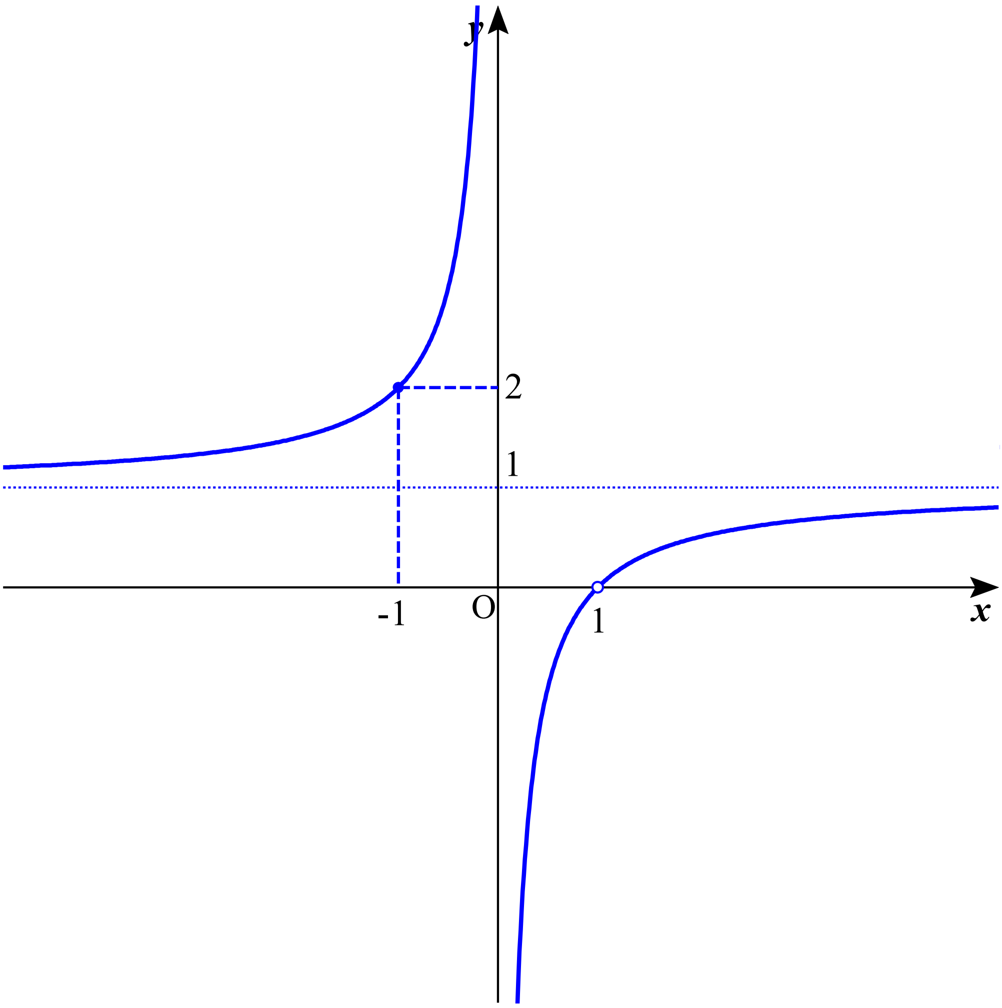
$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ が定義されるとき， $x\neq 1$

$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}$ が定義されるとき，$1-f(x)\neq 0$ より，$1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}\neq 0$ $\quad\therefore x\neq 0,1$

これと

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-f(x)}&=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}\\&=\frac{x-1}{x}\\&=1-\frac{1}{x}\end{aligned}$$

より，$f(f(x))=1-\dfrac{1}{x}$ （$x\neq 1$）



(2)

$b=0$ のとき

x 軸に平行な直線 $y=a$ が共有点をもたないときだから， $a=0,1$

よって， $(a,b)=(0,0),(1,0)$ ・・・①

$b\neq 0$ のとき

$y=f(f(x))$ は， $y=\dfrac{x-1}{x}$ 上の点 $(1,0)$ を通らないから，

$y=bx+a$ が $y=f(f(x))$ と共有点を持たないのは、

$y=bx+a$ が $y=\dfrac{x-1}{x}$ と共有点をもたない場合

または

$y=bx+a$ が $y=\dfrac{x-1}{x}$ と点 $(1,0)$ で接する場合

である。

$y=bx+a$ が $y=\dfrac{x-1}{x}$ と共有点を持たない場合

$\dfrac{x-1}{x}=bx+a$ より， x の 2 次方程式 $bx^2+(a-1)x+1=0$ が得られ，

これが実数解を持たなければよいから，判別式を D とすると， $D=(a-1)^2-4<0$

$\therefore b>\dfrac{1}{4}(a-1)^2$ ・・・②

$y=bx+a$ が $y=\dfrac{x-1}{x}$ と点 $(1,0)$ で接する場合

$\dfrac{x-1}{x}=bx+a$ より， x の 2 次方程式 $bx^2+(a-1)x+1=0$ が得られ，

これが $x=1$ を重解にもつから，

$b+(a-1)a+1=0$ より， $a+b=0$ ・・・③

解と係数の関係より， $\dfrac{1}{b}=1^2$ $\therefore b=1$ ・・・④

③，④より， $(a,b)=(-1,1)$ ・・・⑤

①または②または⑤より， $y>\dfrac{1}{4}(a-1)^2$ または $(a,b)=(0,0),(1,0),(-1,1)$

破線は含まない。