極限 1　数列の極限

181

(1)

$-1 \leq \cos\dfrac{n\pi}{4} \leq 1$ より，$-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{4} \leq \dfrac{1}{n}$

また，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

よって，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$

(2)

$0 \leq \sin^2 n\theta \leq 1$ より，$0 \leq \dfrac{\sin^2 n\theta}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$

また，$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$

よって，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}=0$

182

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+4n}-n &= \left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{\sqrt{n^2+4n}+n}\\ &= \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}\end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=\dfrac{4}{1+1}=2$

(2)

$$\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)=\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

(3)

$$\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$=\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{2(1+1)}{1+1}=2$

(4)

$\displaystyle\frac{n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-0}=1$

183

(1)

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\text{ より，}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

(2)

$$\frac{4+7+10+\cdots+(3n+1)}{5+8+11+\cdots+(3n+2)}=\frac{\frac{4+(3n+1)}{2}\cdot n}{\frac{5+(3n+2)}{2}\cdot n}=\frac{3n+5}{3n+7}=\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{7}{n}}\text{ より，}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+7+10+\cdots+(3n+1)}{5+8+11+\cdots+(3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{7}{n}}=1$$

(3)

$$\frac{3+7+11+\cdots+(4n-1)}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}=\frac{\frac{3+(4n-1)}{2}\cdot n}{\frac{3+(2n+1)}{2}\cdot n}=\frac{4n+2}{2n+4}=\frac{4+\frac{2}{n}}{2+\frac{4}{n}}\text{ より，}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots+(4n-1)}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{2+\frac{4}{n}}=2$$

(4)

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n+2}-\frac{n}{2}=-\frac{n}{2n+4}=-\frac{1}{2+\frac{4}{n}}\text{ より，}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2+\frac{4}{n}}\right)=-\frac{1}{2}$$

補足

等差数列の和＝項の値の平均値×項数＝$\dfrac{\text{初項の値}+\text{末項の値}}{2}\times$項数

185

49 ページの数列の極限の性質で「数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が収束して」とあることに注意

(1)

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は収束しないから正しくない。

反例：$a_n = n^2$，$b_n = n$

(2)

数列$\{a_n\}$が収束しないから正しくない。

反例：$a_n = n^2$，$b_n = \dfrac{1}{n}$

(3)

$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が同じ値に収束するならば$\{a_n\}$は収束する。

そこで，まず，命題：$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$ ならば$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が収束する

の真偽を調べる。

命題の対偶は，$\{b_n\}$または$\{c_n\}$が収束しないならば $\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) \neq 0$ であり，

これには

反例：$b_n = n + \dfrac{1}{n}$，$c_n = n - \dfrac{1}{n}$

があるから対偶は偽である。よって，命題は偽である。

ゆえに，(3)は正しくない。

(4)

$a_n - b_n = c_n$ とおくと，$b_n = a_n - c_n$ より，$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n)$

数列$\{a_n\}$，$\{c_n\}$は収束し，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ だから，

極限の性質より，$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha - 0 = \alpha$

186

$b_n = \dfrac{a_n + 5}{2a_n + 1}$ とおくと，$b_n(2a_n + 1) = a_n + 5 \quad \therefore a_n(2b_n - 1) = 5 - b_n$

ここで，$2b_n - 1 = 0$ とすると，

$a_n(2b_n - 1) = 5 - b_n$ の左辺は 0，右辺は$\dfrac{9}{2}$となり，等式が成り立たない。

よって，$2b_n - 1 \neq 0$ であり，これより，$a_n = \dfrac{5 - b_n}{2b_n - 1} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{5 - b_n}{2b_n - 1} = \dfrac{5-3}{2\cdot 3 - 1} = \dfrac{2}{5}$