

極限 2 無限等比数列

190

(1)

$$-1 < \frac{x}{1+2x} \leq 1 \text{ より, } \begin{cases} \frac{x}{1+2x} \leq 1 \\ \frac{x}{1+2x} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+2x} - 1 \leq 0 \\ \frac{x}{1+2x} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1+x}{1+2x} \leq 0 \\ \frac{3x+1}{1+2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1+2x} \geq 0 \\ \frac{3x+1}{1+2x} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{1+x}{1+2x} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x+1) \geq 0 \quad (1+2x \neq 0) \text{ より,}$$

$$\frac{1+x}{1+2x} \geq 0 \text{ の解は, } x \leq -1 \text{ または } -\frac{1}{2} < x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3x+1}{1+2x} > 0 \Leftrightarrow (3x+1)(2x+1) \geq 0 \quad (1+2x \neq 0) \text{ より,}$$

$$\frac{3x+1}{1+2x} > 0 \text{ の解は, } x < -\frac{1}{2} \text{ または } -\frac{1}{3} < x \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より, } x \leq -1 \text{ または } -\frac{1}{3} < x$$

補足

たとえば, $\frac{g(x)}{f(x)} < 0$ のとき, $f(x)$ と $g(x)$ の正負が異なるから, $f(x)g(x) < 0$ である。

さらに, $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$ のときは, $f(x) \neq 0$ だから, $f(x)g(x) \leq 0$ かつ $f(x) \neq 0$ である。

(2)

$x=0$ のときは, 0 に収束する。

$x \neq 0$ のときは, 初項 x , 公比 $x^2 - 5x + 5$ の等比数列だから,

$$\text{収束するためには, } -1 < x^2 - 5x + 5 \leq 1 \text{ であればよい。} \quad \therefore \begin{cases} x^2 - 5x + 5 \leq 1 \\ x^2 - 5x + 5 > -1 \end{cases}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} (x-1)(x-4) \leq 0 \\ (x-2)(x-3) > 0 \end{cases} \text{ より, } 1 \leq x < 2 \text{ または } 3 < x \leq 4$$

以上より, $x=0$ または $1 \leq x < 2$ または $3 < x \leq 4$

191

ミスをしていないための手順

$$\begin{cases} r > 1 \\ r = 1 \\ -1 < r < 1 \\ r \leq -1 \end{cases} \text{ の場合についての極限をそれぞれ調べてから整理する。}$$

192

$$-1 < \frac{x}{x^2 + 2p} \leq 1 \text{ より, } \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 2p} \leq 1 \\ \frac{x}{x^2 + 2p} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x + 2p}{x^2 + 2p} \geq 0 \\ \frac{x^2 + x + 2p}{x^2 + 2p} > 0 \end{cases}$$

条件より, $x^2 + 2p > 0$ だから,

$$\frac{x^2 - x + 2p}{x^2 + 2p} \geq 0 \text{ では, } x^2 - x + 2p \geq 0 \text{ が,}$$

$$\frac{x^2 + x + 2p}{x^2 + 2p} > 0 \text{ では, } x^2 + x + 2p > 0 \text{ がすべての実数 } x \text{ について成り立てばよい。}$$

このとき, 判別式を D とすると, それぞれ

$$1 - 8p \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - 8p < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるから, ①かつ②より, $p > \frac{1}{8}$

195

(1)

 $a_n - 2 = \frac{1}{b_n}$ を利用すれば式処理が楽になる。

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} \text{ より, } a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} - 2 \quad \therefore a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{a_n + 3}$$

$$\text{これと, } b_n = \frac{1}{a_n - 2} \text{ より, } a_n - 2 = \frac{1}{b_n} \text{ より, } \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{b_n} + 2\right) + 3}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{5b_n + 1} \quad \therefore b_{n+1} = 5b_n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式を $\alpha = 5\alpha + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$ とおくと,

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } b_{n+1} - \alpha = 5(b_n - \alpha) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を整理すると, } b_{n+1} = 5b_n - 4\alpha \text{ であり, これと } \textcircled{1} \text{ より, } -4\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } b_{n+1} + \frac{1}{4} = 5 \left(b_n + \frac{1}{4} \right) \quad \therefore \frac{b_{n+1} + \frac{1}{4}}{b_n + \frac{1}{4}} = 5$$

これは, 数列 $\left\{ b_n + \frac{1}{4} \right\}$ が

公比 5, 初項 $b_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{a_1 - 2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8 - 2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ の等比数列であることを示している。

$$\text{よって, } b_n + \frac{1}{4} = 5^{n-1} \cdot \frac{5}{12} \quad \therefore b_n = \frac{5^n - 3}{12}$$

(2)

$$b_n = \frac{5^n - 3}{12}, \quad a_n - 2 = \frac{1}{b_n} \text{ より, } a_n = \frac{12}{5^n - 3} + 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

補足: $a_{n+1} = pa_n + q(n)$, $a_1 = \alpha$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項の求め方とその原理

$$a_{n+1} = pa_n + q(n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(n+1) = pf(n) + q(n) \text{ を満たす特性方程式を } b_{n+1} = pb_n + q(n) \quad \cdots \textcircled{2} \text{ とすると,}$$

① - ② より,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = p(a_n - b_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = p$$

これは, 数列 $\{a_n - b_n\}$ が公比 p , 初項 $a_1 - b_1$ の等比数列であることを示している。

$$\text{よって, } a_n - b_n = p^{n-1}(a_1 - b_1)$$

$$\text{ゆえに, } a_n = p^{n-1}(a_1 - b_1) + b_n$$

要するに,

与式の漸化式とその特性方程式の差をとることにより,

等比数列の漸化式 $a_{n+1} - b_{n+1} = p(a_n - b_n)$ を得,

それから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるというのが,

特性方程式を利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める方法の原理である。

特性方程式の作り方の原理

$$\textcircled{3} \text{ より, } a_{n+1} = pa_n + b_{n+1} - pb_n$$

これと $a_{n+1} = pa_n + q(n)$ より,

$$q(n) = b_{n+1} - pb_n$$

これより, b_n を $q(n)$ と同種の式にすれば楽に特性方程式ができることがわかる。

197

$$\begin{aligned}
3^n &= (1+2)^n = {}_nC_0 1^n \cdot 2^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \cdot 2^1 + {}_nC_2 1^{n-2} \cdot 2^2 + \cdots + {}_nC_k 1^{n-k} \cdot 2^k + \cdots + {}_nC_n 1^0 \cdot 2^n \\
&\geq {}_nC_0 1^n \cdot 2^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \cdot 2^1 + {}_nC_2 1^{n-2} \cdot 2^2 \\
&= 1 + n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^2 \\
&= 2n^2 + 1 > 0
\end{aligned}$$

$$\text{よって, } 0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{2n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = 0 \text{ だから, はさみうちの原理により, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$$

補足

入試重要不等式 $(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2$ の導き方

$$\begin{aligned}
(1+h)^n &= {}_nC_0 1^n \cdot h^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \cdot h^1 + {}_nC_2 1^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + {}_nC_k 1^{n-k} \cdot h^k + \cdots + {}_nC_n 1^0 \cdot h^n \\
&\geq {}_nC_0 1^n \cdot h^0 + {}_nC_1 1^{n-1} \cdot h^1 + {}_nC_2 1^{n-2} \cdot h^2 \\
&= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2
\end{aligned}$$

入試は教科書をもとに出題されるので, 教科書の公式の証明や例題で使われているテクニックを完全にマスターすることは非常に重要です。

198

与式の両辺を 2 乗すると, $a_{n+1}^2 = 4a_n$

さらに, 両辺について, 2 を底とする対数をとると, $2 \log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + 2$

$$\therefore \log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} \log_2 a_n + 1$$

補足: 底の取り方は任意だが, 2 を底とすると式処理が楽である。

ここで, $b_n = \log_2 a_n$ とおくと, $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1$, $b_1 = \log_2 10$ より,

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (b_n - 2), \quad b_1 = \log_2 10$$

よって, $b_n = (\log_2 10 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ となるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

ゆえに, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{b_n} = 2^2 = 4$