極限 3　無限級数

207

(1)

$$a_n == \frac{2}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{4}{n(n+1)} = 4 \cdot \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$ より，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = 4$

(2)

$$a_n == \frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)} = \frac{1}{\frac{3+(2n+1)}{2}\cdot n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$ より，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$

補足 1

等差数列の和＝項の値の平均値 $\times$ 項数 $= \dfrac{初項の値+末項の値}{2} \times$ 項数

補足 2

$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$は縦書するとわかりやすい。

$$
\begin{array}{cc}
1 & -\frac{1}{3} \\[6pt]
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\[6pt]
\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\[6pt]
\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\
\vdots & \vdots \\
\frac{1}{n-3} & -\frac{1}{n-1} \\[6pt]
\frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n} \\[6pt]
\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n+1} \\[6pt]
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n+2}
\end{array}
$$

208

(1)

$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=8n+20$ より，$b_n=8n+20$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の階差数列だから，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\frac{1}{35}+\sum_{k=1}^{n-1}(8k-20)=35+4n(n-1)+20(n-1)=4n^2+16n+15$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4n^2+16n+15}$$

(2)

$$a_n=\frac{1}{4n^2+16n+15}=\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+5)-(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

209

公比を r とすると，無限等比級数が収束するためには，$|r|<1$ であることが必要。

このとき，初項を a とすると，無限等比級数は $\dfrac{a}{1-r}$ に収束するから，

条件より，$\dfrac{a}{1-r}=-4$ $\quad\therefore a=4r-4$ ・・・①

また，等比数列の第 2 項が 3 であることより，$ar=3$ ・・・②

①，②より，$(4r-4)r=3$ $\quad\therefore 4r^2-4r-3=0$

よって，$(2r-3)(2r+1)=0$

$|r|<1$ であることが必要だから，$r=-\dfrac{1}{2}$

これと③より，$a=-6$

以上より，初項 -6，公比 $-\dfrac{1}{2}$

210

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}$$

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right\}$$

より，$S-S_n=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{7}\right)^n=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7^{n-1}}$

よって，条件より，$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7^{n-1}}<\frac{1}{1000}\quad\therefore\frac{1}{7^{n-1}}<\frac{6}{1000}$

逆数をとることにより，$7^{n-1}>\frac{1000}{6}=166.\dot{6}$

これと $7^2<166.\dot{6}<7^3$ より，$n-1\geq 3\quad\therefore n\geq 4$

ゆえに，求めるべき n の値は，4

211

(1)

$$\begin{aligned}0.\dot{3}\dot{6}&=0.36+0.0036+0.000036+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{0.36\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{0.36}{1-\frac{1}{100}}\\&=\frac{4}{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.3\dot{2}&=0.32+0.002+0.0002+\cdots\\&=0.3+(0.02+0.002+0.0002+\cdots)\\&=0.3+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{0.02\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right\}\\&=0.3+\frac{0.02}{1-\frac{1}{10}}\\&=0.3+\frac{2}{90}\\&=\frac{29}{90}\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
0.\dot{3}\dot{6}\times 0.3\dot{2} &= \frac{4}{11}\times\frac{29}{90}\\
&= \frac{116}{990}\\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{116}{99}\\
&= \frac{1}{10}\left(1+\frac{17}{99}\right)\\
&= \frac{1}{10}\left(1+0.17\cdot\frac{100}{99}\right) \quad \Leftarrow \quad a\times\frac{10}{9}, a\times\frac{100}{99}, a\times\frac{1000}{999}, \cdots \text{等の形をつくる。}\\
&= \frac{1}{10}\left(1+\frac{0.17}{\frac{99}{100}}\right)\\
&= \frac{1}{10}\left(1+\frac{0.17}{1-\frac{1}{100}}\right)\\
&= \frac{1}{10}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{0.17\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right\}\right]\\
&= \frac{1}{10}\left(1+0.\dot{1}\dot{7}\right)\\
&= 0.1\dot{1}\dot{7}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
1.\dot{2}\dot{5} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{0.25\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right\}\\
&= 1+\frac{25}{99}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0.0\dot{5} &= \sum_{n=1}^{\infty}0.05\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\\
&= \frac{5}{90}\\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore 1.\dot{2}\dot{5}\div 0.0\dot{5} = \left(1+\frac{25}{99}\right)\cdot 18 = 18+\frac{50}{11} = 22+\frac{6}{11} = 22+\frac{54}{99} = 22+\frac{0.54}{1-\frac{1}{100}} = 22+0.\dot{5}\dot{4} = 22.\dot{5}\dot{4}
$$

212

$f(x)$ は初項 $\sqrt{x}$，公比 $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ の無限等比級数である。

$x=0$ のとき

$f(0)=0$

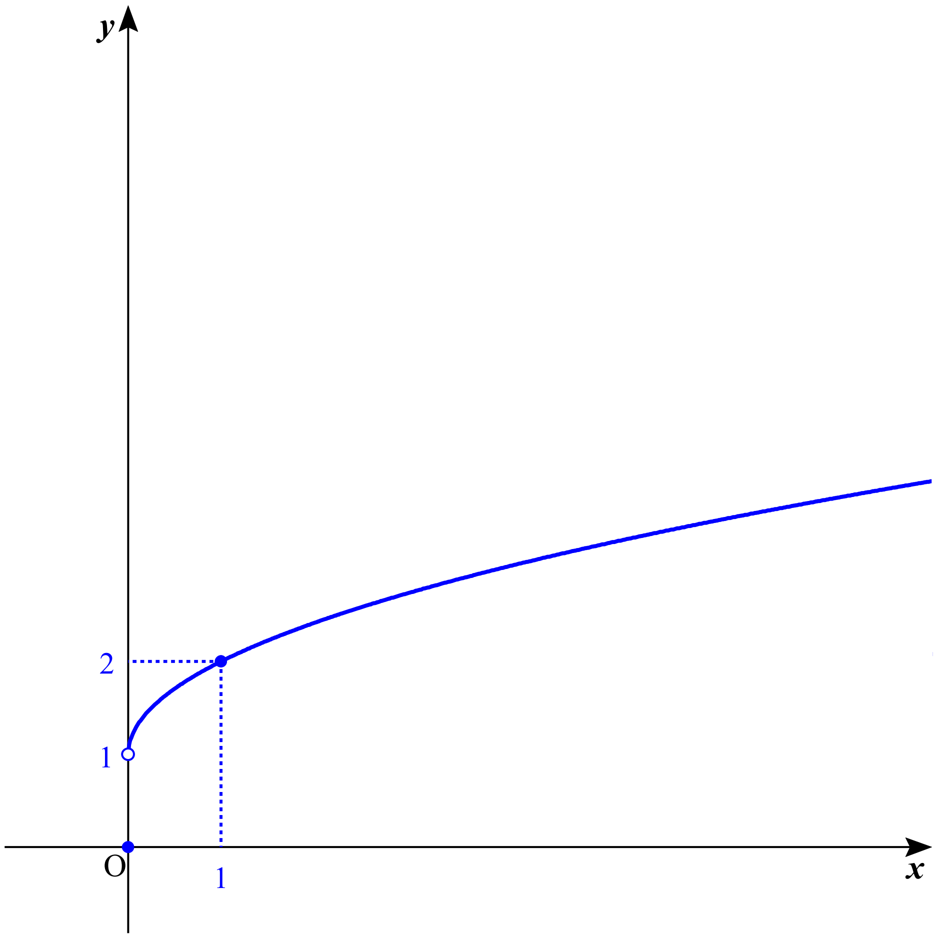
$x>0$ のとき

$0<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ より，

$f(x)$ は収束し，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{x}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}}$$
$$=1+\sqrt{x}$$

となる。



214

(1)

$\cos n\pi = (-1)^n$ より， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \sin\frac{n\pi}{2} &= -\frac{1}{3} + 0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-1) + 0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^5} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3^2}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{3}\sum\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)} \\ &= -\frac{3}{10}\end{aligned}$$

215

(1)

$-1 < x^2 - 2x \leq 1$ より， $\begin{cases} x^2 - 2x \leq 1 \\ x^2 - 2x > -1 \end{cases}$

$x^2 - 2x \leq 1$ より， $(x-1)^2 \leq 2 \quad \therefore 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ ・・・①
$x^2 - 2x > -1$ より， $(x-1)^2 > 0 \quad \therefore x \neq 1$ ・・・②
①かつ②より， $1-\sqrt{2} \leq x < 1$ または $1 < x \leq 1+\sqrt{2}$

(2)

初項 $x^2 - 2x = 0$ または公比 $|x^2 - 2x| < 1$ であればよく，

$x^2 - 2x = 0$ ならば $|x^2 - 2x| < 1$ が成り立つから，

$|x^2 - 2x| < 1$ を求めればよい。

よって， $-1 < x^2 - 2x < 1$ を解くことにより， $1-\sqrt{2} < x < 1$ または $1 < x < 1+\sqrt{2}$

216

初項 1，公比 $-(x+y)$ の等比数列だから，

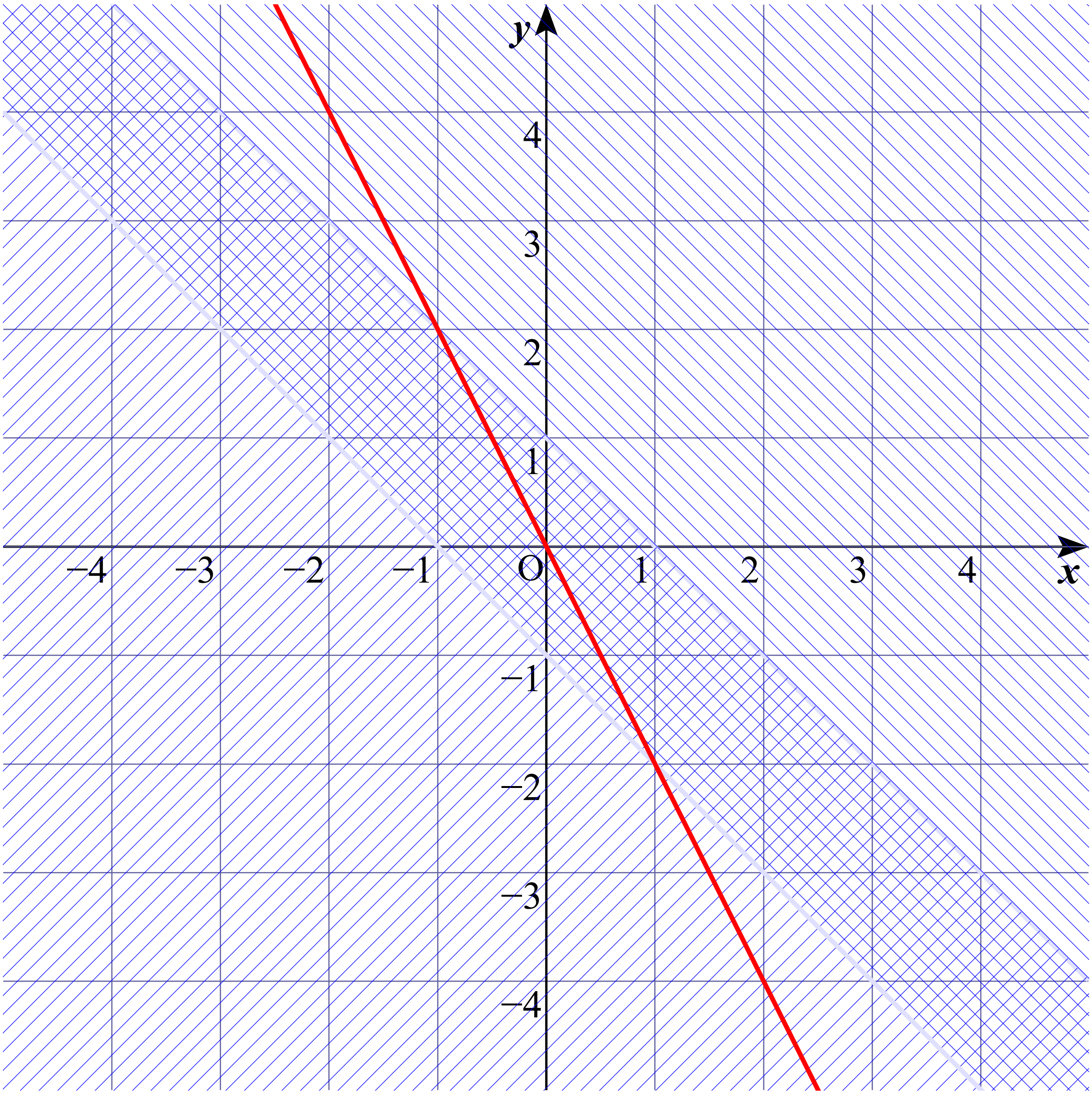
収束条件は $|-(x+y)|<1$，

すなわち $-1<x+y<1$

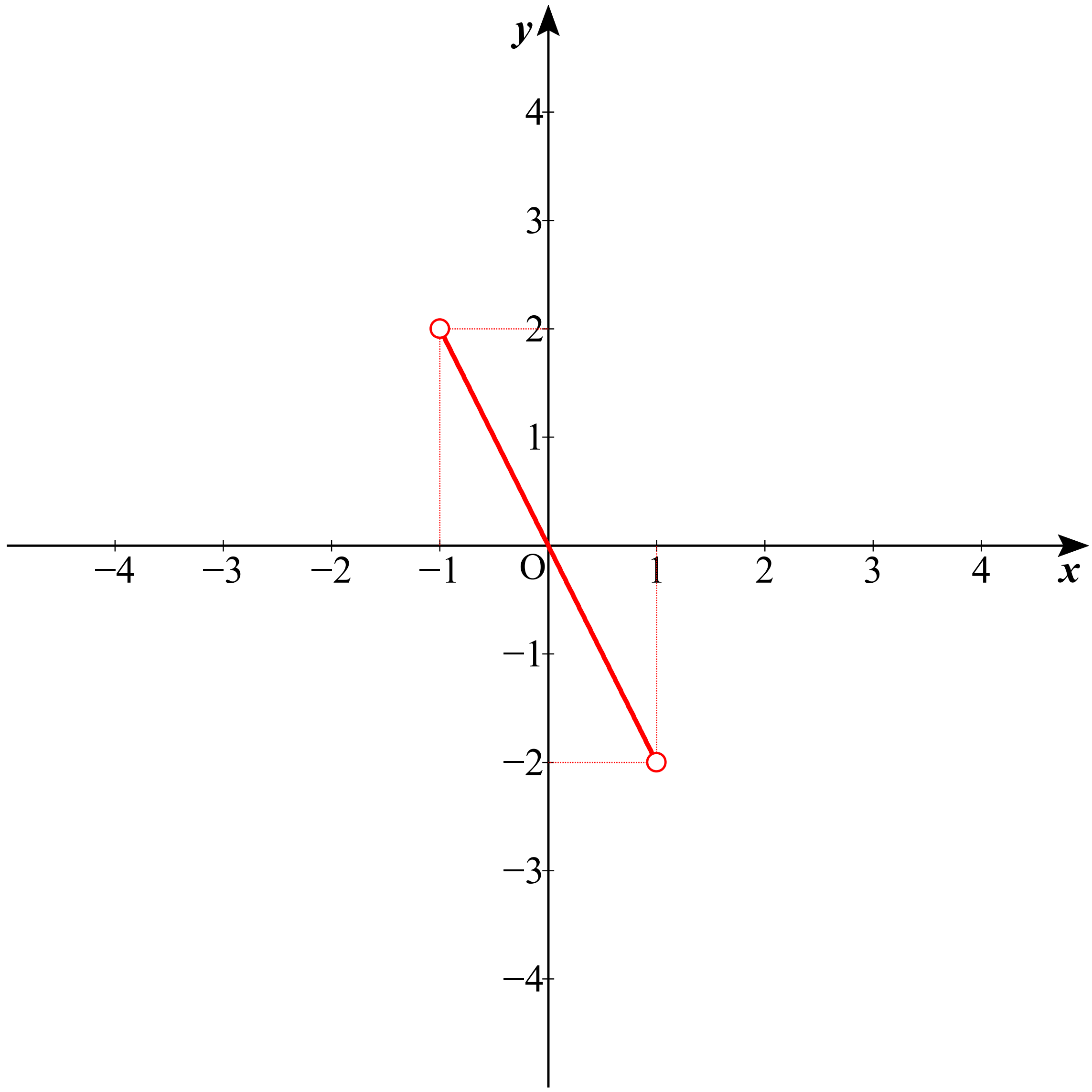
よって，$y<-x+1$ かつ $y>-x-1$ ・・・①

であり，このとき，$\dfrac{1}{1-(x+y)}$ に収束する。

よって，条件より，$\dfrac{1}{1-\{-(x+y)\}}=\dfrac{1}{1-x}$ $\therefore y=-2x$ ・・・②



①かつ②より，求めるグラフは，



217

(1)

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} \cdots + \frac{n}{3^n} \quad \cdots ①$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}} \quad \cdots ②$$

①－②より，$S_n - \frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{n}{3^{n+1}}$

$$\therefore \frac{2}{3} S_n = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

よって，$S_n = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$

ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}$

(2)

(1)と同様に，

$$S_n - xS_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$$

$$= \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n$$

$$\therefore S_n = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{(1 - x)^2}$

218

物理「はね返り運動」の頻出問題である。

n 回目のはね返りの高さを h_n とすると，$n+1$ 回目のはね返りの高さは $h_{n+1}=\dfrac{4}{5}h_n$

これと 1 回目のはね返りの高さ $h_1=2\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{5}$ m より，$h_n=\dfrac{8}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

よって，n 回目のはね返りから $n+1$ 回目のはね返り直前までの上下運動距離を l_n とすると，

$l_n=2h_n$ より，$l_n=\dfrac{16}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

最初高さ 2m から落下するから，

$n+1$ 回目のはね返り直前までの上下運動距離を L_n m とすると，

$$
\begin{aligned}
L_n &= 2+\sum_{k=1}^{n} l_k \\
&= 2+\frac{16}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\
&= 2+\frac{16}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}, \\
&= 2+16\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \\
&= 18-16\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n=18$

ゆえに，上下運動の総距離は，18m

219

$\vec{a}_{4(n+1)-3} = \dfrac{1}{2^4}\vec{a}_{4n-3}$ より，$\vec{a}_{4n-3} = \left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

これと $\left|\vec{a}_{4n-3}\right| = \left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}$ より，

$$\vec{a}_{4n-3} + \vec{a}_{4n-2} + \vec{a}_{4n-1} + \vec{a}_{4n} = \begin{pmatrix} \left|\vec{a}_{4n-3}\right| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}_{4n-3}\right| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2^2}\left|\vec{a}_{4n-3}\right| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2^3}\left|\vec{a}_{4n-3}\right| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2^2}\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2^3}\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \\ \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

よって，原点からの変位を $\vec{L}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{a}_{4k-3} + \vec{a}_{4k-2} + \vec{a}_{4k-1} + \vec{a}_{4k}\right)$ とすると，

$$\vec{L}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{2^4}} \\ \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{2^4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}\right\} \\ \dfrac{2}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^{n-1}\right\} \end{pmatrix}$$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\vec{L}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$

また，他の部分和の極限についても

$$\lim_{n\to\infty}\left(\vec{L}_n + \vec{a}_{4n+1}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

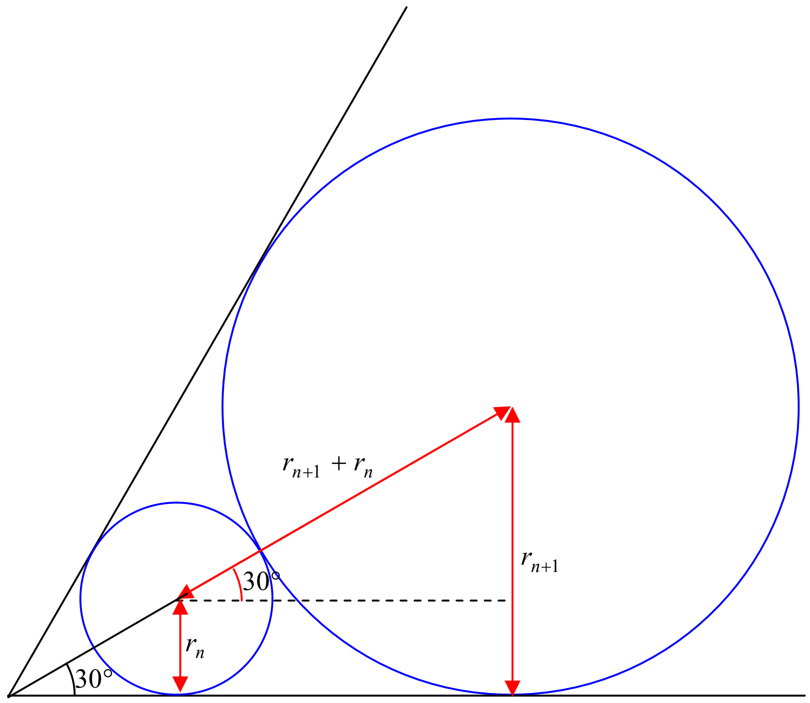
$$\lim_{n\to\infty}\left(\vec{L}_n + \vec{a}_{4n+1} + \vec{a}_{4n+2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\vec{L}_n+\vec{a}_{4n+1}+\vec{a}_{4n+2}+\vec{a}_{4n+3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

以上より，原点からの変位の極限は$\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

ゆえに，点 P が近づいていく点の座標は$\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$

220



内接円 O_n の半径を r_n （ただし，$r_1 = r$ ）とすると，図より，$\dfrac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \sin 30°$

$\therefore \dfrac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \dfrac{1}{2} \quad \therefore r_{n+1} = \dfrac{1}{3} r_n$

これと $r_1 = r$ より，$r_n = r\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^{\,2} &= \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)} \\ &= \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &= \pi r^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{9}{8}\pi r^2\end{aligned}$$

221

$\angle\mathrm{C}$ の大きさを $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$\Delta\mathrm{CA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ と $\Delta\mathrm{CA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ は相似で，$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n \cos\theta$ より，
相似比は，$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ ： $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ ＝ $\cos\theta$ ：1

よって，$\Delta\mathrm{CA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の面積を S_n とすると，$S_{n+1} = S_n \cos^2\theta \quad \therefore S_n = S_1\left(\cos^2\theta\right)^{n-1}$

これと $\Delta\mathrm{CAB}$ の面積を S とすると，$S_1 = S\cos^2\theta$ より，$S_n = S\left(\cos^2\theta\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{S\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{S}{\tan^2\theta}$$

これより，$\dfrac{S}{\tan^2\theta} \leq S$，すなわち $\tan^2\theta \geq 1$ となるような θ の範囲を求めればよく，

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan\theta \geq 1 \quad \therefore \dfrac{\pi}{4} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

ゆえに，$\dfrac{\pi}{4} \leq \angle\mathrm{C} < \dfrac{\pi}{2}$

223

$n \geq \sqrt{n} > 0$ より，$\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}}$

これと $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$