極限 4　関数の極限

235

(1)

$$\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt{x^2+3}-2x}$$

$$=\frac{-3x^2+3}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}$$

$$=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}$$

$$=-\frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2x}$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}-\frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\frac{-3(-1-1)}{\sqrt{(-1)^2+3-2\cdot(-1)}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(2)

$$\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\cdot\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+\sqrt{3x-2}}$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+\sqrt{3x-2}}=\frac{(2-1)\left(\sqrt{2+2}+2\right)}{2+\sqrt{3\cdot2-2}}=\frac{1\cdot4}{2+\sqrt{4}}=1$

(3)

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x-x^2}{-x^2+x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=1$

(4)

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{2x}{x\left\{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}$$

より，$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}=\frac{2}{3}$

236

(1)

$$\frac{x-2}{x^2-x}=\frac{x-2}{x(x-1)}$$

$x\to +0$ のとき

$x(x-1)$ は負の値を取りながら無限に 0 に近づいていくことと

$x-2$ は無限に -2 に近づいていくことから，$\lim_{x\to +0}\frac{x-2}{x^2-x}=\infty$

$x\to -0$ のとき

$x(x-1)$ は正の値を取りながら無限に 0 に近づいていくことと

$x-2$ は -2 に無限に近づいていくことから，$\lim_{x\to -0}\frac{x-2}{x^2-x}=-\infty$

よって，極限はない。

(2)

$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty$ より，$\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$ より，$\lim_{x\to -0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$

よって，極限はない。

(3)

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$ より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$　$\displaystyle\therefore\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ より，$\displaystyle\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=0$　$\displaystyle\therefore\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$

よって，極限はない。

237

(1)

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{(x+1)(x-1)}$$

$a=1$ のとき

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$a<1$ のとき

$x\to1+0$ より，x は 1 より大きい値をとりながら無限に 1 に近づいていく。

よって，x^2-1 は正の値をとりながら無限に 0 に近づいていく。

これと $x-a$ は無限に正の有限確定値 $1-a$ に近づいていくことから，

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{x^2-1}=\infty$$

$a>1$ のとき

$x\to1+0$ より，x は 1 より大きい値をとりながら無限に 1 に無限に近づいていく。

よって，x^2-1 は正の値をとりながら無限に 0 に近づいていく。

これと $x-a$ は無限に負の有限確定値 $1-a$ に近づいていくことから，

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{x^2-1}=-\infty$$

(2)

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x-a}{x^2-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{x-a}{(x+1)(x-1)}$$

$a=1$ のとき

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$a<1$ のとき

$x\to1-0$ より，x は 1 より小さい値をとりながら無限に 1 に近づいていく。

よって，x^2-1 は負の値をとりながら無限に 0 に近づいていく。

これと$x-a$は無限に正の有限確定値$1-a$に近づいていくことから，$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{x^2-1}=-\infty$

$a>1$のとき

$x\to1-0$より，xは1より小さい値をとりながら無限に1に近づいていく。

よって，x^2-1は負の値をとりながら無限に0に近づいていく。

これと$x-a$は無限に負の有限確定値$1-a$に近づいていくことから，$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-a}{x^2-1}=\infty$

(3)

(1)(2)より，

$a=1$ならば$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

$a\neq1$ならば極限はない。

238

$[x]$とはxを超えない最大の整数を表す。例：$[3.5]=3$ $[-3.5]=-4$

また，$[x]=k$ならば$k\leq x<k+1$

(1)

$x\to2+0$のとき

xは2より大きい値をとりながら無限に2に近づいていくから$\displaystyle\lim_{x\to2+0}[x]=2$

$x\to2-0$のとき

xは2より小さい値をとりながら無限に2に近づいていくから$\displaystyle\lim_{x\to2-0}[x]=1$

よって，極限はない。

(2)

$$\lim_{x\to1+0}(2x-[x])=\lim_{x\to1+0}2x-\lim_{x\to1+0}[x]=2-1=1$$

$$\lim_{x\to1-0}(2x-[x])=\lim_{x\to1-0}2x-\lim_{x\to1-0}[x]=2-0=2$$

よって，極限はない。

(3)

$$\lim_{x\to1+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1+0}[2x]-\lim_{x\to1+0}[x]=2-1=1$$

$$\lim_{x\to1-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1-0}[2x]-\lim_{x\to1-0}[x]=1-0=1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])=1$

239

(1)

解法１：置き換え

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty \Leftrightarrow t\to\infty$ より，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}\right)\left(\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}\right)}$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{t}$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$=-2$$

解法 **2**：直接解く

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\qquad\left(\because\sqrt{A^2}=|A|\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\qquad(\because x<0)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=-2$$

(2)

$$
\begin{aligned}
x\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right) &= \frac{x\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{x\left\{x^2-\left(x^2-a^2\right)\right\}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{a^2x}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \frac{a^2}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{x\to\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} = \frac{a^2}{2}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right) &= \log_3\sqrt{x}+\log_3\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right) \\
&= \log_3\sqrt{x}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right) \\
&= \log_3\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}\right)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}} \\
&= \log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}} \\
&= \log_3\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}} = \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}
$$

240

(1)

分母が 0 に収束するため，分子が 0 でない有限確定値に収束すると与式は発散する。

したがって，与式が収束するためには，分子が 0 に収束することが必要である。

すなわち，$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+3x}+a\right)=1+a$ より，$1+a=0 \quad \therefore a=-1$

このとき，$\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}=\dfrac{3}{\sqrt{1+3x}+1}$ より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}=\frac{3}{2}$$

(2)

分母が 0 に収束するため，分子が 0 でない有限確定値に収束すると与式は発散する。

したがって，与式が収束するためには，分子が 0 に収束することが必要である。

すなわち，$\lim_{x\to 1}\left(a\sqrt{x+8}-6\right)=3a-6$ より，$3a-6=0 \quad \therefore a=2$

このとき，$\dfrac{2\sqrt{x+8}-6}{x-1}=\dfrac{\left(2\sqrt{x+8}-6\right)\left(2\sqrt{x+8}+6\right)}{(x-1)\left(2\sqrt{x+8}+6\right)}=\dfrac{4}{2\sqrt{x+8}+6}$ より，

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x+8}-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{2\sqrt{x+8}+6}=\frac{1}{3}$$

241

(1)～(3)

いずれの与式も分母が 0 に収束するから，与式が収束するためには分子も 0 に収束することが必要である。

略解

(1)

$\lim_{x\to 2} ax^2+bx=4a+2b=0$ より，$b=-2a$

このとき，

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{ax(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}ax=2a \qquad \therefore 2a=1$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}, b=-1$

(2)

$\lim_{x \to 1}\left(a\sqrt{x+1}-b\right)=\sqrt{2}a-b=0$ より， $b=\sqrt{2}a$

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-\sqrt{2}a}{x-1}&=\lim_{x \to 1}\frac{a\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)}{x-1}\\&=a\lim_{x \to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}\\&=a\lim_{x \to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\\&=\frac{a}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore \frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

よって， $a=4, b=4\sqrt{2}$

(3)

$\lim_{x \to -1}\left(\sqrt{x^2+ax}+b\right)=\sqrt{1-a}+b=0$ より， $b=-\sqrt{1-a}$

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{1-a}}{x^2-1}&=\lim_{x \to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a}\right)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a}\right)}\\&=\lim_{x \to -1}\frac{x+a-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a}\right)}\\&=-\frac{a-2}{4\sqrt{1-a}}\end{aligned}$$

$\therefore -\frac{a-2}{4\sqrt{1-a}}=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore (a-2)^2=4(1-a)$ $\quad \therefore a=0$

よって， $a=0, b=-1$

(4)

与式が 0 に収束するためには，$a<0$ であることが必要である。

また，

$$\frac{\left\{\sqrt{x^2-1}+(ax+b)\right\}\left\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\right\}}{\sqrt{x^2+1}-(ax+b)}=\frac{x^2-1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+1}-ax-b}$$

$$=\frac{(1-a^2)x^2-2abx-(b^2+1)}{\sqrt{x^2+1}-ax-b}$$

$$=\frac{1-a^2-\frac{2ab}{x}-\frac{b^2+1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}$$

および $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}\right)=0$ より，

$\lim_{x\to\infty}\left(1-a^2-\frac{2ab}{x}-\frac{b^2+1}{x^2}\right)=1-a^2=0$ となることも必要。

よって，$a=-1$

このとき，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2bx-(b^2+1)}{\sqrt{x^2+1}+x-b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2b-\frac{b^2+1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{b}{x}}$$

$$=b$$

$\therefore b=0$

以上より，$a=-1, b=0$

242

$\lim_{x\to0} f(x)=0$ であることが必要であるから，$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ より，$f(0)=0$　・・・①

$\lim_{x\to1} f(x)=0$ であることが必要であるから，$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ より，$f(1)=0$　・・・②

よって，①，②および因数定理より，
3 次関数 $f(x)$ は $f(x)=x(x-1)(ax+b)$（$a\neq0$）と表せる。
これより，

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$

これと $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$ より，$b=-3$　・・・③

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$

これと $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ より，$a+b=-1$　・・・④

③，④より，$a=2$，$b=-3$
ゆえに，

$f(x)=x(x-1)(2x-3)$
$\quad=2x^3-5x^2+3x$

243

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x^3}-2}{\dfrac{1}{x}}$，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ より，

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が収束するためには，$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}-2\right)=0$　・・・①

であることが必要である。
これと，

$f(x)$ を 2 次以下の整式とすると，$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}-2\right)=-2$

$f(x)$ を 4 次以上の整式とすると，$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}-2\right)$ は発散することから，

$f(x)$ は 3 次の整式である。

よって，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}-2\right)=a-2$ となり，

これと①より，　$a=2$

$\therefore f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$

よって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+cx+d}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}\right)$$
$$=b$$

これと $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より，　$b=1$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2+cx+d$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^2+x+c+\frac{d}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ が収束するためには，　$d=0$ であることが必要であり，

このとき，　$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+x+c)=c$

これと $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より，　$c=-3$

ゆえに，$(x)=2x^3+x^2-3x$

244

ポイント（**解法 1，2** 共通）

点 P が点 A に近づくから，点 Q の座標を点 P の座標を用いて表す。

解法 1

$\mathrm{P}\left(\alpha, \dfrac{k^2}{\alpha}\right)(\alpha \neq k)$ とすると，直線 AP の傾き＝$\dfrac{k-\dfrac{k^2}{\alpha}}{k-\alpha} = -\dfrac{k}{\alpha}$

直線 PQ は AP と垂直で点 P を通る直線だから，その式は $y = \dfrac{\alpha}{k}(x-\alpha) + \dfrac{k^2}{\alpha}$

これを整理すると，$y = \dfrac{\alpha}{k}x + \dfrac{(k-\alpha)(k^2+k\alpha+\alpha^2)}{k\alpha}$ となり，

点 Q は $y = \dfrac{\alpha}{k}x + \dfrac{(k-\alpha)(k^2+k\alpha+\alpha^2)}{k\alpha}$ と $y = x$ の交点であることより，

その x 座標を x_{Q} とすると，$x_{\mathrm{Q}} = \dfrac{\alpha}{k}x_{\mathrm{Q}} + \dfrac{(k-\alpha)(k^2+k\alpha+\alpha^2)}{k\alpha}$ を満たす。

$\therefore \dfrac{k-\alpha}{k}x_{\mathrm{Q}} = \dfrac{(k-\alpha)(k^2+k\alpha+\alpha^2)}{k\alpha}$

これと $k \neq 0$，$k \neq \alpha$ より，$x_{\mathrm{Q}} = \dfrac{k^2+k\alpha+\alpha^2}{\alpha}$

よって，$\lim\limits_{\alpha \to k} x_{\mathrm{Q}} = \lim\limits_{\alpha \to k} \dfrac{k^2+k\alpha+\alpha^2}{\alpha} = 3k$

ゆえに，点 Q が近づいていく点の座標は，$(3k, 3k)$

解法 2

点 P は $xy=k^2$ の点 $\mathrm{A}(k,k)$ でない点だから，$\mathrm{P}\left(\alpha,\dfrac{k^2}{\alpha}\right)$ $(\alpha\neq k)$，

点 Q は $y=x$ 上の点だから，$\mathrm{Q}(X,X)$ とおくと，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PQ}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\begin{pmatrix}k-\alpha\\ k-\dfrac{k^2}{\alpha}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-\alpha\\ X-\dfrac{k^2}{\alpha}\end{pmatrix}\\&=(k-\alpha)(X-\alpha)+\left(k-\frac{k^2}{\alpha}\right)\left(X-\frac{k^2}{\alpha}\right)\\&=kX-k\alpha-\alpha X+\alpha^2+kX-\frac{k^3}{\alpha}-\frac{k^2}{\alpha}X+\frac{k^4}{\alpha^2}\\&=-\left(\alpha-2k+\frac{k^2}{\alpha}\right)X+\alpha^2-k\alpha-\frac{k^3}{\alpha}+\frac{k^4}{\alpha^2}\end{aligned}$$

より，

$$-\left(\alpha-2k+\frac{k^2}{\alpha}\right)X+\alpha^2-k\alpha-\frac{k^3}{\alpha}+\frac{k^4}{\alpha^2}=0$$

$$\therefore\left(\alpha-2k+\frac{k^2}{\alpha}\right)X=\alpha^2-k\alpha-\frac{k^3}{\alpha}+\frac{k^4}{\alpha^2}$$

両辺を α^2 倍すると，$\alpha\left(\alpha^2-2k\alpha+k^2\right)X=\alpha^4-k\alpha^3-k^3\alpha+k^4$

右辺 $=\alpha(\alpha-k)^2X$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\alpha^3(\alpha-k)-k^3(\alpha-k)\\&=(\alpha-k)\left(\alpha^3-k^3\right)\\&=(\alpha-k)^2\left(\alpha^2+\alpha k+k^2\right)\end{aligned}$$

より，

$$\alpha(\alpha-k)^2X=(\alpha-k)^2\left(\alpha^2+\alpha k+k^2\right)$$

$\alpha\neq k$，$\alpha\neq 0$ より，$X=\dfrac{\alpha^2+\alpha k+k^2}{\alpha}$

よって，$\displaystyle\lim_{\alpha\to k}X=\lim_{\alpha\to k}\frac{\alpha^2+\alpha k+k^2}{\alpha}=3k$

ゆえに，点 Q が近づいていく点の座標は，$(3k,3k)$