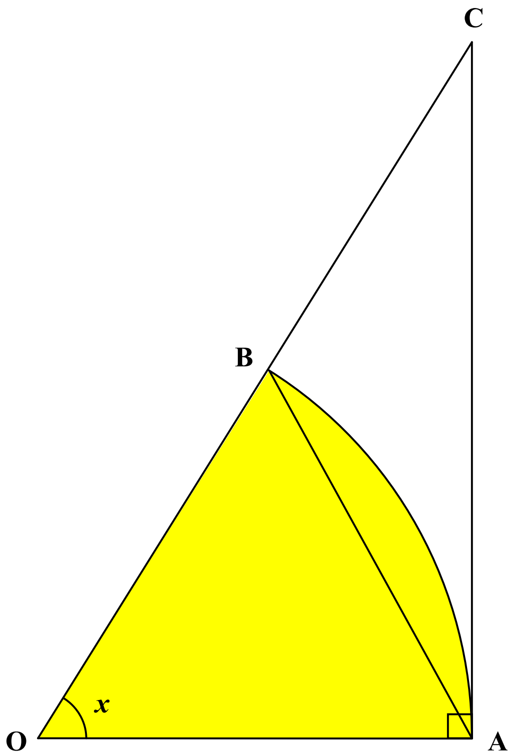
## 極限 5　三角関数と極限

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$について




$x\to 0$ だから，$x$ は 0rad 近傍の値で扱ってよい。

半径 1，中心角 $x$ の扇形 OAB の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\dfrac{x}{2}$

三角形 OAB の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x=\dfrac{\sin x}{2}$

三角形 OAC の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x=\dfrac{\tan x}{2}=\dfrac{\sin x}{2\cos x}$

これと三角形 OAB の面積$<$扇形 OAB の面積$<$三角形 OAC の面積より，

$\sin x<x<\dfrac{\sin x}{\cos x}$　　$\therefore 1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

$\sin x<x<\tan x$　　$\therefore \cos x<\dfrac{x}{\tan x}<1$

$\lim_{x\to 0}1=1$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$，$\lim_{x\to 0}\cos x=1$ とはさみうちの原理より，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

**249**

**(1)**

$x°$ をラジアンに直した値を $X$ とすると，$\dfrac{X}{x°}=\dfrac{\pi}{180°}$ より，$X=\dfrac{x\pi}{180}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x°}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\dfrac{x\pi}{180}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\dfrac{x\pi}{180}}{\dfrac{x\pi}{180}}\cdot\frac{1}{\dfrac{180}{\pi}}$$

$$=\frac{\pi}{180}\lim_{x\to 0}\frac{\tan\dfrac{x\pi}{180}}{\dfrac{x\pi}{180}}$$

$$=\frac{\pi}{180}$$

**(2)**

$x-\pi=t$ とおくと，$x\to\pi$ のとき $t\to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

**(3)**

$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ だから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to 0}t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\cos t}{-\sin t}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t$$

$$=-1\cdot 1$$

$$=-1$$

**(4)**

$x-1=t$ とおくと，$x\to 1$ のとき $t\to 0$ だから，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin \pi t}{t}$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t}\cdot\pi$$
$$=-\pi\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t}$$
$$=-\pi$$

**(5)**

$\sin x=t$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

**(6)**

$\dfrac{1}{2x}=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to 0$ だから，

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\sin t$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$
$$=\frac{1}{2}$$

**250**

**(1)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{9}{1+\cos 3x}$$
$$=1^2\cdot\frac{9}{1+1}$$
$$=\frac{9}{2}$$

**(2)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos^2 x}\cdot(1+\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)$$
$$=1\cdot 1^2\cdot 2$$
$$=2$$

**251**

**(1)**

$0\leq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1$ より， $0\leq x^2\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq x^2$ $\quad\therefore 0\leq\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|\leq x^2$

これと $\lim_{x\to 0}x^2=0$ より， $\lim_{x\to 0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

あるいは,

$-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq 1$ より， $-x^2\leq x^2\cos\frac{1}{x}\leq x^2$

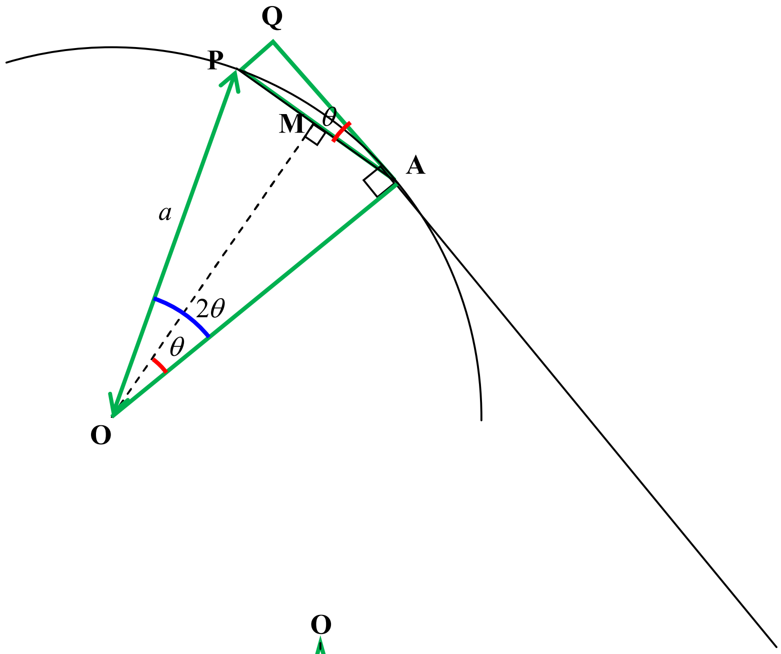
これと $\lim_{x\to 0}(-x^2)=\lim_{x\to 0}x^2=0$ より， $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

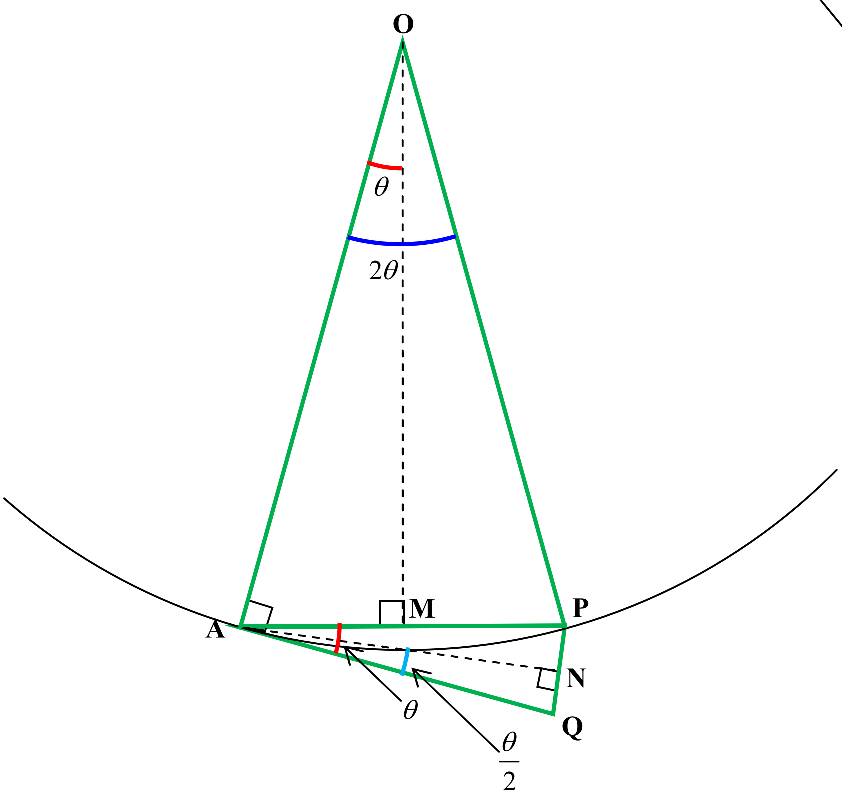
**(2)**

$0\leq|1+\sin x|\leq 2$ より， $0\leq\frac{|1+\sin x|}{|x|}\leq\frac{2}{|x|}$ $\quad\therefore 0\leq\left|\frac{1+\sin x}{x}\right|\leq\left|\frac{2}{x}\right|$

これと $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{2}{x}\right|=0$ より， $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1+\sin x}{x}\right|=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sin x}{x}=0$

**252**




重要

△OAP のように円の半径と弦を 3 辺とする二等辺三角形では,
二等辺三角形のまま扱うのではなく,
円の中心から弦の中点に補助線を引くことによりできる直角三角形で扱うのが鉄則。

弧 AP について

∠AOP＝2 $\theta$ とすると，弧 AP＝$2a\theta$　・・・①

二等辺三角形 OAP について

底辺 AP の中点を M とすると，二等辺三角形の性質より，∠AOM＝ $\theta$，AP＝2AM

よって，AP＝2OAsin $\theta$ ＝$2a\sin\theta$

二等辺三角形 APQ について

条件より，AQ⊥OA すなわち∠OAQ＝$\dfrac{\pi}{2}$ だから，

$$\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{OAQ}-\angle\mathrm{OAM}=\frac{\pi}{2}-(\angle\mathrm{OMA}-\angle\mathrm{AOM})=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$$

（あるいは，弧 AP の円周角＝$\dfrac{2\theta}{2}=\theta$ と接弦定理より，∠PAQ＝$\theta$）

よって，PQ の中点を N とすると，二等辺三角形の性質より，∠QAN＝$\dfrac{\theta}{2}$，PQ＝2QN

これと AQ＝AP＝$2a\sin\theta$ より，PQ＝2QN＝$2\mathrm{AQ}\sin\dfrac{\theta}{2}=4a\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$　・・・②

①，②より，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{4a\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{(2a\theta)^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{a\theta^2}=\frac{1}{2a}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2a}$

**253**

$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{a\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)+b}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{2at+\pi a+2b}{\sin t}$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\sin t=0$ だから，与式が収束するためには，$\displaystyle\lim_{t\to 0}(2at+\pi a+2b)=0$ であることが必要。

これと $\displaystyle\lim_{t\to 0}(2at+\pi a+2b)=\pi a+2b$ より，$\pi a+2b=0$　$\therefore b=-\dfrac{\pi}{2}\cdot a$

このとき，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{2at}{\sin t}$$

$$=-a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}$$

$$=-a$$

これと $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ より，$-a=\dfrac{1}{2}$　$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

よって，

$$b=-\frac{\pi a}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

以上より，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi}{4}$