

演習問題

34

(1)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2 &= \sum_{k=1}^{2n} (n+k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{n(n+1)(2n+1)} - 1 \\ &= \frac{2n(4n+1)}{n(n+1)} - 1 \\ &= \frac{2 \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2 \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} - 1 \right\} \\ &= 8 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} &= \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}
\end{aligned}$$

$$\text{より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

(3)

(ア)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n-1} a_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3n-1} \cdot (3n-1)a_n \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)a_n \\
&= 0 \cdot (-6) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(イ)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} na_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(na_n \cdot \frac{3n-1}{3n-1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{3n-1} \cdot (3n-1)a_n \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3-\frac{1}{n}} \cdot (3n-1)a_n \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)a_n \\
&= \frac{1}{3} \cdot (-6) \\
&= -2
\end{aligned}$$

(4)

 $|r| < 1$ より,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{\infty} r^k &= \sum_{i=1}^{\infty} r^n r^{i-1} \\
 &= r^n \sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} \\
 &= r^n \cdot \frac{1}{1-r} \\
 &= \frac{r^n}{1-r}
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} r^k \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r} \\
 &= \frac{1}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \\
 &= \frac{1}{1-r} \cdot \frac{r}{1-r} \\
 &= \frac{r}{(1-r)^2} \\
 &= \frac{r}{r^2 - 2r + 1}
 \end{aligned}$$

ここで, $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ より, $2r+1 = \sqrt{5}$ $2r+1 = \sqrt{5}$ の両辺を 2 乗し, 整理すると, $4(r^2 + r - 1) = 0$ より, $r^2 = -r + 1$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} r^k \right) &= \frac{r}{r^2 - 2r + 1} \\
 &= \frac{r}{(-r+1) - 2r + 1} \\
 &= \frac{r}{-3r + 2} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-3 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{7-3\sqrt{5}} \\
 &= 2 + \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

35

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{r^k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{r^k} \text{ とおくと,}$$

$$S_n = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \cdots + \frac{n-1}{r^{n-1}} + \frac{n}{r^n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{r} \cdot S_n = \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} \cdots + \frac{n-1}{r^n} + \frac{n}{r^{n+1}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②より,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r}\right) S_n &= \left\{ \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{r}\right)^n \right\} - \frac{n}{r^{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{r}} - \frac{n}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \cdot \frac{n}{r^{n+1}} \\ &= \frac{1}{r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n \right\} - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{n}{r^n} \\ &= \frac{r}{(r-1)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n \right\} - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{n}{r^n} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{r}{(r-1)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n \right\} - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{n}{r^n} \right] \\ &= \frac{r}{(r-1)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n \right\} - \frac{1}{r-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r^n} \\ &= \frac{r}{(r-1)^2} (1-0) - \frac{1}{r-1} \cdot 0 \quad (\because r > 1) \\ &= \frac{r}{(r-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{これと } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n} = 6 \text{ より, } \frac{r}{(r-1)^2} = 6 \quad \therefore \frac{6r^2 - 13r + 6}{(r-1)^2} = 0$$

$$\text{よって, } 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$6r^2 - 13r + 6 = (3r-2)(2r-3) \text{ だから, } (3r-2)(2r-3) = 0 \quad \therefore r = \frac{3}{2} \quad (\because r > 1)$$

36

(1)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-x+x^2} - 1 + x}{x} &= \frac{\sqrt{1-x+x^2} + (x-1)}{x} \\ &= \frac{\sqrt{1-x+x^2} + (x-1)}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x+x^2} - (x-1)}{\sqrt{1-x+x^2} - (x-1)} \\ &= \frac{1-x+x^2 - (x-1)^2}{x\{\sqrt{1-x+x^2} - (x-1)\}} \\ &= \frac{1-x+x^2 - (x^2 - 2x + 1)}{x\{\sqrt{1-x+x^2} - (x-1)\}} \\ &= \frac{x}{x\{\sqrt{1-x+x^2} - (x-1)\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x+x^2} - x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x+x^2} - 1 + x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x+x^2} - x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2)

 $x = -t$ とおくと,

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{4x^2 - 3x} &= -2t + \sqrt{4t^2 + 3t} \\ &= \frac{(\sqrt{4t^2 + 3t} - 2t)(\sqrt{4t^2 + 3t} + 2t)}{\sqrt{4t^2 + 3t} + 2t} \\ &= \frac{4t^2 + 3t - 4t^2}{\sqrt{4t^2 + 3t} + 2t} \\ &= \frac{3t}{\sqrt{4t^2 + 3t} + 2t} \\ &= \frac{3}{\sqrt{4 + \frac{3}{t}} + 2} \end{aligned}$$

また, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{4 + \frac{3}{t}} + 2} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{4} + 2} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 [10^x \pi] \leq 10^x \pi < [10^x \pi] + 1 \text{ より, } 10^x \pi - 1 < [10^x \pi] \leq 10^x \pi \\
 \therefore \frac{10^x \pi - 1}{10^x} < \frac{[10^x \pi]}{10^x} \leq \frac{10^x \pi}{10^x}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^x \pi - 1}{10^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{1}{10^x} \right) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^x \pi}{10^x} = \pi$$

および, はさみうちの原理より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[10^x \pi]}{10^x} = \pi$

(4)

$$(7^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} = \left[7^x \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} = 7 \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$ について,

$x \rightarrow \infty$ より, x は十分大きい値と見なしてよいから, $0 < \frac{1}{x} < 1$

$$\therefore \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^0 < \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} < \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\} = 1$$

および, はさみうちの原理より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (7^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 7 \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} = 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{7} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} = 7$$

(5)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 3x(1 - \cos 2x)}{\tan^3 x} &= \frac{\sin 3x \cdot 2 \sin^2 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}} \\
&= 2 \cdot \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \cos^3 x \\
&= 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos^3 x \\
&= 6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos^3 x \\
\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x(1 - \cos 2x)}{\tan^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos^3 x \right) \\
&= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x \\
&= 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

(6)

 $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -0$ のとき $t \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} &= \frac{\sqrt{1 - \cos(-t)}}{-t} \\
&= -\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t} \\
&= -\frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{t} \\
&= -\frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right|}{t} \\
&= -\frac{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}}{t} \quad (\because t \rightarrow +0 \Rightarrow t > 0) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \\
\therefore \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

37

$x=t^3$ とおくと, $x \rightarrow 8$ のとき $t \rightarrow 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 8} \frac{ax^2 + bx + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 + bt^3 + 8}{t - 2}$$

$$\text{よって, } \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 + bt^3 + 8}{t - 2} = 84$$

$\lim_{t \rightarrow 2} (t - 2) = 0$ だから, $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 + bt^3 + 8}{t - 2}$ が収束するためには,

$$\lim_{t \rightarrow 2} (at^6 + bt^3 + 8) = 64a + 8b + 8 = 8(8a + b + 1) = 0 \text{ であること,}$$

すなわち $b = -8a - 1 \quad \dots \textcircled{1}$ であることが必要

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 + bt^3 + 8}{t - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 - (8a + 1)t^3 + 8}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^3(t^3 - 8) - (t^3 - 8)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(at^3 - 1)(t - 2)(t^2 + 2t + 4)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} (at^3 - 1)(t^2 + 2t + 4) \\ &= (8a - 1) \cdot 12 \end{aligned}$$

$$\text{より, } 12(8a - 1) = 84 \quad \therefore a = 1$$

これと①より, $b = -9$

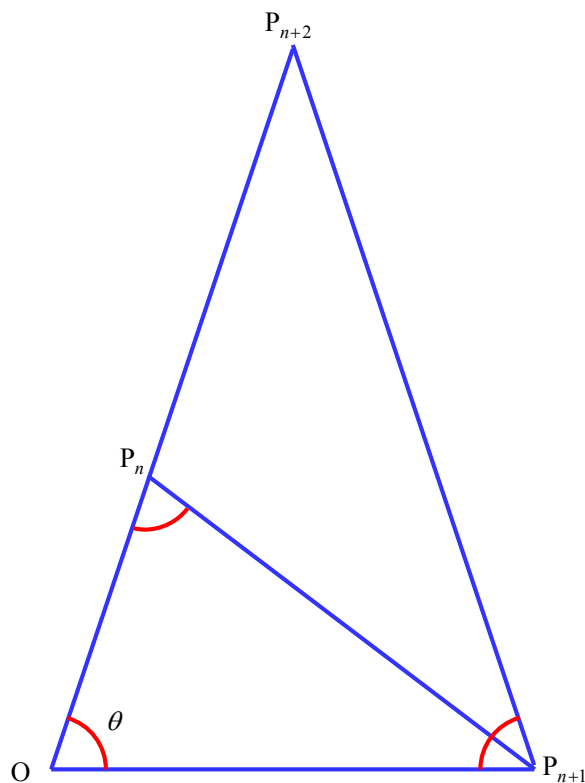
また, $a = 1, b = -9$ のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{at^6 + bt^3 + 8}{t - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^6 - 9t^3 + 8}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} (t^3 - 1)(t^2 + 2t + 4) \\ &= (2^3 - 1)(2^2 + 2 \cdot 2 + 4) \\ &= 7 \cdot 12 \\ &= 84 \end{aligned}$$

ゆえに, $a = 1, b = -9$

38

(1)



三角形 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ について、正弦定理より、 $\frac{P_{n+1} P_{n+2}}{\sin \angle P_{n+1} P_n P_{n+2}} = \frac{P_n P_{n+1}}{\sin \angle P_n P_{n+2} P_{n+1}}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{P_{n+1} P_{n+2}}{P_n P_{n+1}} &= \frac{\sin \angle P_{n+1} P_n P_{n+2}}{\sin \angle P_n P_{n+2} P_{n+1}} \\ &= \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\pi - 2\theta)} \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta} \end{aligned}$$

よって、数列 $\{P_n P_{n+1}\}$ は、初項 $P_1 P_2 = \frac{OP_1}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$ 、公比 $\frac{1}{2 \cos \theta}$ の等比数列をなす。

ゆえに、

$$\begin{aligned} P_n P_{n+1} &= \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \left(\frac{1}{2 \cos \theta} \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2 \cos \theta} \right)^n \end{aligned}$$

(2)

数列 $\{P_n P_{n+1}\}$ の公比 $\frac{1}{2\cos\theta}$ より, 収束条件は $0 < \left| \frac{1}{2\cos\theta} \right| < 1$

これと $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \frac{1}{2\cos\theta} < 1 \quad \therefore \cos\theta > \frac{1}{2}$

よって, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

このとき,

$$\begin{aligned} P_1 P_2 + P_2 P_3 + \cdots + P_n P_{n+1} + \cdots &= \frac{\frac{1}{2\cos\theta}}{1 - \frac{1}{2\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{2\cos\theta - 1} \end{aligned}$$

39

(1)

第一象限において、 $x=k$ のときの格子点の数は、 $1 \leq y \leq n-k$ より、 $n-k$

よって，第一象限の格子点の数は $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

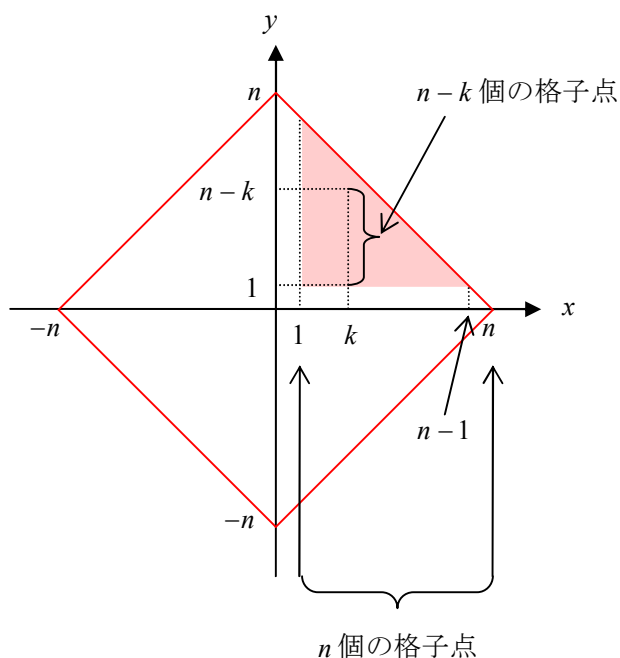
領域の対称性より，各象限の格子点の数が等しいから，

全象限の格子点の数は $4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2n^2 - 2n \quad \dots \textcircled{1}$

また、軸上の格子点の数は $4n + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$

①+②より, $a_n = 2n^2 + 2n + 1$

解説



原点を除く軸上の格子点の数は $4 \times n$ ，これに原点の 1 個を加えることにより，
軸上の格子点の数は $4n + 1$

(2)

$$\begin{aligned}b_n &= \sum_{k=0}^n (2k^2 + 2k + 1) \\&= \sum_{k=1}^n (2k^2 + 2k + 1) + 1 \\&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + n(n+1) + n + 1 \\&= \frac{1}{3}(n+1)(2n^2 + 4n + 3)\end{aligned}$$

(3)

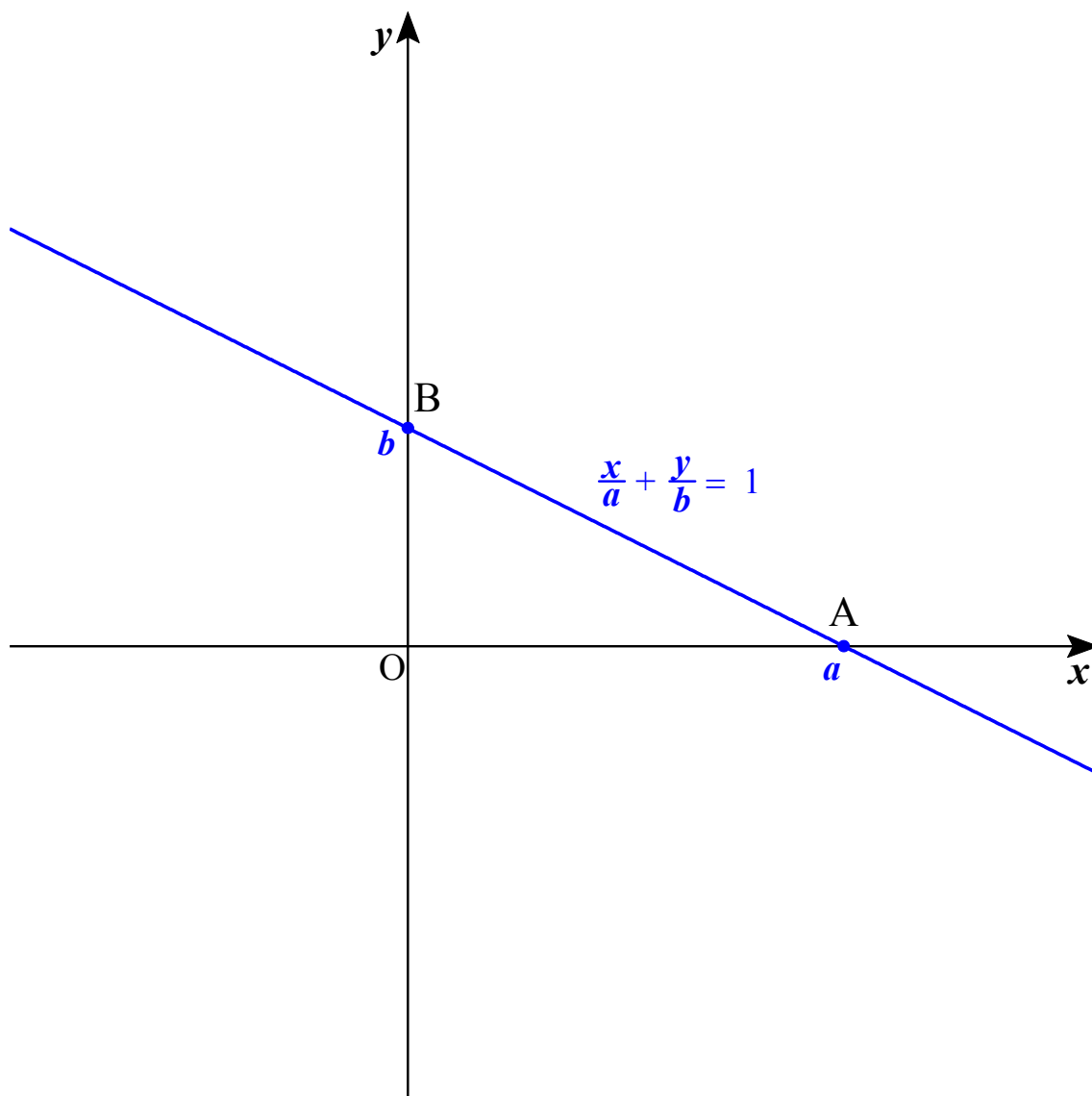
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^3} &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n^2 + 4n + 3}{n^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \\&= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

補足

切片と直線の方程式・平面の方程式

 x 切片を a , y 切片を b とする直線の方程式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

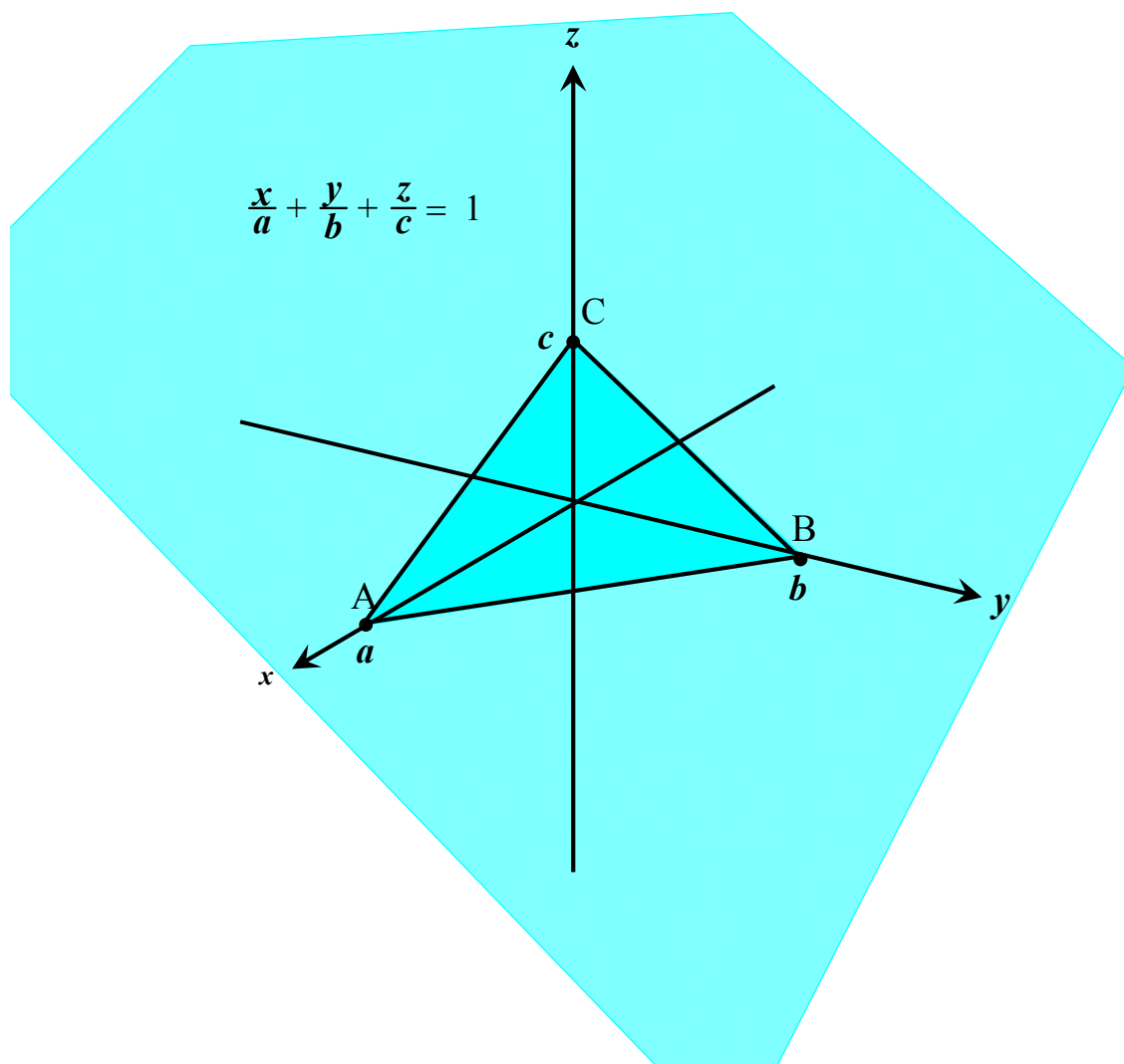


証明

$$A(a, 0), B(0, b) \text{ を通る直線の方程式は, } y = -\frac{b}{a}x + b \quad \therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

x 切片を a , y 切片を b , z 切片を c とする平面の方程式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$



証明

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ を通る平面の方程式を $px + qy + rz = s$ とすると,

$$pa = qb = rc = s \text{ より, } p = \frac{s}{a}, q = \frac{s}{b}, r = \frac{s}{c} \quad \therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

40

(1)

【1】

 $n=1$ のとき, 条件より, $0 < a_n < 4$ が成り立つ

【2】

 $n=k$ のとき, $0 < a_k < 4$ が成り立つと仮定すると,

$$0 < \sqrt{a_k} < 2 \text{ より, } 2 < 2 + \sqrt{a_k} < 4$$

$$\text{これと } a_{k+1} = 2 + \sqrt{a_k} \text{ より, } 2 < a_{k+1} < 4$$

$$\text{よって, } 0 < a_{k+1} < 4$$

これは $n=k$ のとき $0 < a_k < 4$ が成り立てば, $n=k+1$ のとき $0 < a_{k+1} < 4$ が成り立つことを示している。【1】, 【2】より, $n=1,2,3,\dots$ に対して, $0 < a_n < 4$ が成り立つ。

(2)

【1】 $n=1$ のとき

$$4 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} (4 - a_1) \text{ より, } 4 - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1) \text{ が成り立つ}$$

【2】 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 4 - a_n &= 4 - (2 + \sqrt{a_{n-1}}) \\ &= 2 - \sqrt{a_{n-1}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{a_{n-1}})(2 + \sqrt{a_{n-1}})}{2 + \sqrt{a_{n-1}}} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{a_{n-1}}} (4 - a_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } 0 < a_{n-1} < 4 \text{ より, } 0 < \sqrt{a_{n-1}} < 2 \Leftrightarrow 2 < 2 + \sqrt{a_{n-1}} < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2 + \sqrt{a_{n-1}}} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4 - a_n < \frac{1}{2} (4 - a_{n-1})$$

$$\text{ゆえに, } 4 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1)$$

【1】, 【2】より, $4 - a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1)$ (等号成立は $n=1$ のとき)

(3)

$$0 < a_n < 4 \text{ および } 4 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1) \text{ より, } 0 < 4 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1)$$

$$\text{これと } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (4 - a_1) \right\} = 0 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - a_n) = 0$$

$$\text{ゆえに, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

補足

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の収束値の候補

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\alpha \text{ は有限確定値}) \text{ とすると,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ だから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \sqrt{a_n}) \text{ より, } \alpha = 2 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha - 2 = \sqrt{\alpha}, \quad \alpha > 2$$

$$\text{よって, } (\alpha - 2)^2 = \alpha, \quad \alpha > 2$$

$$(\alpha - 2)^2 = \alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 4) = 0$$

$$\text{これと } \alpha > 2 \text{ より, } \alpha = 4$$

41

(1)

$|x| > 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{x^{2n-3}} + \frac{3}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{x + \frac{1}{x^{2n-1}}} = \frac{a}{x}$$

$x = 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1 + 3 + b}{1 + 1} = \frac{a + b + 2}{2}$$

$x = -1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a - 1 - 3 + b}{1 + 1} = \frac{-a + b - 4}{2}$$

$|x| < 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{2n-1} - x^2 + 3x + b}{x^{2n} + 1} = \frac{0 - x^2 + 3x + b}{0 + 1} = -x^2 + 3x + b$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a}{x} = a, \quad f(1) = \frac{a+b+2}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x^2 + 3x + b) = -1 + 3 + b = b + 2$$

より,

$$x=1 \text{ で } f(x) \text{ が連続であるためには } a = \frac{a+b+2}{2} = b+2 \text{ であることが,}$$

すなわち $a - b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$ であることが必要

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (-x^2 + 3x + b) = b - 4, \quad f(-1) = \frac{-a+b-4}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{a}{x} = -a$$

より,

$$x=-1 \text{ で } f(x) \text{ が連続であるためには } b - 4 = \frac{-a+b-4}{2} = -a \text{ であることが,}$$

すなわち $a + b = 4 \quad \dots \textcircled{2}$ であることが必要①かつ②を解くことにより, $a = 3, \quad b = 1$ 逆に, $a = 3, \quad b = 1$ とすると,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 1 & (|x| > 1) \\ 3 & (x = 1) \\ -3 & (x = -1) \\ \frac{3}{x} & (|x| < 1) \end{cases}$$

となり, すべての x について連続となる。ゆえに, $a = 3, \quad b = 1$

42

(1)

解法 1

直線 PQ の x 軸との交点, すなわち点 Q の座標が $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ だから,

直線 PQ と y 軸との交点, すなわち点 R の座標を $(r, 0)$ とすると,

直線 PQ の方程式は $\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{r} = 1$

これが点 $P(a, b)$ を通るから, $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{r} = 1$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{b}{r} &= 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \\ &= \frac{b^2}{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{よって, } r &= \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \end{aligned}$$

これと条件より $a > 0$, $b > 0$ だから, $OR = r = \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

解法 2

$P(a, b)$, $Q(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ を通るから,

直線 PQ の方程式は $y = \frac{b}{a - \sqrt{a^2 + b^2}}(x - \sqrt{a^2 + b^2})$

点 R の座標を $(r, 0)$ とすると,

$$\begin{aligned} r &= \frac{b}{a - \sqrt{a^2 + b^2}}(0 - \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \end{aligned}$$

以下, 解法 1 と同じ

(2)

 $b = \sin^2 a$ より,

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow +0} \frac{b}{a^2} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin^2 a}{a^2} \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\sin a}{a} \right)^2 \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin a}{a} \cdot \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin a}{a} \\
 &= 1 \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(3)

解法 1

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a^2}{b} + b + \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{a^2}{a^2}} + b + \frac{a}{b} \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)} \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{a^2}{a^2}} + b + \frac{a^2}{b} \sqrt{1 + b \left(\frac{b}{a^2} \right)} \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{a^2}{a^2}} + b + \frac{1}{\frac{a^2}{b}} \sqrt{1 + b \left(\frac{b}{a^2} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

ここで, $a \rightarrow +0$ のとき $b \rightarrow +0$, $\frac{b}{a^2} \rightarrow 1$ だから,

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow +0} r &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \\
 &= \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{1} \sqrt{1 + 0 \cdot 1} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

よって, 点 R は $(0, 2)$ に近づく

解法 2

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow +0} r &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a^2}{b} + b + \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right)\end{aligned}$$

ここで,

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2}{b} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{b}{a^2}} = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} b = \lim_{a \rightarrow +0} \sin^2 a = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a\sqrt{a^2 + \sin^4 a}}{\sin^2 a} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\sin a} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 a} + \sin^2 a} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\sin a} \lim_{a \rightarrow +0} \sqrt{\left(\frac{a}{\sin a}\right)^2 + \sin^2 a} \\ &= 1 \cdot \sqrt{1^2 + 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2}{b} + \lim_{a \rightarrow +0} b + \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \\ &= 1 + 0 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

ゆえに, 点 R は (0,2) に近づく