微分法 1　微分係数と導関数
微分法 2　導関数の計算

272

ポイント

　微分法の公式を利用

(1)

$$
\begin{aligned}
y' &= \{(x+2)(x-1)(x-5)\}' \\
&= (x+2)'(x-1)(x-5)+(x+2)(x-1)'(x-5)+(x+2)(x-1)(x-5)' \\
&= (x-1)(x-5)+(x+2)(x-5)+(x+2)(x-1) \\
&= 3x^2-8x-7
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
y' &= \{(x+2)(x-1)(x-5)\}' \\
&= [\{(x-1)+3\}(x-1)\{(x-1)-4\}]' \\
&= [(x-1)\{(x-1)+3\}\{(x-1)-4\}]' \\
&= \left[(x-1)\left\{(x-1)^2-(x-1)-12\right\}\right]' \\
&= \left\{(x-1)^3-(x-1)^2-12(x-1)\right\}' \\
&= 3(x-1)^2-2(x-1)-12 \\
&= 3x^2-8x-7
\end{aligned}
$$

　など

(2)

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{\left(x^3-x\right)\left(x^2+1\right)(x-1)\right\}' \\
&= \left\{x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)(x-1)\right\}' \\
&= \left\{\left(x^4-1\right)\left(x^2-x\right)\right\}' \\
&= \left(x^6-x^5-x^2+x\right)' \\
&= 6x^5-5x^4-2x+1
\end{aligned}
$$

　など

273

ポイント

微分法の公式を利用

(1)

$$y' = \frac{x'\left(1+x^3\right)^2 - x\left\{\left(1+x^3\right)^2\right\}'}{\left\{\left(1+x^3\right)^2\right\}^2}$$

$$= \frac{\left(1+x^3\right)^2 - x\left(1+x^3\right)' \cdot 2\left(1+x^3\right)}{\left(1+x^3\right)^4}$$

$$= \frac{\left(1+x^3\right)^2 - x \cdot 3x^2 \cdot 2\left(1+x^3\right)}{\left(1+x^3\right)^4}$$

$$= \frac{\left(1+x^3\right) - 6x^3}{\left(1+x^3\right)^3}$$

$$= \frac{1-5x^3}{\left(1+x^3\right)^3}$$

$$y' = \left\{x\left(1+x^3\right)^{-2}\right\}'$$

$$= x'\left(1+x^3\right)^{-2} + x\left\{\left(1+x^3\right)^{-2}\right\}'$$

$$= \left(1+x^3\right)^{-2} + x \cdot 3x^2 \cdot \left\{-2\left(1+x^3\right)^{-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{\left(1+x^3\right)^2} - \frac{6x^3}{\left(1+x^3\right)^3}$$

$$= \frac{1+x^3}{\left(1+x^3\right)^3} - \frac{6x^3}{\left(1+x^3\right)^3}$$

$$= \frac{1-5x^3}{\left(1+x^3\right)^3}$$

など

(2)

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{4}}}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)' \\
&= \left(x^{-\frac{5}{4}}\right)' \\
&= -\frac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}} \\
&= -\frac{5}{4}x^{-2-\frac{1}{4}} \\
&= -\frac{5}{4}x^{-2} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \\
&= -\frac{5}{4}\left(x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{-1} \\
&= -\frac{5}{4}\left(x^2\sqrt[4]{x}\right)^{-1} \\
&= -\frac{5}{4x^2\sqrt[4]{x}}
\end{aligned}
$$

など

(3)

$$y'=\left(x\sqrt{x^2+2}\right)'$$
$$=x'\sqrt{x^2+2}+x\left(\sqrt{x^2+2}\right)'$$
$$=\sqrt{x^2+2}+x\left\{\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$=\sqrt{x^2+2}+x\cdot\left(x^2\right)'\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{x^2+2}+x\cdot 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\frac{2\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2}}$$

など

(4)

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$
$$=\left\{\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}'$$
$$=\left\{x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$=x'\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left(1-x^2\right)'\left\{-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

など

274

(1)

左辺を x で微分すると,

$$\frac{dx}{dx}=1$$

右辺を x で微分すると,

$$\frac{d(y^2-2y)}{dx}=\frac{d(y^2-2y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=2(y-1)\cdot\frac{dy}{dx}$$

よって, $1=2(y-1)\cdot\frac{dy}{dx}$ $\quad\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-1)}$

ここで, $x=y^2-2y$ より, $(y-1)^2=x+1$ $\quad\therefore y-1=\pm\sqrt{x+1}$

ゆえに, $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

など

(2)

左辺を x で微分すると,

$$\frac{dx}{dx}=1$$

右辺を x で微分すると,

$$\frac{d(y^2+y+1)}{dx}=\frac{d(y^2+y+1)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=(2y+1)\cdot\frac{dy}{dx}$$

よって, $1=(2y+1)\cdot\frac{dy}{dx}$ $\quad\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+1}$

ここで $x=y^2+y+1$ より, $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x-\frac{3}{4}$ $\quad\therefore(2y+1)^2=4x-3$ $\quad\therefore 2y+1=\pm\sqrt{4x-3}$

ゆえに, $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$

など

275

$y=f^{-1}(x)$ の x と y の対応関係は，$x \underset{f}{\overset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} y$ だから，$x=f(y)$

これと $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ より，$x=\dfrac{1}{y^3+1}$ $\quad\therefore x\left(y^3+1\right)=1$ ・・・①

右辺を x で微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{x\left(y^3+1\right)\right\}&=\frac{dx}{dx}\left(y^3+1\right)+x\cdot\frac{d\left(y^3+1\right)}{dx}\\
&=y^3+1+x\frac{d\left(y^3+1\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\\
&=y^3+1+3xy^2\cdot\frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

左辺を x で微分すると 0 だから，

$$y^3+1+3xy^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y=f^{-1}(x)$ の導関数は $\left\{f^{-1}(x)\right\}'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^3+1}{3xy^2}\left(=-\dfrac{y^3+1}{\dfrac{3y^2}{y^3+1}}=-\dfrac{\left(y^3+1\right)^2}{3y^2}\right)$

①より，$x=\dfrac{1}{9}$ のとき，$y^3=8$ $\quad\therefore y=2$

ゆえに，$f^{-1}(x)$ の $x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数は $\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{9}\right)\right\}'=-\dfrac{2^3+1}{3\cdot\dfrac{1}{9}\cdot2^2}=-\dfrac{27}{4}$

解説

逆関数の導関数

はじめに

関数 f の逆関数を f^{-1} とする。

関数 $y=f(x)$

$$x \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad y$$

よって，関数 $y=f(x)$ の x と y の関係は，$\begin{cases} y=f(x) \\ x=f^{-1}(y) \end{cases}$

関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$

$$x \quad \underset{f}{\overset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad y$$

よって，関数 $y=f^{-1}(x)$ の x と y の関係は，$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x=f(y) \end{cases}$

また，問題文で，

「$y=f(x)$ の逆関数」とあれば「$y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする」で，

「$y=f^{-1}(x)$ の逆関数」とあれば「$y=f^{-1}(x)$ の逆関数を $y=f(x)$ とする」で

始めればよい。

逆関数の 1 次導関数

関数 $y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とすると，$x=f(y)$ である。

この両辺を x で微分すると，

$$1=\frac{df(y)}{dx}$$

$$1=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}$$

よって，

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

逆関数の 2 次導関数

逆関数の 1 次導関数 $\left\{f^{-1}(x)\right\}'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$$
$$=\frac{d\left(\dfrac{1}{f'(y)}\right)}{dx}$$
$$=\frac{d\left(\dfrac{1}{f'(y)}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}$$
$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

よって，

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

例題 1

$y=\cos x\ (\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

富山医科薬科大学（現　富山大学医学部）

解

$y=f(x)=\cos x\ (\pi<x<2\pi)$ とすると，逆関数は $y=g(x)=f^{-1}(x)\ (\pi<y<2\pi)$ だから，

補足： $y=f(x)$ の定義域は $y=f^{-1}(x)$ では値域になることに注意

$x=f(y)\ (\pi<y<2\pi)$　$\therefore x=\cos y\ (\pi<y<2\pi)$

この両辺を x で微分すると，$1=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d\cos y}{dy}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\cos y}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}$$

また，$\sin y<0$（$\because \pi<y<2\pi$）より，$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ゆえに，$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

例題 2

関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

$f(1)=2$， $f'(1)=2$， $f''(1)=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $g'(2)$ の値を求めよ。

(2) $g''(2)$ の値を求めよ。

（防衛医科大学校）

略解

(1)

$y=f(x)$ の逆関数は $x=f(y)$ と表せるから，

この両辺を x で微分することにより， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ が得られる。

よって， $y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ の第 1 次導関数は， $g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

また， $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称だから，

$f(1)=2 \Leftrightarrow g(2)=1$ より， $y=g(x)$ において， $x=2$ のとき $y=1$

よって， $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ より， $g''(x)=-\dfrac{f'(y)}{\{f'(y)\}^3}$

また， $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称だから，

$f(1)=2 \Leftrightarrow g(2)=1$ より， $y=g(x)$ において， $x=2$ のとき $y=1$

$g''(2)=-\dfrac{f'(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$

276

ポイント

微分係数は傾きの極限値

(1)

2 点 $(c, f(c))$ と $(c+3h, f(c+3h))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{f(c+3h)-f(c)}{(c+3h)-c}=\dfrac{f(c+3h)-f(c)}{3h}$

よって，$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+3h)-f(c)}{3h}$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{3\cdot\frac{f(c+3h)-f(c)}{3h}\right\}\\&=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{3h}\\&=3f'(c)\end{aligned}$$

(2)

2 点 $(c, f(c))$ と $(c+4h, f(c+4h))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{f(c+4h)-f(c)}{(c+4h)-c}=\dfrac{f(c+4h)-f(c)}{4h}$

$\therefore f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+4h)-f(c)}{4h}$ ・・・①

$(c, f(c))$ と $(c-2h, f(c-2h))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{f(c-2h)-f(c)}{(c-2h)-c}=\dfrac{f(c)-f(c-2h)}{2h}$

$\therefore f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c)-f(c-2h)}{2h}$ ・・・②

①，②より,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c-2h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{4\cdot\frac{f(c+4h)-f(c)}{4h}+2\cdot\frac{f(c)-f(c-2h)}{2h}\right\}\\&=4\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c)}{4h}+2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(c)-f(c-2h)}{2h}\\&=4f'(c)+2f'(c)\\&=6f'(c)\end{aligned}$$

(3)

2 点 $\left(c, f(c)\right)$ と $\left(c+h^2, f\left(c+h^2\right)\right)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{\left(c+h^2\right)-c}=\dfrac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{h^2}$

$\therefore f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{h^2}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{h\cdot\frac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{h^2}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}h\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f\left(c+h^2\right)-f(c)}{h^2}\\&=0\cdot f'(c)\\&=0\end{aligned}$$

(4)

2 点 $\left(c, f(c)\right)$ と $\left(x, f(x)\right)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$\therefore f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{c^2f(x)-x^2f(c)}{x-c}&=\lim_{x\to c}\frac{c^2\{f(x)-f(c)\}-f(c)\left(x^2-c^2\right)}{x-c}\\&=\lim_{x\to c}\left\{c^2\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f(c)(x+c)\right\}\\&=c^2\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f(c)\cdot\lim_{x\to c}(x+c)\\&=c^2f'(c)-2cf(c)\end{aligned}$$

277

解法 1

$f(x)=x^2$ （$x<1$） の導関数は $f'(x)=2x$ （$x<1$） $\therefore \lim_{x\to 1-0} f'(x)=\lim_{x\to 1-0} 2x=2$ ・・・①

$f(x)=2x-1$ （$x\geq 1$） の導関数は $f'(x)=2$ （$x\geq 1$） $\therefore \lim_{x\to 1+0} f'(x)=2$ ・・・②

①，②より， $\lim_{x\to 1} f'(x)=2$

よって、$x=1$ で微分可能である。

解法 2

$x=1$ における右側微分係数は

$$\lim_{h\to 1+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\lim_{h\to 1+0}\frac{\{2(1+h)-1\}-(2\cdot 1-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1+0} 2$$
$$=2$$

$x=1$ における左側微分係数は

$$\lim_{h\to 1-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\lim_{h\to 1-0}\frac{(1+h)^2-(2\cdot 1-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1-0}(h+2)$$
$$=2$$

よって， $\lim_{h\to 1}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=2$

ゆえに， $x=1$ で微分可能である。

278

(1)

連続性について

$0 \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ より，$0 \leq \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2$

これと $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ より，$\lim_{x\to 0}\left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| = 0$ $\therefore \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

よって，$x=0$ において連続

微分可能性について

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}$$

ここで，$0 \leq \left|\sin\frac{1}{h}\right| \leq 1$ より，$0 \leq \left|h\sin\frac{1}{h}\right| \leq |h|$

これと $\lim_{h\to 0}|h| = 0$ より，$\lim_{h\to 0}\left|h\sin\frac{1}{h}\right| = 0$ $\therefore \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$

よって，$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$

ゆえに，$x=0$ において微分可能

(2)

連続性について

$\frac{1}{x} = t$ とおくと，$x \to +0$ のとき $t \to \infty$ だから，

$$\lim_{x\to +0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\left(1+2^t\right)}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+2^t}$$
$$= 0$$

$\frac{1}{x} = -u$ とおくと，$x \to -0$ のとき $u \to \infty$ だから，

$$\lim_{x\to -0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{-u\left(1+2^{-u}\right)}$$
$$= -\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\cdot\lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+2^{-u}}$$
$$= 0$$

よって，$x=0$ において連続

微分可能性について

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{h}{1+2^{\frac{1}{h}}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}}$$

$$=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{h}{1+2^{\frac{1}{h}}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}}$$

ここで，$\dfrac{1}{h}=-v$ とおくと，$h\to-0$ のとき $v\to\infty$ だから，$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}}=\lim_{v\to\infty}\frac{1}{1+2^{-v}}=1$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない。すなわち $x=0$ において微分不可能

解説

合成関数・媒介変数で表された関数・陰関数の微分

はじめに

微分可能な関数 $y=f(x)$ 上の任意の 2 点を $\mathrm{P}(x, f(x))$，$\mathrm{Q}(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ とすると，

点 P から点 Q に変化するときの変化の割合は線分 PQ の傾きで与えられ，

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ となる。

さらに，分子の $f(x+\Delta x)-f(x)$ は x の変化が Δx のときの y の変化を表すから，

これを Δy で表すと，点 P から点 Q に変化するときの変化の割合は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる。

また， $\Delta x \to 0$ のときの，つまり点 Q を点 P に無限に近づけていったときの変化率は，

点 P における変化率と等しくなり， $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ で与えられる。

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が点 P から点 Q への平均変化率ならば，

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は点 P における瞬間変化率ということになる。

たとえると，

直線道路を移動中の車が Δy km 離れた 2 点 PQ 間を Δx 時間かけて走行したとすると，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は PQ 間の平均時速であり， $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は速度計（時速）の点 P における値である。

また， $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は， $\dfrac{dy}{dx}$ や $f'(x)$ とも表せるので，

$y=f(x)$ の瞬間変化率は， $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

A. 合成関数の微分

1. 合成関数 $y=g(h(i(x)))$ の場合

$i(x)$ の x に対する瞬間変化率 $=\dfrac{di(x)}{dx}$

$h(i(x))$ の $i(x)$ に対する瞬間変化率 $=\dfrac{dh(i(x))}{di(x)}$

$g(h(i(x)))$ の $h(i(x))$ に対する瞬間変化率 $=\dfrac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))}$

より，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{di(x)}{dx}\cdot\dfrac{dh(i(x))}{di(x)}\cdot\dfrac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))}$ が成り立つ。

また，

$i(x)=u$ ， $h(i(x))=v$ とすると，これと $g(h(i(x)))=y$ より，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{dv}{du}\cdot\dfrac{dy}{dv}$ と簡略表現できる。

$$x \xrightarrow{\text{瞬間変化率}\frac{di(x)}{dx}} i(x) \xrightarrow{\text{瞬間変化率}\frac{dh(i(x))}{di(x)}} h(i(x)) \xrightarrow{\text{瞬間変化率}\frac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))}} g(h(i(x)))=y$$

y

2. 合成関数の第 2 次導関数

少なくとも 2 階微分可能な関数 $y=f(g(x))$ について，簡単のため， $u=g(x)$ とおくと，

その第 2 次導関数は， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2+\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}$

解説

$y=f(g(x))$ の第 1 次導関数は， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dg(x)}{dx}\cdot\dfrac{df(g(x))}{dg(x)}=\dfrac{dg(x)}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dg(x)}$ であり，

簡単のため， $u=g(x)$ とおくと， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}$ となる。

$$x \xrightarrow[\text{瞬間変化率}\frac{dg(x)}{dx}]{} g(x) \xrightarrow[\text{瞬間変化率}\frac{df(g(x))}{dg(x)}]{} f(g(x))=y$$

よって，$y=f(g(x))$の第2次導関数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$は，$\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}$を$x$で微分することにより得られる。

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\frac{dy}{du}\right)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}\right)$$

$$=\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{dx}$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du}\right\}$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2y}{du^2}\right\}$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}$$

$$=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$

あるいは，

$$\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}\right)'=\left(\frac{du}{dx}\right)'\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{du}\right)'$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{dx}\right)$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du}\right)$$

$$=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2y}{du^2}\right)$$

$$=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$

よって，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$

B. 媒介変数で表された関数の微分

1. 第 1 次導関数

$(x, y) = (f(t), g(t))$ とすると,

x の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{df(t)}{dt} = f'(t)$

y の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dg(t)}{dt} = g'(t)$ より,

y の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{dy}{dx}$ は, 媒介変数 t を介することにより,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{\frac{df(t)}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

2. 第 2 次導関数

第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とは, $\dfrac{dy}{dx}$ の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ のことだから,

$\dfrac{dy}{dx}$ が媒介変数 t で表せることを利用することにより,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)'}{f'(t)}$$ となる。

補足

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ は, $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ を $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \to \dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx} \to \dfrac{d^2y}{(dx)^2} \to \dfrac{d^2y}{dx^2}$ による。

C. 陰関数の微分

y が x の関数であるとき，

$y=f(x)$ の形で表現した関数を陽関数， $f(x,y)=0$ の形で表現した関数を陰関数とよぶ。

y が x の関数でありかつ x で微分可能な陰関数を

$f(x,y)=0$，ただし $f(x,y)=g(x)+h(y)$ とすると，

y は x で微分可能だから，

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{d(g(x)+h(y))}{dx}$$
$$=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(y)}{dx}$$
$$=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}$$

よって，

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}=0$$

例題

$ax^2+by^2+c=0$ （a,b は 0 でない実数）の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

解

$$\frac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}=\frac{d(ax^2)}{dx}+\frac{d(by^2)}{dx}+0$$
$$=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d(by^2)}{dy}$$
$$=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot 2by$$
$$=2\left(ax+by\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

これと $\dfrac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}=0$ より，

$$ax+by\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}$$