微分法 3　いろいろな関数の導関数

281

(1)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin 3x)' \cdot 2\sin 3x \\
&= 3\cos 3x \cdot 2\sin 3x \\
&= 3 \cdot 2\sin 3x \cos 3x \\
&= 3\sin 6x
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin^5 x)' \cos 5x + \sin^5 x(\cos 5x)' \\
&= (\sin x)' \cdot 5\sin^4 x\cos 5x + \sin^5 x \cdot 5 \cdot (-\sin 5x) \\
&= \cos x \cdot 5\sin^4 x\cos 5x - 5\sin^5 x\sin 5x \\
&= 5\sin^4 x(\cos x\cos 5x - \sin x\sin 5x) \\
&= 5\sin^4 x\cos 6x
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin^4 x\cos^4 x)' \\
&= \left\{(\sin x\cos x)^4\right\}' \\
&= \left\{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4\right\}' \\
&= \frac{1}{16}(\sin^4 2x)' \\
&= \frac{1}{16}(\sin 2x)' 4\sin^3 2x \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2\cos 2x\sin^3 2x \\
&= \frac{1}{2}\cos 2x\sin^3 2x \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x)\sin^2 2x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 4x\sin^2 2x \\
&= \frac{1}{4}\sin 4x\sin^2 2x
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(1+\sin^2 x\right)' \cdot \frac{1}{2}\left(1+\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\sin x\cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \\
&= \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{\sin\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\
&= \left\{\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}' \cos\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(x^2+x+1\right)' \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\sqrt{x^2+x+1} \\
&= \frac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}
\end{aligned}
$$

(6)

$\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{\tan x}\left(\tan^2 x+1\right) = \dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$ より，

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2\right\}' \\
&= \left(\frac{4}{\sin^2 2x}\right)' \\
&= \frac{-4\left(\sin^2 2x\right)'}{\sin^4 2x} \\
&= \frac{-4\cdot(\sin 2x)' \, 2\sin 2x}{\sin^4 x} \\
&= \frac{-4\cdot 2\cos 2x\cdot 2\sin 2x}{\sin^4 2x} \\
&= -\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}
\end{aligned}
$$

(7)

$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ より，

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)' \\
&= \frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1}{1-\sin x}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\right)' \\
&= \frac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{-\cos x(1+\cos x)+(1-\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x-\cos x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

282

(1)

$\sin(x+a)\cos(x-a)=\dfrac{1}{2}[\sin\{(x+a)+(x-a)\}+\sin\{(x+a)-(x-a)\}]=\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2a)$ より，

$$
y'=\left\{\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2a)\right\}'=\cos 2x
$$

(2)

$$y'=\left\{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$=\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)'\cdot\frac{1}{2}\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(-a^2\sin x\cos x+b^2\sin x\cos x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$$

$$=\frac{\left(b^2-a^2\right)\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$$

283

(1)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\right\}$$

ここで,

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ について

$f(x)=\sin x$ とおくと,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

これと $f'(x)=\cos x$ より, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}$ について

$x-a=t$ とおくと, $x\to a$ のとき $t\to 0$ だから,

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

よって,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}$$

$$=\cos a\cdot 1$$

$$=\cos a$$

(2)

解法 **1**

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin a\left(x^2-a^2\right)-a^2(\sin x-\sin a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{\sin a\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}-a^2\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right\}$$

ここで,

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ について

$f(x)=x^2$ とおくと, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

これと $f'(x)=2x$ より, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ について

$f(x)=\sin x$ とおくと,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

これと $f'(x)=\cos x$ より, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$

よって,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}=\sin a\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}-a^2\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$
$$=2a\sin a-a^2\cos a$$

解法 **2**

$f(x)=x^2\sin a-a^2\sin x$ とおくと, $f(a)=0$ より,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)$$

これと $f'(x)=2x\sin a-a^2\cos x$ より, $f'(a)=2a\sin a-a^2\cos a$

よって,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}=2a\sin a-a^2\cos a$$

284

(1)

$$y' = \left(e^{-2x}\right)' \sin 2x + e^{-2x}\left(\sin 2x\right)'$$
$$= -2e^{-2x}\sin 2x + e^{-2x}\cdot 2\cos 2x$$
$$= 2e^{-2x}\left(\cos 2x - \sin 2x\right)$$

(2)

解法 1：$q = e^{\log q}$ を利用

$10^{\sin x} = e^{\log 10^{\sin x}} = e^{\sin x \log 10}$ より，

$$y' = \left(e^{\sin x \log 10}\right)'$$
$$= \left(\sin x \log 10\right)' e^{\sin x \log 10}$$
$$= \cos x \log 10 \cdot 10^{\sin x}$$
$$= 10^{\sin x}\cos x \log 10$$

補足：$10^{\sin x} = e^{\log 10^{\sin x}} = e^{\sin x \log 10}$ について

$p = \log q \Leftrightarrow q = e^{p}$

これと $p = \log q$ より， $q = e^{\log q}$

q に $10^{\sin x}$ を代入すると， $10^{\sin x} = e^{\log 10^{\sin x}} = e^{\sin x \log 10}$

補足の補足

$p = \log_a q \Leftrightarrow q = a^{p}$

これと $p = \log_a q$ より， $q = a^{\log_a q}$

q を $q = e^{\log q}$ や $q = a^{\log_a q}$ とするテクニックは積分の計算を楽にする上で重要であるから，覚えておくべきである。

解法 2：対数微分法

両辺の自然対数をとると， $\log|y| = \sin x \log 10$

両辺を x で微分すると， $\dfrac{d\log|y|}{dx} = \dfrac{d\sin x}{dx}\cdot\log 10$

ここで左辺 $= \dfrac{d\log|y|}{dx} = \dfrac{d\log|y|}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$， 右辺 $= \dfrac{d\sin x}{dx}\cdot\log 10 = \cos x\log 10$ より，

$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \cos x \log 10 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = y\cos x\log 10$

これと $y = 10^{\sin x}$ より， $\dfrac{dy}{dx} = 10^{\sin x}\cos x\log 10$

解法 3：公式$\left(a^x\right)' = a^x \log a$を利用

$$\left(10^{\sin x}\right)' = (\sin x)' 10^{\sin x} \log 10 = 10^{\sin x} \cos x \log 10$$

(3)

$$y' = \left(\frac{\log a}{\log x}\right)'$$
$$= \frac{-\log a(\log x)'}{(\log x)^2}$$
$$= -\frac{\log a}{x(\log x)^2}$$

(4)

$$y' = \{\log(\log x)\}'$$
$$= \frac{(\log x)'}{\log x}$$
$$= \frac{1}{x\log x}$$

(5)

$$y' = \left\{\frac{\log(\sin x)}{\log a}\right\}'$$
$$= \frac{\frac{(\sin x)'}{\sin x}}{\log a}$$
$$= \frac{\cos x}{(\log a)\sin x}$$

(6)

$$y' = \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}$$
$$= \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

(7)

$$y'=\left\{\frac{\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\log a}\right\}'=\frac{\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}}{\log a}$$

$$=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\log a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}$$

(8)

$$y'=\left\{\log\frac{x^2-b}{x^2+b}\right\}'$$

$$=\left\{\log\left(x^2-b\right)-\log\left(x^2+b\right)\right\}'$$

$$=\frac{\left(x^2-b\right)'}{x^2-b}-\frac{\left(x^2+b\right)'}{x^2+b}$$

$$=\frac{2x}{x^2-b}-\frac{2x}{x^2+b}$$

$$=\frac{2x\left\{\left(x^2+b\right)-\left(x^2-b\right)\right\}}{\left(x^2-b\right)\left(x^2+b\right)}$$

$$=\frac{4bx}{\left(x^2-b\right)\left(x^2+b\right)}$$

285

(1)

$$\log|y|=2\log|x+1|-3\log|x+2|-4\log|x+3|$$

$$\therefore\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}$$

ゆえに,

$$y'=y\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\cdot\frac{2(x+2)(x+3)-3(x+1)(x+3)-4(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=-\frac{(x+1)\left(5x^2+14x+5\right)}{(x+2)^4(x+3)^5}$$

(2)

$\log|y| = 3\log|1+x| + \log|1-2x| - \log|1-x| - 3\log|1+2x|$ より，

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x-1} - \frac{6}{2x+1}$$
$$= \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{6}{2x+1}$$
$$= \frac{2x-4}{x^2-1} + \frac{-8x+8}{4x^2-1}$$
$$= \frac{(2x-4)(4x^2-1)-(8x-8)(x^2-1)}{(x^2-1)(4x^2-1)}$$
$$= -\frac{2(4x^2-3x+2)}{(x^2-1)(4x^2-1)}$$

よって，

$$y' = \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}\left\{-\frac{2(4x^2-3x+2)}{(x^2-1)(4x^2-1)}\right\}$$
$$= -\frac{2(x+1)^2(4x^2-3x+2)}{(x-1)^2(2x+1)^4}$$

(3)

$\log|y| = \dfrac{1}{4}\left(\log|x+1| + \log\left|x^2+2\right|\right)$ より，

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2}\right)$$
$$= \frac{3x^2+2x+2}{4(x+1)(x^2+2)}$$

よって，

$$y' = \sqrt[4]{(x+1)(x^2+2)} \cdot \frac{3x^2+2x+2}{4(x+1)(x^2+2)}$$
$$= \frac{3x^2+2x+2}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4(x^2+2)^4}}$$
$$= \frac{3x^2+2x+2}{4\sqrt[4]{(x+1)^3(x^2+2)^3}}$$

(4)

$\log|y| = \log|x| - \frac{3}{2}\log\left|x^2 + a^2\right|$ より，

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + a^2}$$
$$= \frac{a^2 - 2x^2}{x\left(x^2 + a^2\right)}$$

よって，

$$y' = \frac{x}{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)^3}} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{x\left(x^2 + a^2\right)}$$
$$= \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)^5}}$$

286

(1)

条件より $x > 0$ だから $y > 0$，したがって，両辺の自然対数をとると，$\log y = \sin x \log x$

$$\therefore \frac{y'}{y} = (\sin x)' \log x + \sin x(\log x)'$$
$$= \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$$

よって，$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right)$

(2)

条件より $x > 0$ だから $y > 0$，したがって，両辺の自然対数をとると，$\log y = e^x \log x$

$$\frac{y'}{y} = \left(e^x\right)' \log x + e^x(\log x)'$$
$$= e^x \log x + \frac{e^x}{x}$$
$$= e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$$

よって，$y' = x^{e^x} e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$

(3)

条件より $x>0$ だから $y>0$,

したがって，両辺の自然対数をとると， $\log y=\log x\cdot\log x=(\log x)^2$

$$\frac{y'}{y}=2(\log x)'\log x$$
$$=\frac{2\log x}{x}$$

よって，

$$y'=x^{\log x}\cdot\frac{2\log x}{x}$$
$$=2x^{\log x-1}\log x$$

(4)

条件より $x>0$ だから $y>0$， したがって，両辺の自然対数をとると， $\log y=\dfrac{\log x}{x}$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot x'}{x^2}$$
$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

よって，

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\log x}{x^2}$$
$$=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

(5)

条件より $\sin x>0$ だから $y>0$，したがって，両辺の自然対数をとると，$\log y=x\log(\sin x)$

$$\frac{y'}{y}=x'\log(\sin x)+x(\log\sin x)'$$
$$=\log(\sin x)+\frac{x\cos x}{\sin x}$$

よって， $y'=(\sin x)^x\left\{\log(\sin x)+\dfrac{x\cos x}{\sin x}\right\}$

(6)

条件より $\log x>0$ だから $y>0$，したがって，両辺の自然対数をとると，$\log y=x\log(\log x)$

$$\frac{y'}{y}=x'\log(\log x)+x\{\log(\log x)\}'$$

$$=\log(\log x)+x\cdot\frac{(\log x)'}{\log x}$$

$$=\log(\log x)+\frac{1}{\log x}$$

よって，$y'=(\log x)^x\left\{\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right\}$

287

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log e$$

$$=1$$

補足

$x\to 0$ だから，$|x|<<1$ の場合を扱う。したがって，$1+x>0$

よって，$\log|1+x|$ とする必要がない。

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{1}{e}$$

(3)

$2x=t$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ だから，

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$$

$$=e^2$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}^x$$

ここで，$t=-\dfrac{2}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to-0$ だから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x&=\lim_{t\to-0}\{1+t\}^{-\frac{2}{t}}\\&=\lim_{t\to-0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}\\&=e^{-2}\\&=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{h\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$$

これらは以下に示すように相互変換できる。

$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\frac{1}{x}=t$ とおく

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

自然対数をとる

$$\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\log(1+x)=u$ とおくと，

$1+x=e^{u}$ より，

$x=e^{u}-1$ だから

$$\lim_{u\to o}\frac{u}{e^{u}-1}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ から始める場合

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$\downarrow$ $e^x - 1 = t$ とおく

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

よって,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

また,

$$\text{右辺} = \lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

左辺 $= 1 = \log e$ より,

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$\downarrow$ $\frac{1}{t} = u$ とおく

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

補足

指数関数 $y = f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ において,

e は次のように定義される。

$y = f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ のうち,

$x = 0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y = e^x$ とする。

よって,

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1$ より,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$