微分法 4　第 *n* 次導関数

290

(1)

$y=\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{x-(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ より，

$$y'=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)'$$
$$=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}$$

$$y''=\left\{-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}\right\}'$$
$$=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{x^3}$$

よって，

$$y'''=\left\{\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{x^3}\right\}'$$
$$=-\frac{6}{(x-1)^4}+\frac{6}{x^4}$$
$$=\frac{-6x^4+6(x-1)^4}{x^4(x-1)^4}$$
$$=\frac{6\left\{(x-1)^4-x^4\right\}}{x^4(x-1)^4}$$
$$=-\frac{6(2x-1)(2x^2-2x+1)}{x^4(x-1)^4}$$

(2)

$$y' = \left\{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$= (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \left\{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$= -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

よって,

$$y''' = \left\{-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\right\}'$$
$$= 3(2x+1)^{-\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$$

(3)

$$y' = -3\sin x\cos^2 x$$
$$y'' = -3\cos^3 x + 6\sin^2 x\cos x$$
$$= -3\cos^3 x + 6(1-\cos^2 x)\cos x$$
$$= 6\cos x - 9\cos^3 x$$

よって,

$$y''' = (6\cos x - 9\cos^3 x)'$$
$$= -6\sin x + 27\sin x\cos^2 x$$

補足

sin*x*，cos*x* の *n* 次導関数

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

解説

$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ について

$$\sin' x=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin'' x=\cos' x=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\sin''' x=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(4)}x=(-\cos x)'=\sin x=\sin\left(x+\frac{4\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

あるいは，$k=0,1,2,\cdots$ とすると，

$n=4k$ のとき

$\sin^{(n)}x=\sin x$

$n=4k+1$ のとき

$\sin^{(n)}x=\cos x$

$n=4k+2$ のとき

$\sin^{(n)}x=-\sin x$

$n=4k+3$ のとき

$\sin^{(n)}x=-\cos x$

$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ について

$\cos' x = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\cos'' x = (-\sin x)' = -\cos x = \cos(x + \pi) = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$

$\cos''' x = (-\cos x)' = \sin x = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\sin^{(4)} x = \sin' x = \cos x = \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{2}\right)$

$\vdots$

$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

あるいは，$k = 0,1,2,\cdots$ とすると，

$n = 4k$ のとき

$\cos^{(n)} x = \cos x$

$n = 4k + 1$ のとき

$\cos^{(n)} x = -\sin x$

$n = 4k + 2$ のとき

$\cos^{(n)} x = -\cos x$

$n = 4k + 3$ のとき

$\cos^{(n)} x = \sin x$

291

(1)

$$y' = \left\{\left(x^2 + x^4\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$= \frac{\left(x^2 + x^4\right)'}{2}\left(x^2 + x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(x + 2x^3\right)\left(x^2 + x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= x\left(1 + 2x^2\right)\left\{x^2\left(1 + x^2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$= -$

$$y'' = \left\{\left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$= 4x\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + 2x^2\right)\cdot\left\{-\frac{\left(1 + x^2\right)'}{2}\left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= 4x\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x\left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

よって,

$$\left(1 + x^2\right)y'' + xy' = \left(1 + x^2\right)\left\{4x\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x\left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right\} + x\left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 4x\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\left(1 + 2x^2\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x + 2x^3\right)\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 4x\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 4x\sqrt{1 + x^2}$$
$$= 4y$$

(2)

$$y' = \{e^{-2x}(a\cos 2x + b\sin 2x)\}'$$
$$= -2e^{-2x}(a\cos 2x + b\sin 2x) + e^{-2x}(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x)$$
$$= 2e^{-2x}\{(b-a)\cos 2x - (b+a)\sin 2x\}$$

$$y'' = [2e^{-2x}\{(b-a)\cos 2x - (b+a)\sin 2x\}]'$$
$$= -4e^{-2x}\{(b-a)\cos 2x - (b+a)\sin 2x\} + 2e^{-2x}\{-2(b-a)\sin 2x - 2(b+a)\cos 2x\}$$
$$= 8e^{-2x}(-b\cos 2x + a\sin 2x)$$

よって,

$$y'' + 4y' + 8y$$
$$= 8e^{-2x}(-b\cos 2x + a\sin 2x) + 8e^{-2x}\{(b-a)\cos 2x - (b+a)\sin 2x\} + 8e^{-2x}(a\cos 2x + b\sin 2x)$$
$$= 0$$

292

(1)

$f(x)$の最高次の項をax^n, $f(x)$の$n-1$次以下の整式の部分を$g(x)$とおくと,

$f(x) = ax^n + g(x)$と表せるから,

$f'(x) = anx^{n-1} + g'(x)$

$f''(x) = an(n-1)x^{n-2} + g''(x)$

これより,

$xf''(x)$の最高次の項は$an(n-1)x^{n-1}$

$(1-x)f'(x)$の最高次の項は$-anx^n$

$3f(x)$の最高次の項は$3ax^n$

よって,

$xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x)$の最高次の項は$a(3-n)x^n$

これと$xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x)$と 0 が$x$についての恒等式の関係であることから,

$a(3-n) = 0$

$a \neq 0$より, $n = 3$

ゆえに, $f(x)$に次数は 3

(2)

(1)の結果より, $g(x) = bx^2 + cx + d$ とおくと, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(0) = 1$だから, $d = 1$ $\quad \therefore f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

したがって,

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

よって，

$$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)=x(6ax+2b)+(1-x)(3ax^2+2bx+c)+3ax^3+3bx^2+3cx+3$$
$$=(9a+b)x^2+(4b+2c)x+c+3$$

$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)$ と 0 が x についての恒等式の関係であることから，

$9a+b=0$， $4b+2c=0$， $c+3=0$

これを解くことにより， $a=-\dfrac{1}{6}$， $b=\dfrac{3}{2}$， $c=-3$

ゆえに， $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$

293

(1)

【1】

$n=1$ のとき

左辺 $=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$， 右辺 $=\cos\left(x+\dfrac{1}{2}\pi\right)=-\sin x$ より，

$\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ が成り立つ

【2】

$n=k$ のとき $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ が成り立つと仮定すると， $\dfrac{d^k}{dx^k}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right)$

$n=k+1$ のとき

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\cos(k+1)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\cos x\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)$$
$$=-\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)$$
$$=\cos\left\{\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)+\frac{1}{2}\pi\right\}$$
$$=\cos\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)$$

よって， $n=k+1$ のときも $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ が成り立つ。

【1】，【2】より，すべての自然数 n について $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ が成り立つ。

(2)

【1】

$n=1$ のとき

左辺 $=\dfrac{d}{dx}\log x=\dfrac{1}{x}$, 右辺 $=(-1)^0\dfrac{0!}{x^1}=\dfrac{1}{x}$ より,

$\dfrac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ が成り立つ。

【2】

$n=k$ のとき $\dfrac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ が成り立つと仮定すると,

$\dfrac{d^k}{dx^k}\log x=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\log x&=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\log x\right)\\&=\frac{d}{dx}\left\{(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right\}\\&=(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{d}{dx}x^{-k}\\&=(-1)^{k-1}(k-1)!\left(-kx^{-k-1}\right)\\&=(-1)^k k!x^{-(k+1)}\\&=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $\dfrac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ が成り立つ。

【1】,【2】より,すべての自然数 n について $\dfrac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ が成り立つ。