微分法 5　関数のいろいろな表し方と導関数

296

(1)

左辺を x について微分すると，

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3xy-y^2\right)=\frac{dx^2}{dx}+3\frac{d}{dx}xy-\frac{dy^2}{dx}$$
$$=2x+3\left(y\frac{dx}{dx}+x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}$$
$$=2x+3y+3x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}$$
$$=2x+3y+(3x-2y)\frac{dy}{dx}$$

これと，右辺を x について微分すると 0 になることから，

$$2x+3y+(3x-2y)\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$3x-2y\neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$

(2)

左辺を x について微分すると，1

右辺を x について微分すると，

$$\frac{d\cos y}{dx}=\frac{d\cos y}{dy}\frac{dy}{dx}$$
$$=-\sin y\frac{dy}{dx}$$

これより，$-\sin y\dfrac{dy}{dx}=1$

よって，$\sin y\neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

(3)

ポイント

t の変化に対する x の変化の極限は $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$

t の変化に対する y の変化の極限は $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$

よって，x の変化に対する y の変化の極限 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ は t を介して $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ と表せる。

解

$x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ を t について微分すると，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$$
$$=\frac{2t\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)\cdot(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}$$
$$=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}$$

$y=\dfrac{2t}{1-t^2}$ を t について微分すると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$$
$$=\frac{2\left(1-t^2\right)-2t\cdot(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}$$
$$=\frac{2\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}$$

よって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{\dfrac{2\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}}{\dfrac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}}$$
$$=\frac{t^2+1}{2t}$$

(4)

$x=a\cos^3 t$ を t について微分すると，$\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t\cos^2 t$

$y=b\sin^3 t$ を t について微分すると，$\dfrac{dy}{dt}=b\cos t\sin^2 t$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b\cos t\sin^2 t}{a\sin t\cos^2 t}=-\dfrac{b}{a}\tan t$

297

x を t について微分すると， $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$

y を t について微分すると， $\dfrac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$$

ゆえに， $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{d\tan t}{dt}}{t\cos t} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 t}}{t\cos t} = \dfrac{1}{t\cos^3 t}$

解説

陰関数の微分

y が x の関数であるとき，

$y=f(x)$ の形で表現した関数を陽関数，　$f(x,y)=0$ の形で表現した関数を陰関数とよぶ。

y が x の関数であり且つ x で微分可能な陰関数を $f(x,y)=0$ （ただし $f(x,y)=g(x)+h(y)$）

とすると，

y は x で微分可能だから，

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{d(g(x)+h(y))}{dx}$$
$$=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(y)}{dx}$$
$$=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}$$

よって，

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}=0$$

例題

$ax^2+by^2+c=0$ （a,b は 0 でない実数）の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

解

$$\frac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}=\frac{d(ax^2)}{dx}+\frac{d(by^2)}{dx}+0$$
$$=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d(by^2)}{dy}$$
$$=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot 2by$$
$$=2\left(ax+by\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

これと $\dfrac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}=0$ より，

$$ax+by\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}$$

媒介変数で表された関数の微分

1．第 1 次導関数 $\dfrac{dy}{dx}$

$(x, y) = (f(t), g(t))$ とすると，

x の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{df(t)}{dt} = f'(t)$

y の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dg(t)}{dt} = g'(t)$ より，

y の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{dy}{dx}$ は，媒介変数 t を介することにより，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{\frac{df(t)}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$ となる。

2．第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とは，$\dfrac{dy}{dx}$ の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ のことである。

ここで，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ より，$\dfrac{dy}{dx}$ の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)'$

これと x の t に対する瞬間変化率＝ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{df(t)}{dt} = f'(t)$ より，

第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，すなわち $\dfrac{dy}{dx}$ の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ は

媒介変数 t を介することにより，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)'}{f'(t)}$ となる。

補足： $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の分母が x^2，分子が d^2 の理由

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$