演習問題

43

(1)

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2\left(x^2+x+1\right)-2x^2-x}{2\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x+2}{2\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$$

(2)

$$y'=\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^x+\left(\frac{b}{x}\right)^a+\left(\frac{x}{a}\right)^b\right\}'$$

$$=\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^x+b^a x^{-a}+\frac{x^b}{a^b}\right\}'$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^x\log\frac{a}{b}-ab^a x^{-a-1}+\frac{b}{a^b}x^{b-1}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^x\log\frac{a}{b}-\frac{ab^a}{x^{a+1}}+\frac{b}{a^b}x^{b-1}$$

(3)

$x>0$ より $y>0$ だから，両辺の自然対数をとると， $\log y=(x+1)\log x$

$$\therefore\ \frac{y'}{y}=\log x+\frac{x+1}{x}=\log x+1+\frac{1}{x}$$

ゆえに， $y'=x^{x+1}\left(\log x+1+\dfrac{1}{x}\right)$

(4)

$$y'=\left\{e^{2x}\tan x+\log\left(|1-x|^x\right)\right\}'$$

$$=2e^{2x}\tan x+e^{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\left(x\log|x-1|\right)'$$

$$=e^{2x}\left(2\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+\log|1-x|+x\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$=e^{2x}\left(2\tan x+1+\tan^2 x\right)+\log|1-x|+\frac{x}{x-1}$$

$$=e^{2x}(\tan x+1)^2+\log|1-x|+\frac{x}{x-1}$$

44

(1)

$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'e^{\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ より，

$$
\begin{aligned}
f''(x)&=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)' \\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)' \\
&=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&=\frac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} \\
&=\frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=(\sin x)'\cos(\sin x) \\
&=\cos x\cos(\sin x)
\end{aligned}
$$

$\therefore f'(\pi)=\cos\pi\cos(\sin\pi)=-1$

(3)

$$\frac{d\tan y}{dx}=\frac{dx}{dx}$$

これと，$\dfrac{d\tan y}{dx}=\dfrac{d\tan y}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dx}{dx}=1$ より，$\dfrac{1}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx}=1$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}=\cos^2 y$

よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} \\
&=\frac{d\cos^2 y}{dx} \\
&=\frac{d\cos^2 y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&=-2\sin y\cos y\cdot\cos^2 y \\
&=-2\sin y\cos^3 y
\end{aligned}
$$

ゆえに，$y=\dfrac{\pi}{4}$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値は $-2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos^3\dfrac{\pi}{4}=-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=-\dfrac{1}{2}$

(4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{2-\cos t}\quad (0<t<2\pi)$$

よって，$\frac{dy}{dx}=0$ となるのは $\sin t=0$ のとき，すなわち $t=\pi$ のとき

ゆえに，$(x,y)=(2\pi,3)$

45

(1)

$f(x)=\log\frac{x}{2}$ とおくと，$f(2)=0$ だから，$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$f'(x)=\left(\log\frac{x}{2}\right)'=(\log x-\log 2)'=\frac{1}{x}$ より，$f'(2)=\frac{1}{2}$

ゆえに，$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

(2)

$f(x)=\log(\cos x)$ とおくと，$f(0)=0$ だから，$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}$ より，$f'(0)=0$

ゆえに，$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}=0$

(3)

解法 1

$\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to +0$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\{\log(x+1)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}x\sin\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to +0}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to +0}\left\{\frac{\log(1+t)}{t}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{\log(1+t)}\right\}$$

ここで，

$$\lim_{t\to +0}\frac{\log(1+t)}{t}=\lim_{t\to +0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=\log e=1$$

$t \to 0$ のとき $\log(1+t) \to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{\log(1+t)}=1$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\{\log(x+1)-\log x\} &= \lim_{t\to+0}\frac{\log(1+t)}{t}\cdot\lim_{t\to+0}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{\log(1+t)}\\ &=1\cdot 1\\ &=1\end{aligned}$$

解法 2

$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ だから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\{\log(x+1)-\log x\} &= \lim_{x\to\infty} x\sin\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}\\ &=\lim_{t\to+0}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{t}\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=\sin\{\log(1+t)\}$ とおくと，$f(t)$ は $t>-1$ のとき微分可能かつ $f(0)=0$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\{\log(x+1)-\log x\} &= \lim_{t\to+0}\frac{\sin\{\log(1+t)\}}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\\ &=f'(0)\end{aligned}$$

これと $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}\cos\{\log(1+t)\}$ より，$f'(0)=\dfrac{1}{1+0}\cdot\cos 0=1$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\{\log(x+1)-\log x\}=1$

46

$f(0)=g(0)$ より，　$2=a$　$\therefore a=2$　・・・①

$f'(x)=-\sin x$

①より，

$$g'(x)=\left(\frac{2}{bx^2+cx+1}\right)'$$

$$=\frac{-2\left(bx^2+cx+1\right)'}{\left(bx^2+cx+1\right)^2}$$

$$=\frac{-2(2bx+c)}{\left(bx^2+cx+1\right)^2}$$

これらと $f'(0)=g'(0)$ より，

$0=-2c$　$\therefore c=0$　・・・②

$f''(x)=-\cos x$

②より，

$$g''(x)=\left\{\frac{-4bx}{\left(bx^2+1\right)^2}\right\}'$$

$$=\frac{-4b\left(bx^2+1\right)^2+4bx\left(bx^2+1\right)'\cdot 2\left(bx^2+1\right)}{\left(bx^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-4b\left(bx^2+1\right)^2+16b^2x^2\left(bx^2+1\right)}{\left(bx^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-4b\left(bx^2+1\right)+16b^2x^2}{bx^2+1}$$

これらと $f''(0)=g''(0)$ より，

$-1=-4b$　$\therefore b=\dfrac{1}{4}$

以上より，　$a=2$，　$b=\dfrac{1}{4}$，　$c=0$

47

(1)

$x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるための必要十分条件は $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

これと

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\pi)=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(a\sin x+\cos x)=a\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=a$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=a$$

より， $a=-\dfrac{\pi}{2}$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin x+\cos x & \left(x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ x-\pi & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$ の $x=\dfrac{\pi}{2}$ における微分可能性について

解法 1

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\cos x-\sin x & \left(x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 1 & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$ より，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(-\frac{\pi}{2}\cos x-\sin x\right)=-1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1=1$$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)\neq\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)$ より， $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能でない。

解法 2

$$\lim_{h\to+0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\left\{\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\pi\right\}-\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}$$
$$=1$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\left\{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right\}-\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{-\frac{\pi}{2}\cos h-\sin h+\frac{\pi}{2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos h}{h}-\frac{\sin h}{h}\right)$$

ここで，

$$\lim_{h\to-0}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos h}{h}=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\left(\frac{1-\cos^2 h}{h}\frac{1}{1+\cos h}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\left(\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{1+\cos h}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\lim_{h\to-0}\frac{h}{1+\cos h}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1^2\cdot 0$$
$$=0$$

より，

$$\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\frac{1-\cos h}{h}-\lim_{h\to-0}\frac{\sin h}{h}$$
$$=0-1$$
$$=-1$$

よって， $\lim_{h\to+0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$

ゆえに， $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能でない。

48

$\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ が 2 に収束するためには $g(0)=0$ であることが必要だから，

$f(0)=2+g(0)=2$　・・・ア

$f'(x)=-\cos x+x\sin x+g'(x)$　$\therefore f'(0)=-1+g'(0)$

ここで，$g(0)=0$ より，$\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$

これと $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=2$ より，$g'(0)=2$

ゆえに，$f'(0)=-1+2=1$　・・・イ

49

(1)

関数 $f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とすると $y=f^{-1}(x)$　$\therefore x=f(y)$

これと $f(1)=2$ より，$y=1$ のとき $x=2$　・・・①

ここで，$x=f(y)$ を x について微分すると

$$1=\frac{df(y)}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}\quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

$f^{-1}(x)=g(x)$ だから，$\dfrac{dy}{dx}=\left\{f^{-1}(x)\right\}'=g'(x)$　$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

これと①より，$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}g''(x)&=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\&=\frac{d^2y}{dx^2}\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)\\&=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)\frac{dy}{dx}\\&=\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}\\&=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}\end{aligned}$$

これと①より，$g''(1)=-\dfrac{f'''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$

50

(1)

$f^{(1)}(x)=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}(x-1)$ ・・・①

$f^{(2)}(x)=\left\{-e^{-x}(x-1)\right\}'=e^{-x}(x-1)-e^{-x}=e^{-x}(x-2)$

$f^{(3)}(x)=\left\{e^{-x}(x-2)\right\}'=-e^{-x}(x-2)+e^{-x}=-e^{-x}(x-3)$

より,

$f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x-n)$ となることが推測されるので,これを数学的帰納法で証明する。

【1】

$n=1$ のとき,①より, $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x-n)$ が成り立つ。

【2】

$n=k$ のとき $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x-n)$ が成り立つと仮定すると,

$f^{(k)}(x)=(-1)^k e^{-x}(x-k)$

よって, $n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\frac{d}{dx}\left\{f^{(k)}(x)\right\}\\&=\frac{d}{dx}\left\{(-1)^k e^{-x}(x-k)\right\}\\&=(-1)^k\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}(x-k)\right\}\\&=(-1)^k\left\{-e^{-x}(x-k)+e^{-x}\right\}\\&=(-1)^k\left[-e^{-x}\{x-(k+1)\}\right]\\&=(-1)^{k+1}e^{-x}\{x-(k+1)\}\end{aligned}$$

ゆえに, $n=k+1$ のときも $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x-n)$ が成り立つ。

【1】,【2】より, $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x-n)$ が成り立つ。

よって, $f^{(n)}(a_n)=(-1)^n e^{-a_n}(a_n-n)$

$e^{-a_n}\neq 0$ より, $f^{(n)}(a_n)=0$ ならば $a_n-n=0$ $\therefore a_n=n$

(2)

$$\sum_{n}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ke^{-k}}{k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^{k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}$$

ここで$0<\frac{1}{e}<1$より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}=0$

ゆえに，

$$\sum_{n}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}$$
$$=\frac{1}{e-1}$$

51

(1)

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x f_1(x)\right)\\
&= \frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x x^2\right)\\
&= \frac{1}{e^x}\left(e^x x^2 + 2e^x x\right)\\
&= x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x f_n(x)\right)\\
&= \frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}\left\{e^x\left(x^2 + a_n x + b_n\right)\right\}\\
&= \frac{1}{e^x}\left\{e^x\left(x^2 + a_n x + b_n\right) + e^x\left(2x + a_n\right)\right\}\\
&= x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n
\end{aligned}
$$

これと $f_{n+1}(x) = x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1}$ より，

$x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1} = x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n$

この式は x についての恒等式だから，

$a_{n+1} = a_n + 2$， $b_{n+1} = a_n + b_n$

(3)

$a_{n+1} = a_n + 2$ より， $a_{n+1} - a_n = 2$

$x^2 + a_1 + b_1 = x^2$ ・・・①より， $a_1 = 0$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 0$，公差 2 の等差数列である。

ゆえに， $a_n = 0 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 2$

$b_{n+1} = a_n + b_n$ より， $b_{n+1} - b_n = a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列である。

したがって， $n \geq 2$ のとき，数列 $\{b_n\}$ は $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ と表せる。

これと①より， $b_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore b_n &= \sum_{k}^{n-1}(2k - 2)\\
&= 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1)\\
&= (n-1)(n-2)
\end{aligned}
$$

$(n-1)(n-2)$ に 1 を代入すると 0，すなわち b_1 の値と等しいから，

これに $n = 1$ の場合も含めることにより， $b_n = (n-1)(n-2)$

52

(1)

$x=y=0$ のとき，$f(0+0)=f(0)+f(0)+8\cdot 0\cdot 0$ より，$f(0)=0$

(2)

$f(0)=0$ だから，

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)$$

これと $f'(0)=3$ より，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=3$

(3)

解法 1

y を定数と見なし，$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy$ を x について微分すると，

$f'(x+y)=f'(x)+8y$

よって，$x=0$ のとき $f'(0+y)=f'(0)+8y$

これと $f'(0)=3$ より，$f'(y)=3+8y$

$$\therefore f'(1)=3+8\cdot 1$$
$$=11$$

解法 2

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+8xy}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}+\lim_{y\to 0}8x$$
$$=3+8x$$
$$\therefore f'(1)=3+8\cdot 1$$
$$=11$$

解法 3

$$f'(1)=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}$$

ここで，$x=1$ のとき，$f(1+y)=f(1)+f(y)+8y$ より，$f(1+y)-f(1)=f(y)+8y$

$$\therefore f'(1)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+8y}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}+8$$
$$=3+8$$
$$=11$$