微分法の応用 1　接線と法線　接線問題は接点から

301

(1)

接点の座標を$\left(t, \sqrt{t}\right)$とすると，$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，接線の方程式は$y = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t) + \sqrt{t}$

$\therefore y = \dfrac{\sqrt{t}}{2t}x + \dfrac{\sqrt{t}}{2}$

これが点$(-2,0)$を通るから，$0 = \dfrac{\sqrt{t}}{2t}\cdot(-2) + \dfrac{\sqrt{t}}{2}$　$\therefore t = 2$

ゆえに，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)

接点の座標を$\left(t, \dfrac{2t}{t+1}\right)$とすると，$y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ より，

接線の方程式は$y = \dfrac{2}{(t+1)^2}(x-t) + \dfrac{2t}{t+1}$　$\therefore y = \dfrac{2}{(t+1)^2}x + \dfrac{2t^2}{(t+1)^2}$

これが点$(1,2)$を通るから，$2 = \dfrac{2}{(t+1)^2}\cdot 1 + \dfrac{2t^2}{(t+1)^2}$　$\therefore t = 0$

ゆえに，$y = 2x$

(3)

接点の座標を$(t, \log t - 1)$（$t > 0$）とすると，$y' = \dfrac{1}{x}$ より，

接線の方程式は$y = \dfrac{1}{t}(x-t) + \log t - 1$　$\therefore y = \dfrac{1}{t}x + \log t - 2$

これが原点を通るから，$0 = \log t - 2$　$\therefore t = e^2$

ゆえに，$y = \dfrac{1}{e^2}x$

(4)

接点の座標を$\left(t, e^{2t+1}\right)$とすると，$y' = 2e^{2x+1}$ より，

接線の方程式は$y = 2e^{2t+1}(x-t) + e^{2t+1}$　$\therefore y = 2e^{2t+1}x - e^{2t+1}(2t-1)$

これが原点を通るから，$0 = -e^{2t+1}(2t-1)$　$\therefore t = \dfrac{1}{2}$

ゆえに，$y = 2e^2x$

302

接点の座標を $\left(t, e^t+2e^{-t}\right)$ とすると，$y'=e^x-2e^{-x}$ より，

$y=\left(e^t-2e^{-t}\right)(x-t)+e^t+2e^{-t}$ ・・・①

また，条件より，

$e^t-2e^{-t}=1$ $\therefore \left(e^t+1\right)\left(e^t-2\right)=0$

これと $e^t>0$ より，$e^t=2$，$t=\log 2$

ゆえに，$y=\left(2-2\cdot\frac{1}{2}\right)(x-\log 2)+2+2\cdot\frac{1}{2}$ $\therefore y=x+3-\log 2$

303

共有点における接線が一致する条件は，

・共有点だから，その座標が一致する。 ・・・①

・共有点における微分係数，つまり接線の傾きが一致する。 ・・・②

である。

共有点の x 座標を t とすると，①より，それぞれの y 座標が一致するから，

$at^3=3\log t$ ・・・③

共有点における微分係数，つまり接線の傾きは

$y=ax^3$ では，$y'=3ax^2$ より，$3at^2$

$y=3\log x$ では，$y'=\frac{3}{x}$ より，$\frac{3}{t}$

だから，②より，$3at^2=\frac{3}{t}$ $\therefore at^3=1$ ・・・④

③，④より，$3\log t=1$ $\therefore t=e^{\frac{1}{3}}$ ・・・⑤

また，④と⑤より，$a=\frac{1}{t^3}=\frac{1}{e}$ ・・・（答）

共有点の y 座標は $3\log t=3\log e^{\frac{1}{3}}=1$

以上より，

共有点の座標は $\left(e^{\frac{1}{3}}, 1\right)$，共有点における微分係数は $3e^{-\frac{1}{3}}$

よって，共有点における接線の方程式は $y=3e^{-\frac{1}{3}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)+1$

$\therefore y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$ ・・・（答）

304

点$\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$で交わるから，$2a+b=\frac{1}{2}$ ・・・①

共有点における微分係数，つまり接線の傾きは

$y=ax^2+b$ では，$y'=2ax$ より，$2\sqrt{2}a$

$y=\frac{1}{x^2}$ では，$y'=-\frac{2}{x^3}$ より，$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，条件より，$2\sqrt{2}a\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

これを①に代入してbの値を求めると，$b=-\frac{1}{2}$

305

共通接線の$y=x^2$上の接点を(s, s^2)とすると，$y'=2x$ より，

接線の方程式は$y=2s(x-s)+s^2$ $\therefore y=2sx-s^2$ ・・・①

共通接線の$y=\frac{1}{x}$上の接点を$\left(t, \frac{1}{t}\right)$とすると，$y'=-\frac{1}{x^2}$ より，

接線の方程式は$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$ $\therefore y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$ ・・・②

①，②より，$2sx-s^2=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$

これはxについての恒等式だから，

$2s=-\frac{1}{t^2}$ $\therefore s=-\frac{1}{2t^2}$ ・・・③

$-s^2=\frac{2}{t}$ $\therefore s^2=-\frac{2}{t}$ ・・・④

③を④に代入し，整理すると，$\frac{8t^3+1}{4t^3}=0$ $\therefore t=-\frac{1}{2}$

これと②より，共通接線の方程式はより，共通接線の方程式は$y=-4x-4$

306

$xy=k$ （$k\neq 0$）上の任意の点を$\left(x_1, y_1\right)$（$x_1\neq 0$，$y_1\neq 0$）とすると，

$\frac{d}{dx}(xy)=0$，$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{dx}{dx}y+x\cdot\frac{dy}{dx}=y+x\cdot\frac{dy}{dx}$から，$y+x\cdot\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

より，

$\left(x_1, y_1\right)$における接線の方程式は$y=-\frac{y_1}{x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ $\quad\therefore y=-\frac{y_1}{x_1}x+2y_1$

$y=-\frac{y_1}{x_1}x+2y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}x+y=2y_1 \Leftrightarrow \frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$

よって，接線がx軸およびy軸と交わる点，すなわち点 Q および点 R の座標は，

それぞれ Q$\left(2x_1,0\right)$，R$\left(0,2y_1\right)$

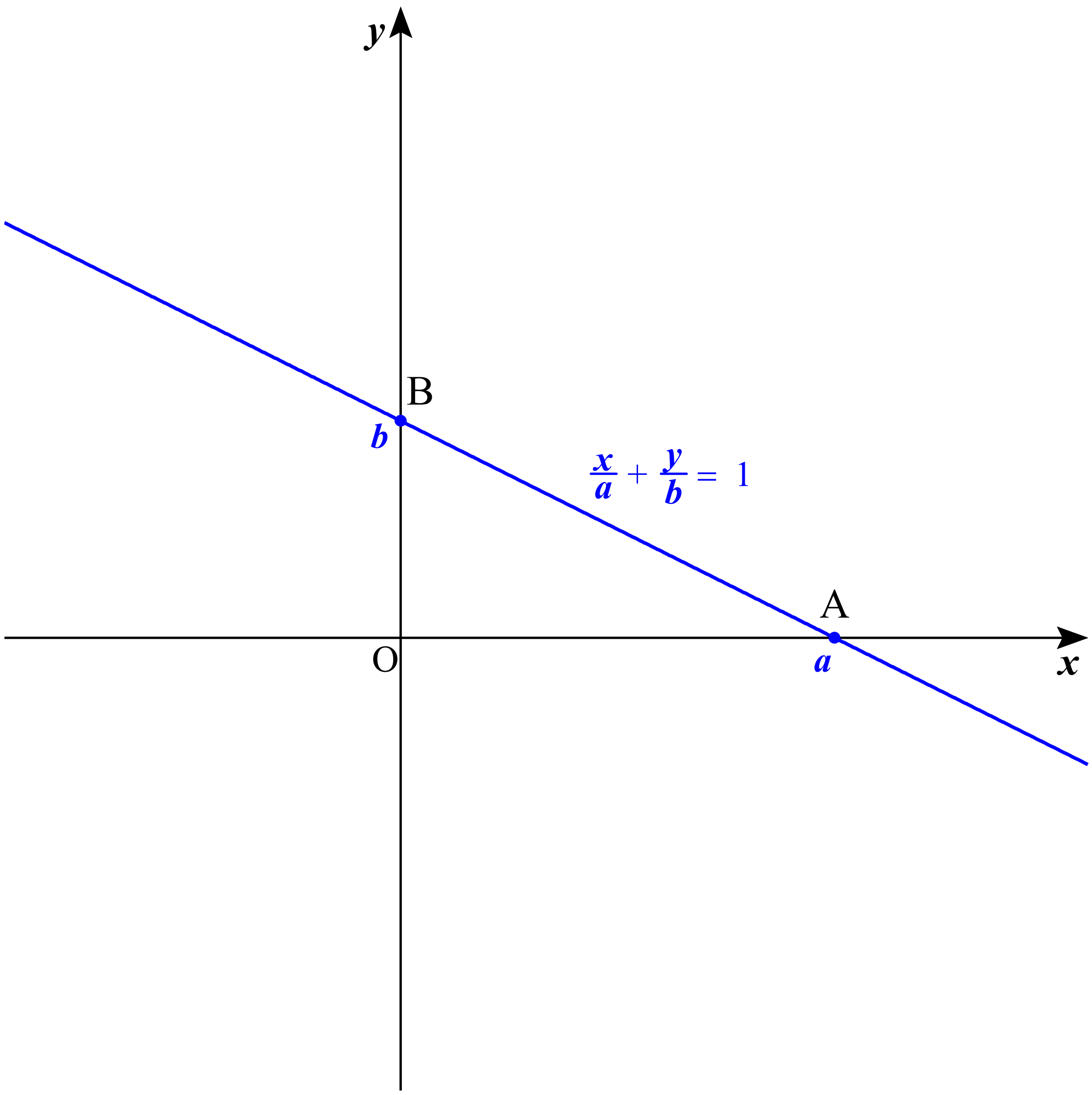
ゆえに，△OQR の面積は，$\frac{1}{2}\left|2x_1\right|\left|2y_1\right|=2\left|x_1y_1\right|=2|k|$，すなわち一定である。

補足

切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a，y 切片を b とする直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a,b$ は 0 でない実数）

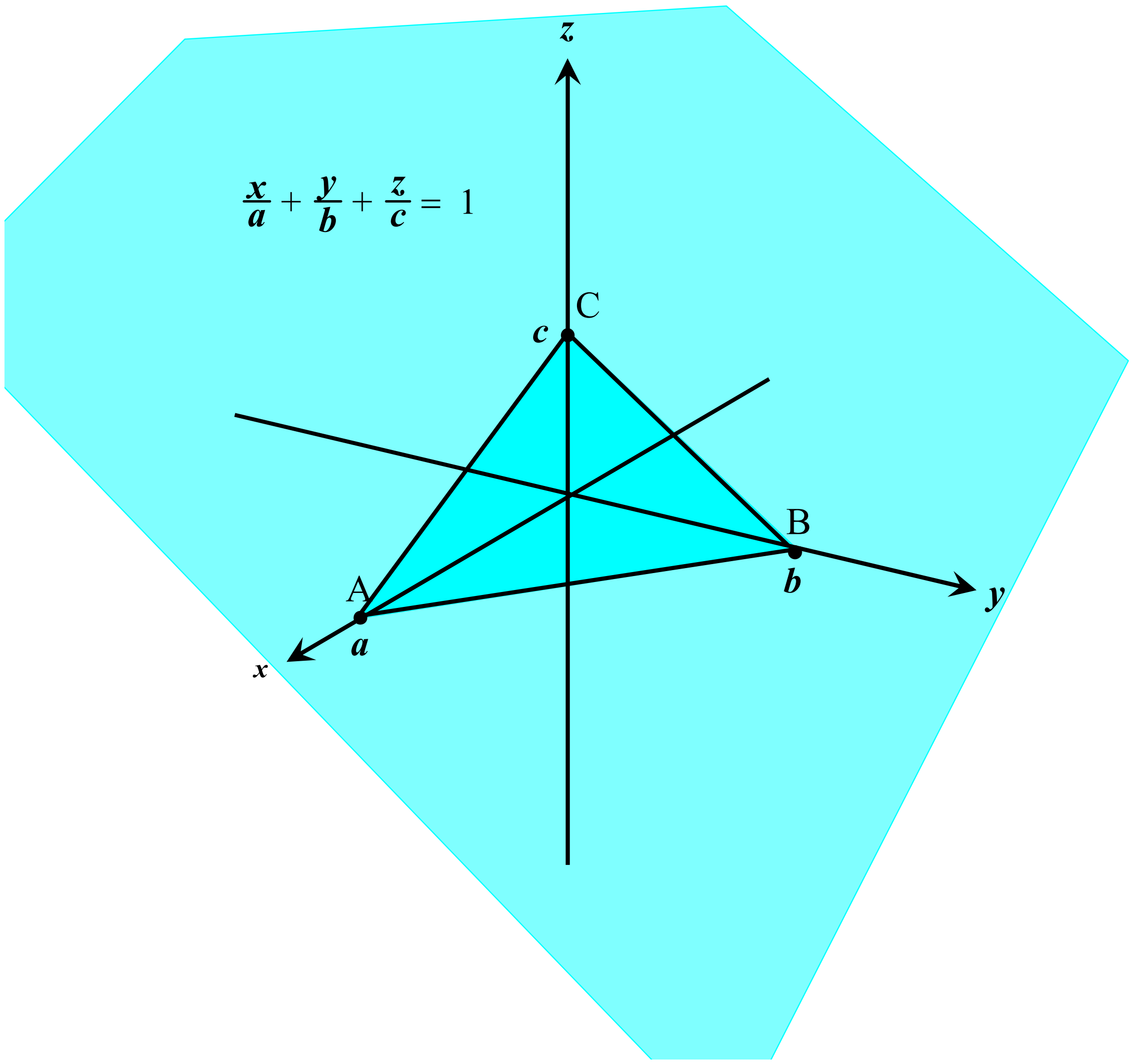


証明

A$(a,0)$，B$(0.b)$を通る直線の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$ $\quad\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 切片を a， y 切片を b， z 切片を c とする平面の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ （a,b,c は 0 でない実数）



証明

$\mathrm{A}(a,0,0)$，$\mathrm{B}(0.b,0)$，$\mathrm{C}(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より， $p=\dfrac{s}{a},q=\dfrac{s}{b},r=\dfrac{s}{c}$ $\quad\therefore\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

307

接点の座標を$\left(t, te^t\right)$とすると，$y' = e^x(x+1)$より，

接点の方程式は$y = e^t(t+1)(x-t) + te^t$　$\therefore y = e^t(t+1)x - t^2e^t$

これが点$\mathrm{P}(a,0)$を通るとき，$0 = e^t(t+1)a - t^2e^t$　$\therefore e^t\left(t^2 - at - a\right) = 0$

よって，$t^2 - at - a = 0$

tは実数だから，判別式をDとすると$D \geq 0$より，$D = a^2 + 4a = a(a+4) \geq 0$

$\therefore a \leq -4$，$0 \leq a$

308

条件より，$x^4 + ax^3 + bx^2 - 2b + 2$は$(x-2)^2$を因数にもつから，

$x^4 + ax^3 + bx^2 - 2b + 2$を$(x-2)^2$で割った商を$Q(x)$とすると，

$x^4 + ax^3 + bx^2 - 2b + 2 = (x-2)^2Q(x)$　・・・①

①の両辺をxについて微分すると，

$4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2Q'(x)$　・・・②

①，②はいずれもxについての恒等式だから，

それぞれに$x = 2$を代入すると，

$16 + 8a + 4b - 2b + 2 = 0$　$\therefore 8a + 2b = -18$　・・・③

$32 + 12a + 4b = 0$　$\therefore 12a + 4b = -32$　・・・④

③と④の連立方程式を解くことにより，$a = -1$，$b = -5$