

微分法の応用 5 関数のグラフ

336

ポイント: x 軸に垂直でない漸近線 $y = f(x)$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの x 軸に垂直でない漸近線を $g(x) = ax + b$ とすると, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} = 0$ だから, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ となる a, b を求める。

あるいは,

 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ より,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\} \text{ より,}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ であるから, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\}$ であるためには,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\} = 0 \text{ であることが必要}$$

$$\text{よって, } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$g(x) = ax + b$$

$$= \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \right\} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \right\} x \right]$$

 $x \rightarrow -\infty$ の場合も同様

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

補足

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1 \text{ について}$$

ややこしいなら,

$x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ だから,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = -1$$

(2)

漸近線が x 軸または y 軸と垂直でないのは明らかだから,

漸近線を $y = ax + b$ とおくと,

$x \rightarrow \infty$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left\{ (2-a) + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b) \right\} = 0 \text{ だから, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (2-a) + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} = 0 \text{ であることが必要}$$

これと

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (2-a) + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} &= 2-a + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right) \\ &= 2-a+1 \\ &= 3-a \end{aligned}$$

$$\text{より, } 3-a=0 \quad \therefore a=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (3x + b) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x + \sqrt{x^2 - 1} - b \right) = 0$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } y = 3x$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b) \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left\{ (2-a) - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b) \right\} = 0 \text{ だから, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ (2-a) - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} = 0 \text{ が必要}$$

これと

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ (2-a) - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right\} &= 2-a + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{b}{x} \right) \\ &= 2-a-1 \\ &= 1-a\end{aligned}$$

より, $1-a=0 \quad \therefore a=1 \quad \dots \textcircled{3}$

$$\textcircled{3} \text{より, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - (x+b) \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} - b \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= 0 \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より, $y=x$

別解

$$g(x) = ax + b = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \right\} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \right\} x \right] \text{を使うと,}$$

$x \rightarrow \infty$ のとき

$$y = ax + b$$

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \sqrt{x^2 - 1} - x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \right\} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 - 1} - x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \right\} \\ &= 3x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= 3x + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= 3x \end{aligned}$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき

$$y = ax + b$$

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 - 1} - x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}}{x} \right) x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} - x \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}}{x} \right) \right\} \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \right) \right\} x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \right) \right\} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ 2x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \right\} \\ &= x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= x \end{aligned}$$

337

(1)

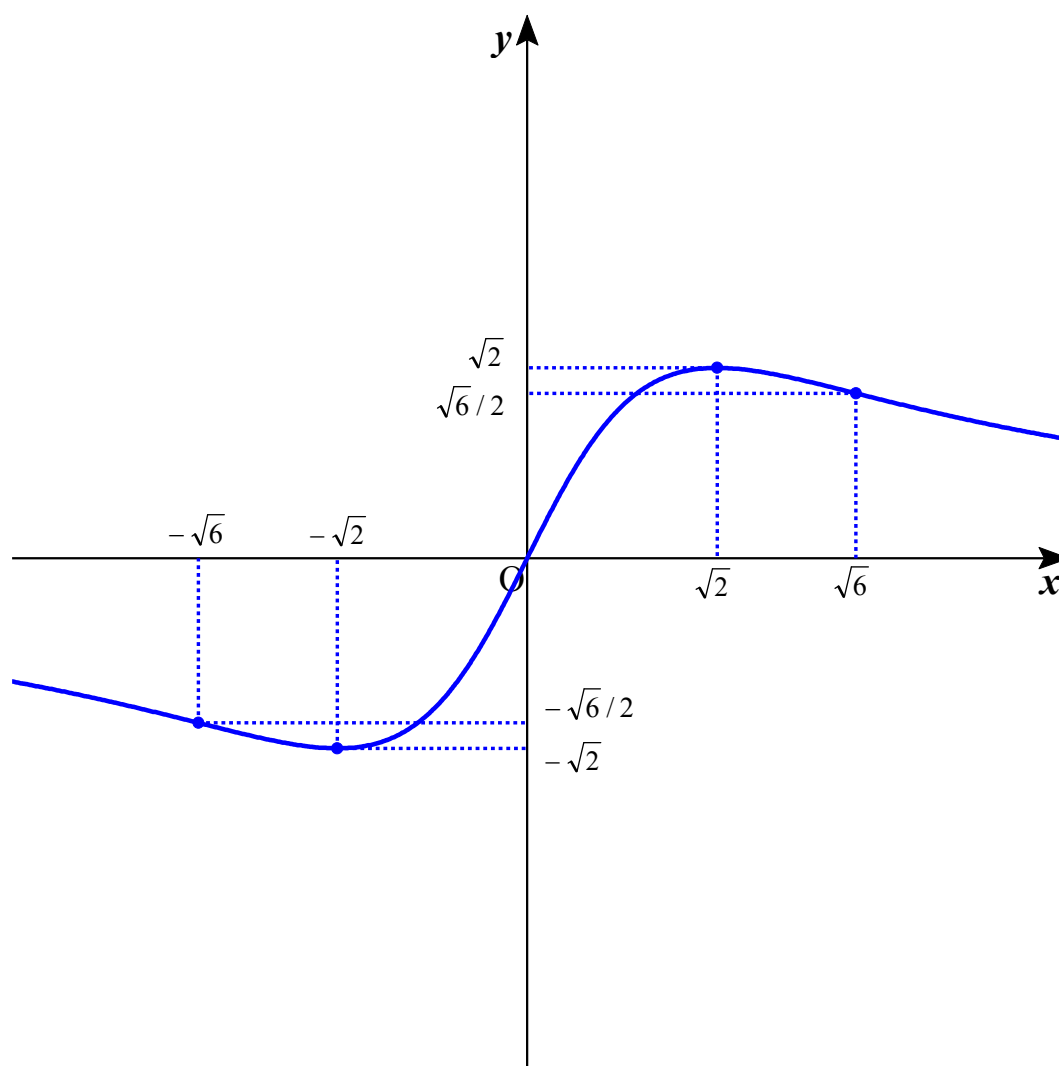
$y = f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$ とおくと, $f(x) = -f(-x)$ より, グラフは原点对称

$$y' = \frac{-4(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2}, \quad y'' = \frac{8x(x^2 - 6)}{(x^2 + 2)^3}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ より, 漸近線は x 軸

増減表

x	...	$-\sqrt{6}$	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...	$\sqrt{6}$	...
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	$\downarrow \cap$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\downarrow \cup$	$-\sqrt{2}$	$\uparrow \cup$	0	$\uparrow \cap$	$\sqrt{2}$	$\downarrow \cap$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\downarrow \cup$



(2)

$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ とおくと, $f(x) = -f(-x)$ より, グラフは原点对称

$$y' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad y'' = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

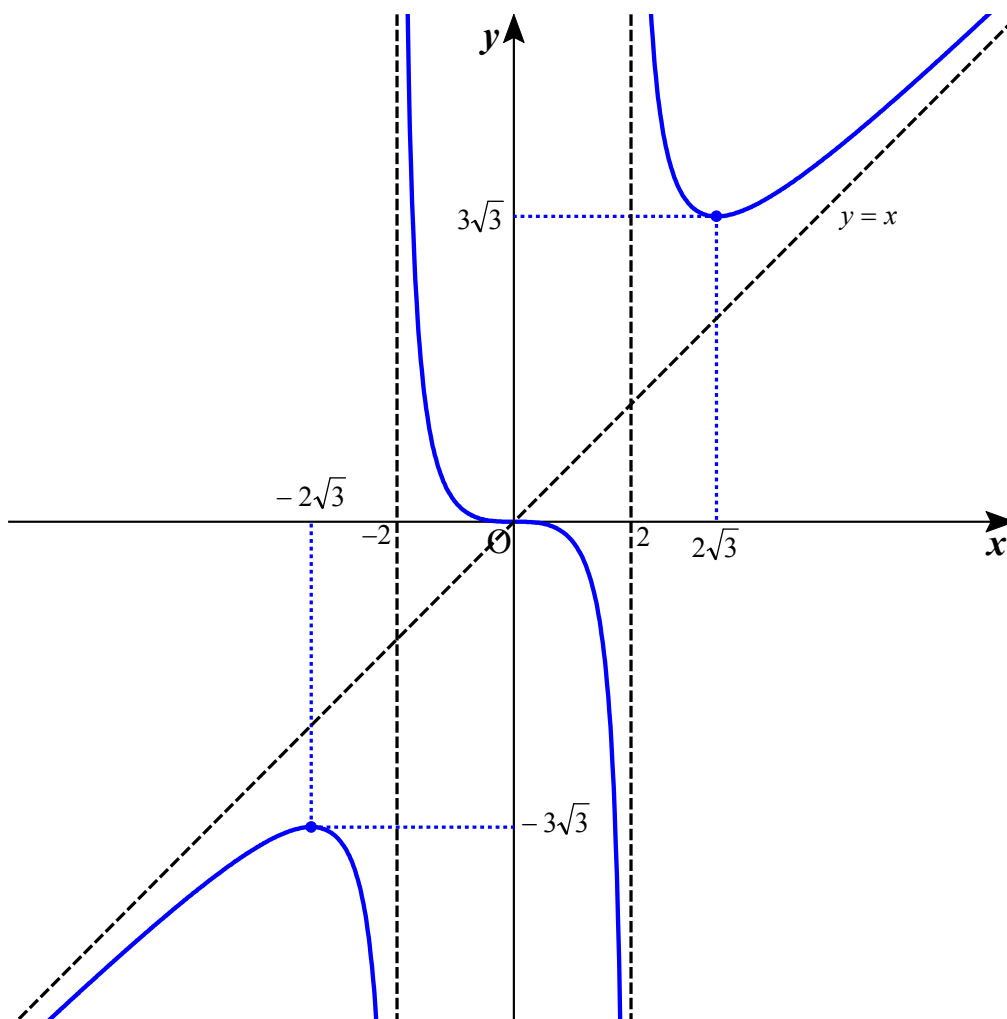
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4} \text{ より,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) = 0$$

よって, 漸近線は $x = \pm 2$, $y = x$

増減表

x	...	$-2\sqrt{3}$	...	-2	...	0	...	2	...	$2\sqrt{3}$	...
y'	+	0	-	/	-	0	-	/	-	0	+
y''	-	-	-	/	+	0	-	/	+	+	+
y	$\uparrow \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow \cap$	/	$\downarrow \cup$	0	$\downarrow \cap$	/	$\downarrow \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow \cup$



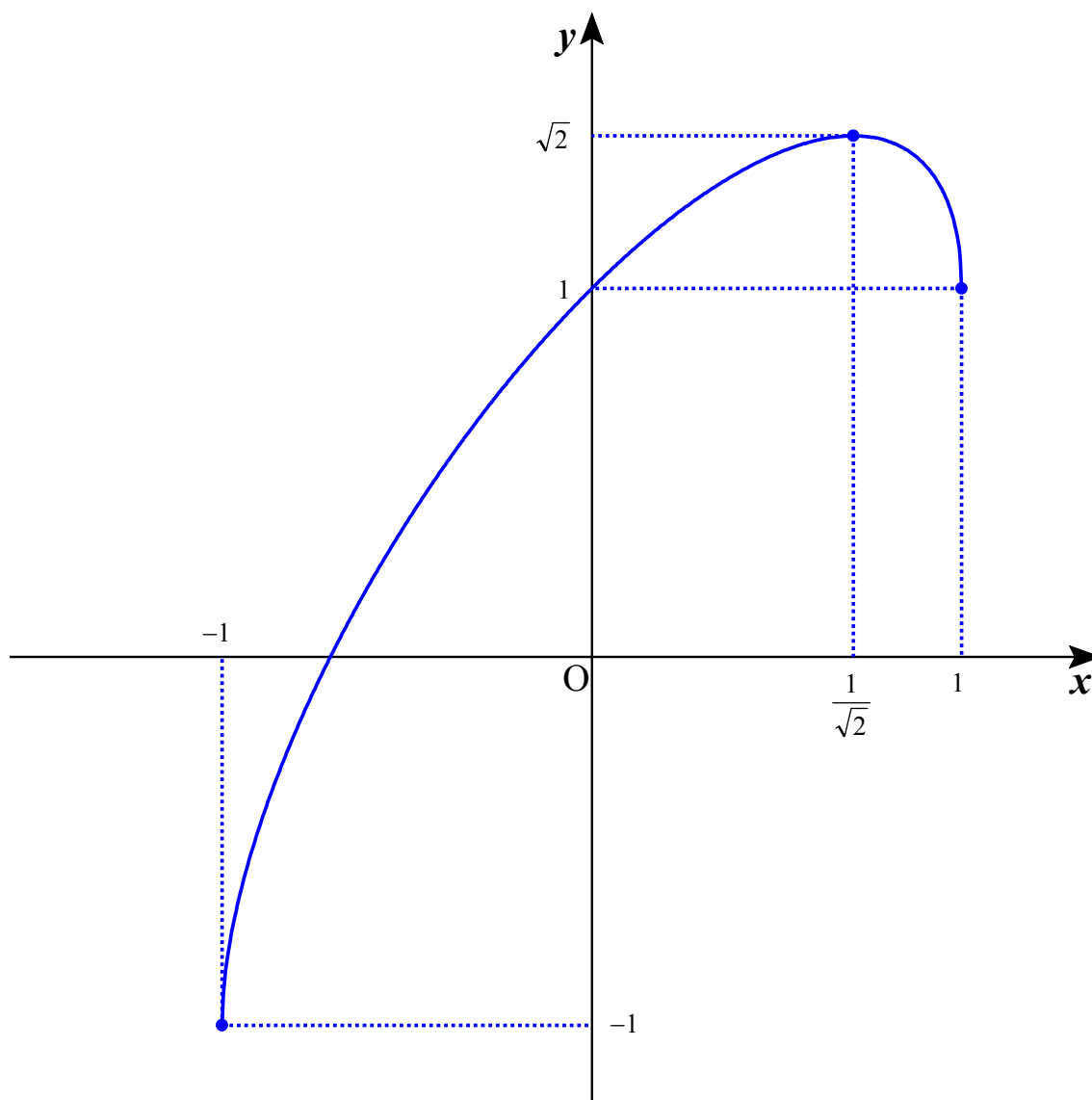
(3)

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = -\infty$ より, $x \rightarrow 1-0$ のとき接線の傾きは無限小になる。

$\lim_{x \rightarrow -1+0} y' = \infty$ より, $x \rightarrow -1+0$ のとき接線の傾きは無限大になる。

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'	/	+	0	-	/
y''	/	-	-	-	/
y	-1	$\uparrow \cap$	$\sqrt{2}$	$\downarrow \cap$	1



(4)

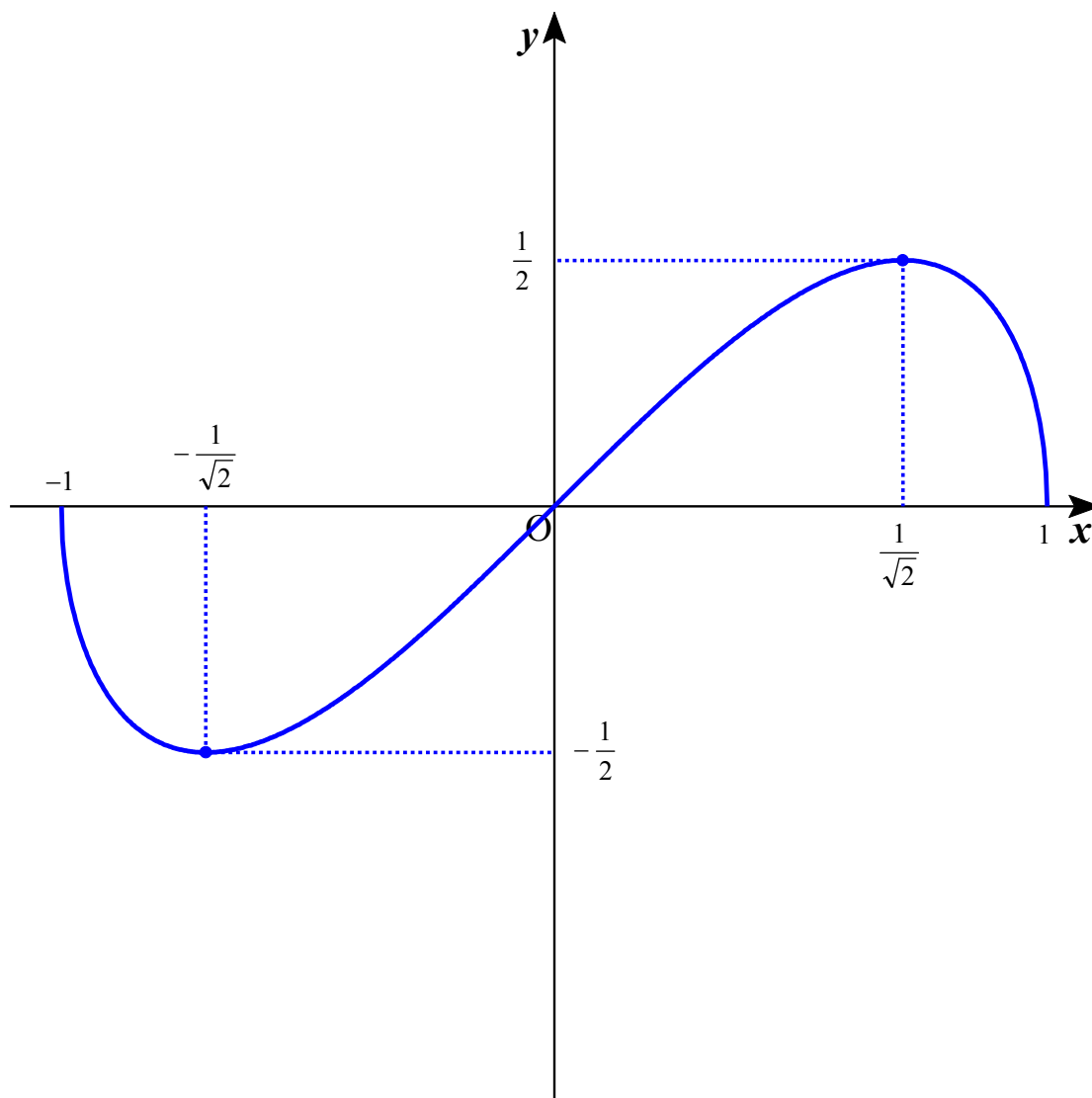
$y = f(x)$ とおくと, $f(x) = -f(-x)$ より, グラフは原点对称

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = -\infty$ より, $x \rightarrow 1-0$ のとき接線の傾きは無限小になる。

$\lim_{x \rightarrow -1+0} y' = -\infty$ より, $x \rightarrow -1+0$ のとき接線の傾きは無限小になる。

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'	/	-	0	+	+	+	0	-	/
y''	/	+	+	+	0	-	-	-	/
y	0	$\downarrow \cup$	$-\frac{1}{2}$	$\uparrow \cup$	0	$\uparrow \cap$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow \cap$	0



(5)

$$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0, \quad y'' = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

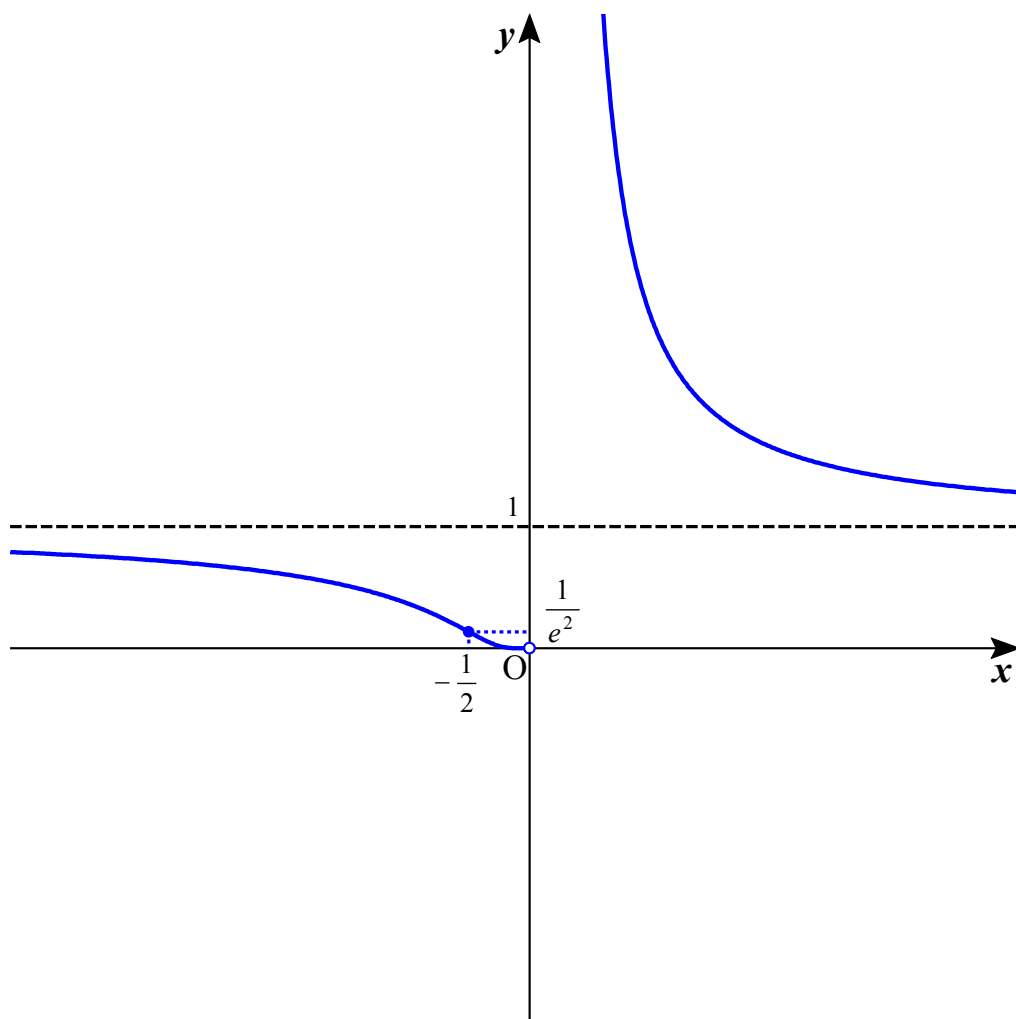
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$$

$\lim_{x \rightarrow -0} y' = 0$ より, $x \rightarrow -0$ のとき接線の傾きは 0 になっていく。

参考: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ の証明

<http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukonetapdf/lim%28x%5Ene%5E%28-x%29%29.pdf>

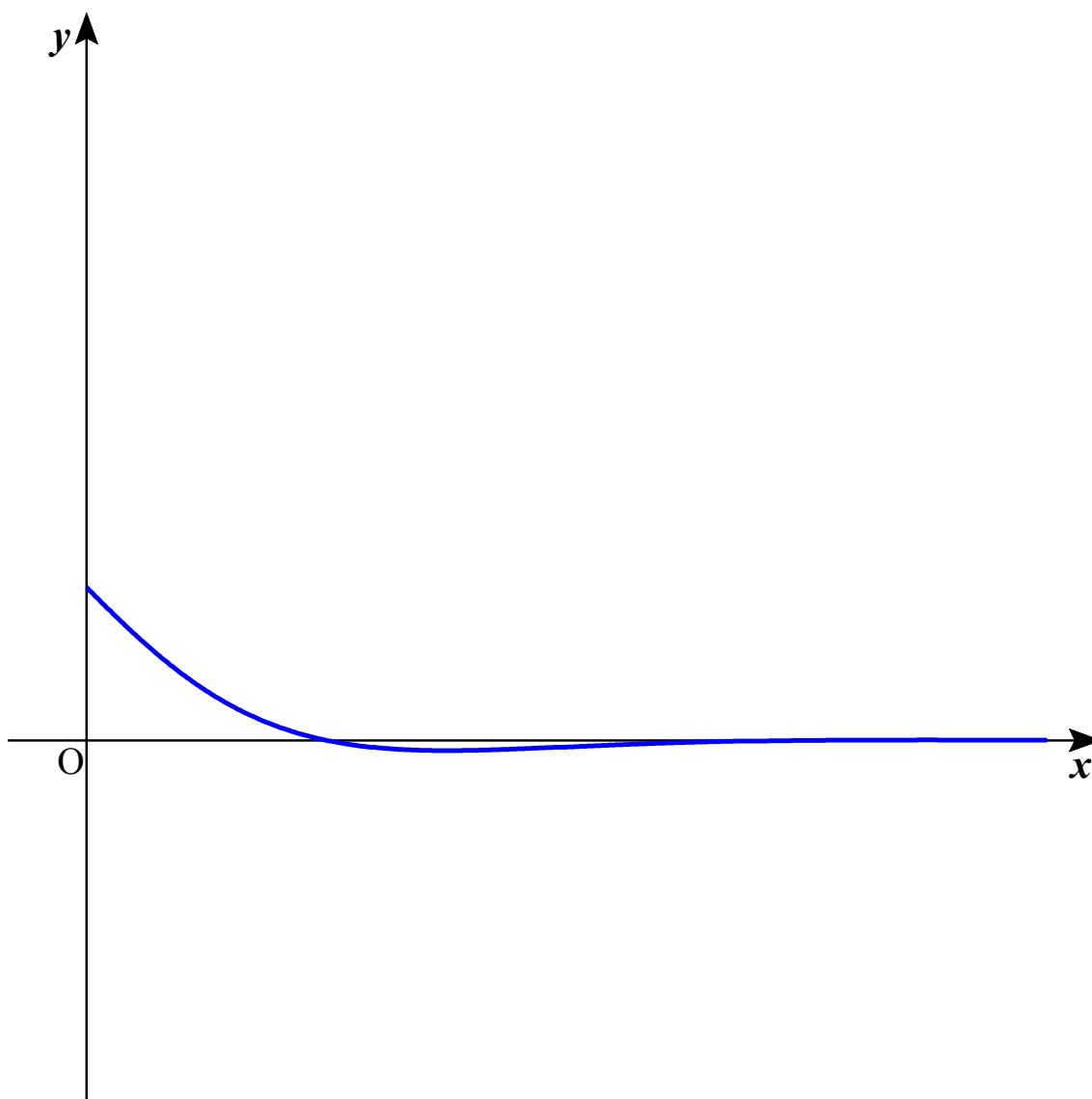
x	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...
y'	-	-	-	/	-
y''	-	0	+	/	+
y	$\downarrow \cap$	$\frac{1}{e^2}$	$\downarrow \cup$	/	$\downarrow \cup$



(6)

$$y' = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad y'' = 2e^{-x} \sin x$$

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π
y'	/	-	0	+	+	+	0	-	/
y''	/	+	+	+	0	-	-	-	/
y	1	$\downarrow \cup$	$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\uparrow \cup$	$-e^{-\pi}$	$\uparrow \cap$	$\frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\downarrow \cap$	$e^{-2\pi}$



338

(1)

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 \text{ より, } f'(0) = f''(0) = 0$$

$x < 0$ のとき $f'(x) < 0$, $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ より, $f(x)$ は $x = 0$ で極値をとる。

(2)

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x, \quad f''(x) = (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x \text{ より, } f'(0) = f''(0) = 0$$

$x = 0$ 近傍において,

$$x < 0 \text{ のとき, } \sin x < 0, \quad \cos x > 0 \text{ より, } f'(x) > 0$$

$$x > 0 \text{ のとき, } \sin x > 0, \quad \cos x > 0 \text{ より, } f'(x) > 0$$

よって, $f(x)$ は $x = 0$ で極値をとらない。

339

ただ1つの変曲点をもつこと

$$y' = -3x^2 + 6x \text{ より, } y'' = -6(x - 1)$$

よって, $y'' = 0$ のとき $x = 1$

これと $x < 1$ のとき $y'' > 0$, $x > 1$ のとき $y'' < 0$ より,

$y = -x^3 + 3x^2$ はただ1つの変曲点をもつ。

変曲点に関して対称であること

解法1: 変曲点が原点になるように平行移動した関数が奇関数であることを示す

変曲点の座標は(1,2)である。よって, グラフが変曲点に関して対称ならば,

このグラフを変曲点が原点になるように平行移動したグラフ, つまり $y = -x^3 + 3x^2$ を x 軸方向に-1, y 軸方向に-2 平行移動したグラフは原点に関して対称である。

$y = -x^3 + 3x^2$ を x 軸方向に-1, y 軸方向に-2 平行移動したグラフの式は

$$y - (-2) = -\{x - (-1)\}^3 + 3\{x - (-1)\}^2 \text{ より, } y = -x^3 + 3x$$

よって, y は x の奇関数だから, $y = -x^3 + 3x$ は原点に関して対称である。

ゆえに, $y = -x^3 + 3x^2$ は変曲点に関して対称である。

補足

「 y は x の奇関数だから, $y = -x^3 + 3x$ は原点に関して対称である」を

「 $y = f(x) = -x^3 + 3x$ とすると, $f(x) = -f(-x)$ より, $y = f(x)$ は原点に関して対称である」としてもよい。

解法 2

(1)より, 変曲点の座標は(1,2)である。

したがって, $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$ とすると,

点 $(1-t, f(1-t))$ と点 $(1+t, f(1+t))$ (t は任意の実数) の中点が変曲点と一致するならば $y = f(x)$ は変曲点に関して対称であるといえる。

点 $(1-t, f(1-t))$ と点 $(1+t, f(1+t))$ (t は任意の実数) の中点は,

$$\left(\frac{(1-t)+(1+t)}{2}, \frac{f(1-t)+f(1+t)}{2} \right) = \left(1, \frac{\{-(1-t)^3 + 3(1-t)^2\} + \{-(1+t)^3 + 3(1+t)^2\}}{2} \right) \\ = (1, 2)$$

だから, $(1-t, f(1-t))$ と点 $(1+t, f(1+t))$ (t は任意の実数) の中点が変曲点と一致する。

よって, $y = f(x)$ は変曲点に関して対称である。

340

$y = f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ とすると,

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$$

$$y'' = f''(x) = 6(x + a)$$

条件より,

$$f(0) = 3 \quad \therefore c = 3$$

$$x=1 \text{ で極小となるための必要条件は } f'(1) = 0 \quad \therefore 3 + 6a + 3b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{点 } (0, 3) \text{ が変曲点であるための必要条件は } f''(0) = 0 \quad \therefore a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } b = -1$$

$$\text{以上より, } a = 0, b = -1, c = 3$$

しかし, これらは必要条件を用いて得た値だから, その十分性を調べる必要がある。

そこで, 逆に, $a = 0, b = -1, c = 3$ とすると,

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 3, \quad y' = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1), \quad y'' = f''(x) = 6x \text{ より,}$$

増減表は次のようになり, 与えられた条件を満たす。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	↑∩	極大値	↓∩	変曲点	↓∪	極小値	↑∪
		5				1	

ゆえに, $a = 0, b = -1, c = 3$

341

(1)

変化の割合が正の区間だから, $0 < x < 2$, $4 < x < 5$

(2)

グラフが上に凸となる区間だから, $0 < x < 3$

(3)

$0 < x < 3$ のとき $y'' < 0$ だから, y' は単調減少する。

$3 < x < 5$ のとき $y'' > 0$ だから, y' は単調増加する。

これと $x=3$ のとき $y''=0$ より, y' は $x=3$ で最小値をとる。

342

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ とすると,

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

点 $(1, 8)$ における接線は $y=x$ に平行だから, $f'(1)=1 \quad \therefore 4a+3b+2c+d=1 \quad \cdots \textcircled{1}$

変曲点の座標より,

$f(-1)=1 \quad \therefore a-b+c-d+e=1 \quad \cdots \textcircled{2}$

$f(1)=8 \quad \therefore a+b+c+d+e=8 \quad \cdots \textcircled{3}$

$f''(-1)=f''(1)=0$, $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$ より, $12ax^2+6bx+2c=12a(x+1)(x-1)$

これは x についての恒等式だから, $12ax^2+6bx+2c=12ax^2-12a$ より,

$b=0 \quad \cdots \textcircled{4} \quad c=-6a \quad \cdots \textcircled{5}$

①～⑥より, $a=\frac{5}{16}$, $b=0$, $c=-\frac{5}{18}$, $d=\frac{7}{2}$, $e=\frac{97}{16}$

よって, $f(x)=\frac{5}{16}x^4 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{97}{16}$

343

$y' = e^x(x^2 + 4x + a + 2)$ より, $y'' = e^x(x^2 + 6x + a + 6)$

$e^x > 0$ より, $y'' = 0$ のとき $x^2 + 6x + a + 6 = 0$

$x^2 + 6x + a + 6 = 0$ の判別式を D とすると, $\frac{D}{4} = -a + 3$

$\frac{D}{4} > 0$ のとき, すなわち $a < 3$ のとき, $x^2 + 6x + a + 6 = 0$ は異なる 2 実数解をもち,

その解を α, β とすると, $x^2 + 6x + a + 6$ は $(x - \alpha)(x - \beta)$ と表せるから,
それぞれの解の前後で y'' の正負が変わる。よって, 変曲点の数は 2

$\frac{D}{4} \leq 0$ のとき, すなわち $a \geq 3$ のとき, $x^2 + 6x + a + 6 \geq 0$ より, $y'' \geq 0$

よって, 曲線は下に凸, すなわち変曲点をもたない。

以上より, 変曲点の数は, $a < 3$ のとき 2 個, $a \geq 3$ のとき 0 個

344

(1)

$y = \log|\log x - 1|$ の定義域は, $\log x$ および $\log|\log x - 1|$ の真数条件より, $0 < x < e, e < x$,

$y = \log|\log x - 1|$ と x 軸との交点の x 座標は $x = 1, e^2$

また, $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow e-0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow e+0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$

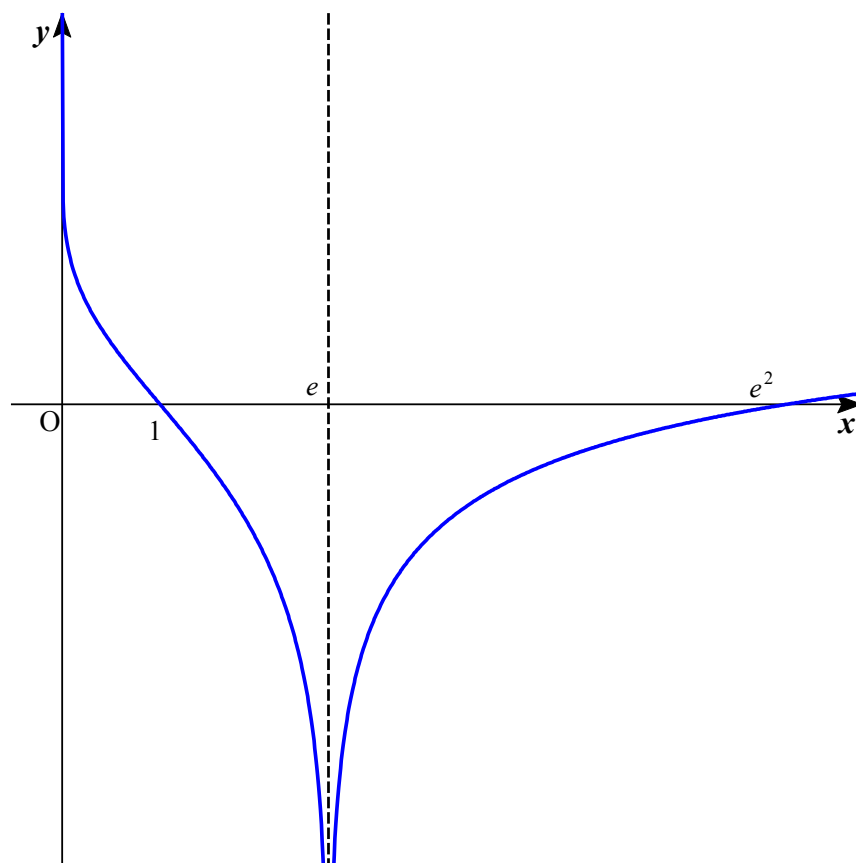
$$y' = \frac{1}{x(\log x - 1)}, \quad y'' = -\frac{\log x}{x^2(\log x - 1)^2}$$

補足

$$0 < x < e \text{ のとき } y' = \frac{\{-(\log x - 1)\}'}{-(\log x - 1)} = \frac{1}{x(\log x - 1)}$$

$$x < e \text{ のとき } y' = \frac{(\log x - 1)'}{\log x - 1} = \frac{1}{x(\log x - 1)}$$

x	0	...	1	...	e	...
y'	/	-	-	-	/	+
y''	/	+	0	-	/	-
y	/	$\downarrow \cup$	0	$\downarrow \cap$	/	$\uparrow \cap$

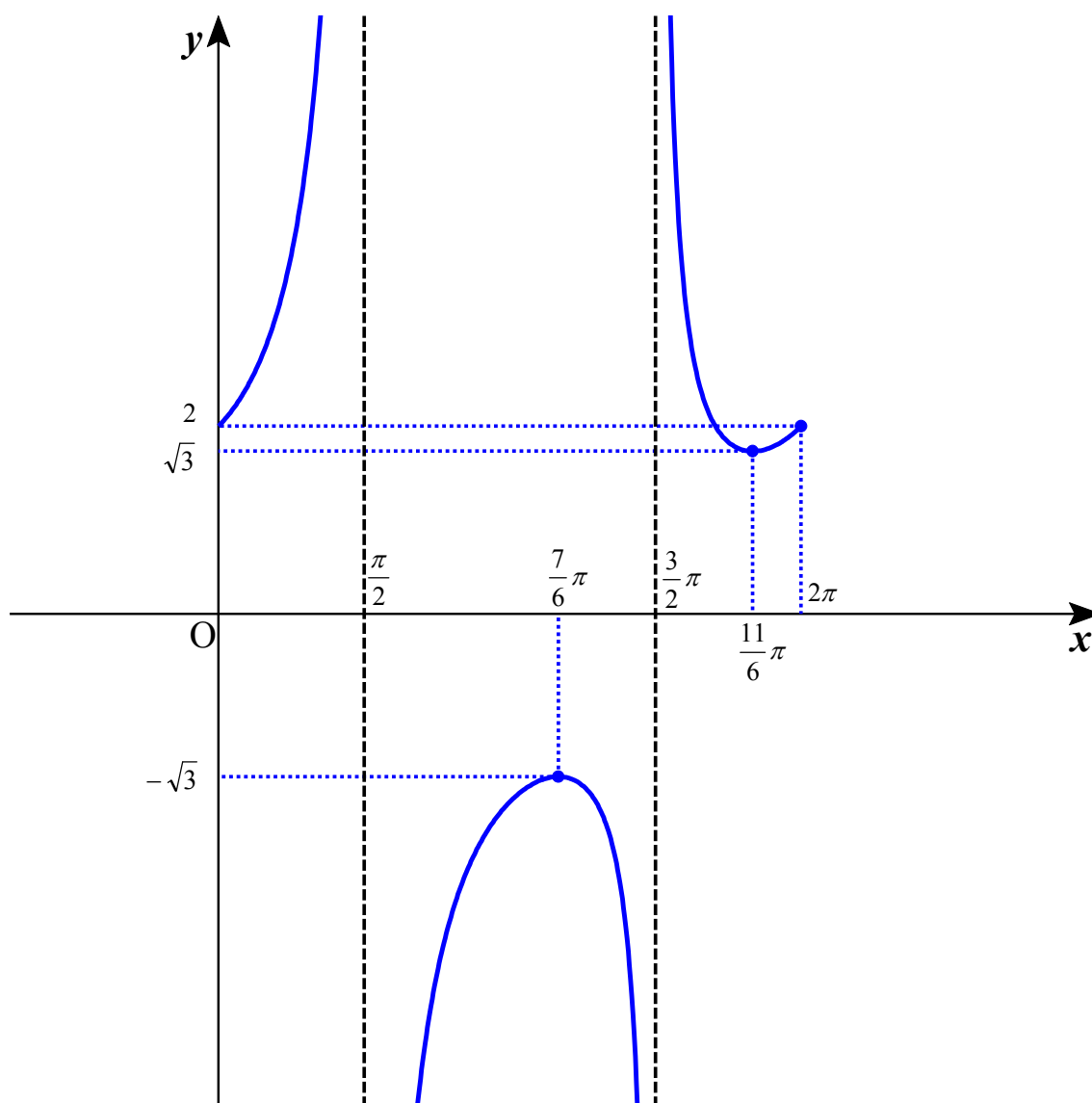


(2)

$$y' = \frac{2 \sin x + 1}{\cos^2 x}, \quad y'' = \frac{2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x + 2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2(\sin^2 x + \sin x + 1)}{\cos^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} y = \infty$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
y'	/	+	/	+	0	-	/	-	0	+	/
y''	/	+	/	-	-	-	/	+	+	+	/
y	2	$\uparrow \cup$	/	$\uparrow \cap$	$-\sqrt{3}$	$\downarrow \cap$	/	$\downarrow \cup$	$\sqrt{3}$	$\uparrow \cup$	2



345

(1)

与式より, $y = x\sqrt{4-x^2}$ または $y = -x\sqrt{4-x^2}$

$y = x\sqrt{4-x^2}$ と $y = -x\sqrt{4-x^2}$ は x 軸に関して対称であり,

$y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = -x\sqrt{4-x^2}$ のそれぞれは原点に関して対称だから,

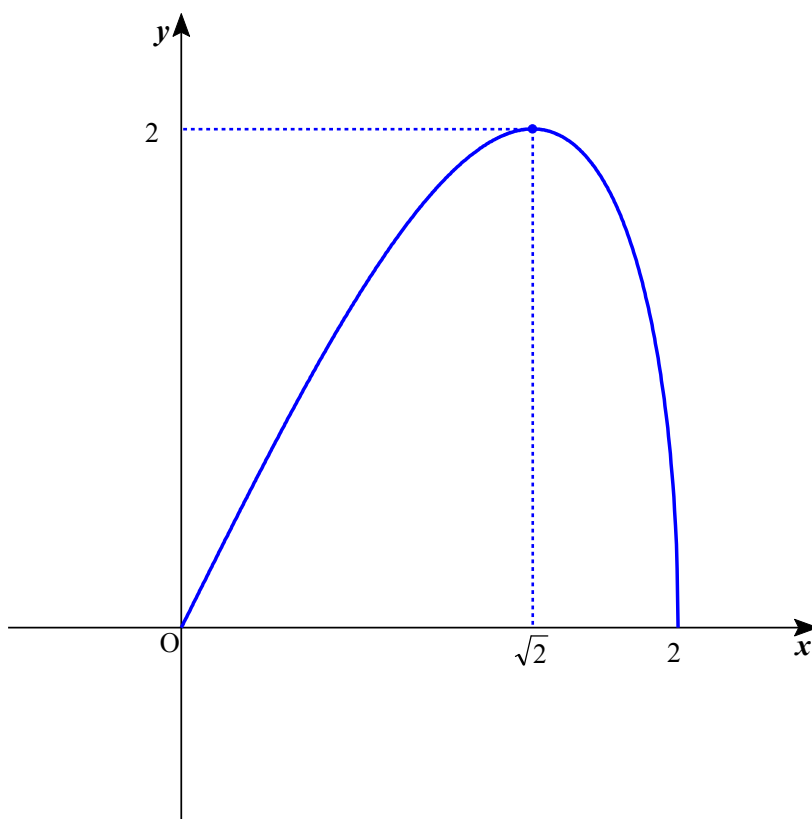
まず $y = x\sqrt{4-x^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) の概形を描き,

それと x 軸, y 軸, 原点に関して対称なグラフを描き足せばよい。

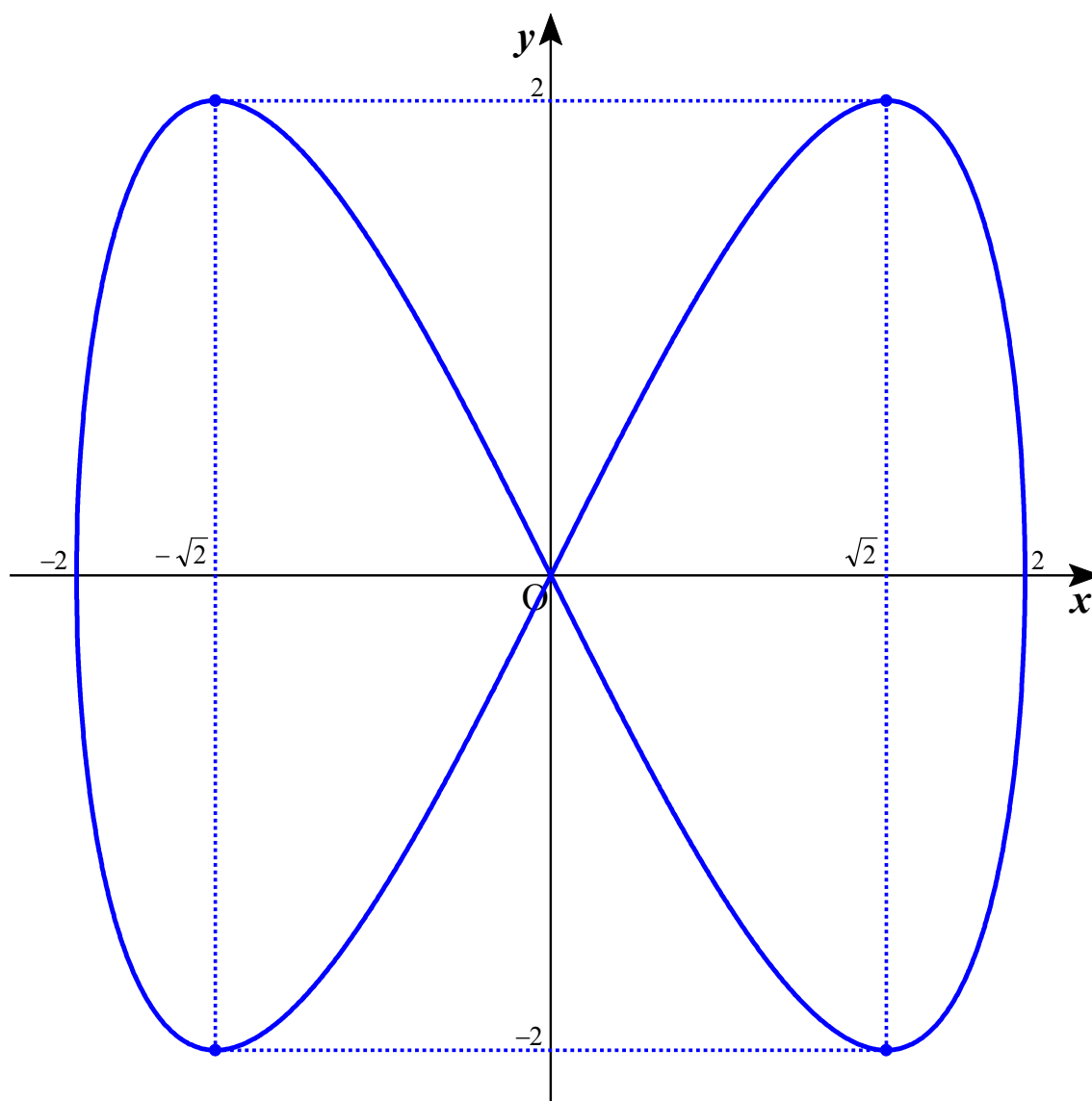
$$y' = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y'' = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y' = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} y' = -\infty$$

x	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
y'	/	+	0	-	/
y''	/	-	-	-	/
y	/	$\uparrow \cap$	2	$\downarrow \cap$	0

より, $y = x\sqrt{4-x^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) の概形は次のようになる。



ゆえに、 $y^2 = x^2(4 - x^2)$ のグラフは次のようになる。



(2)

与式より, $y = x\sqrt{x+1}$ または $y = -x\sqrt{x+1}$

$y = x\sqrt{x+1}$ と $y = -x\sqrt{x+1}$ は x 軸に関して対称だから,

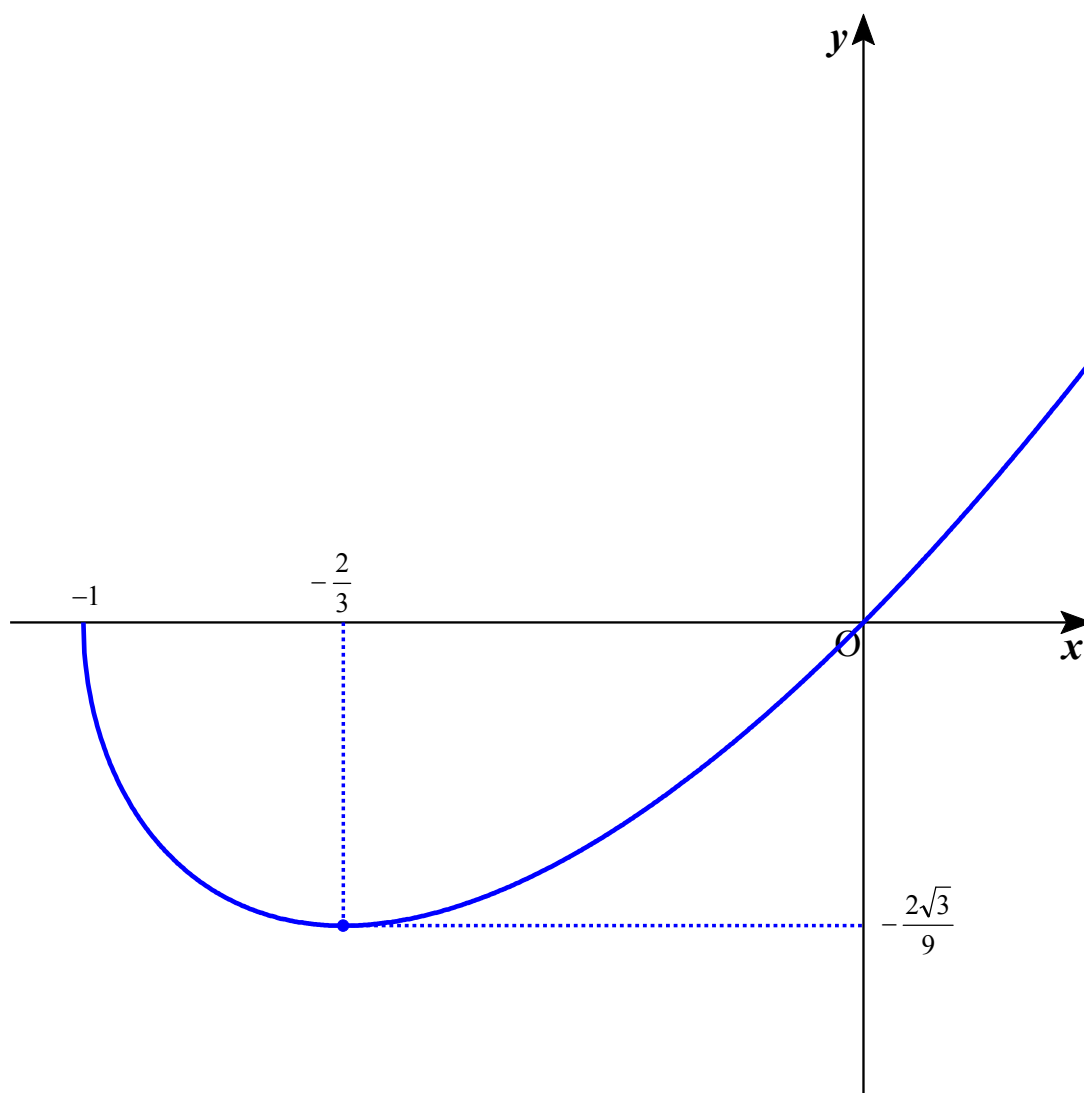
$y = x\sqrt{x+1}$ のグラフを描いてから, それと x 軸に関して対称なグラフを描き足せばよい。

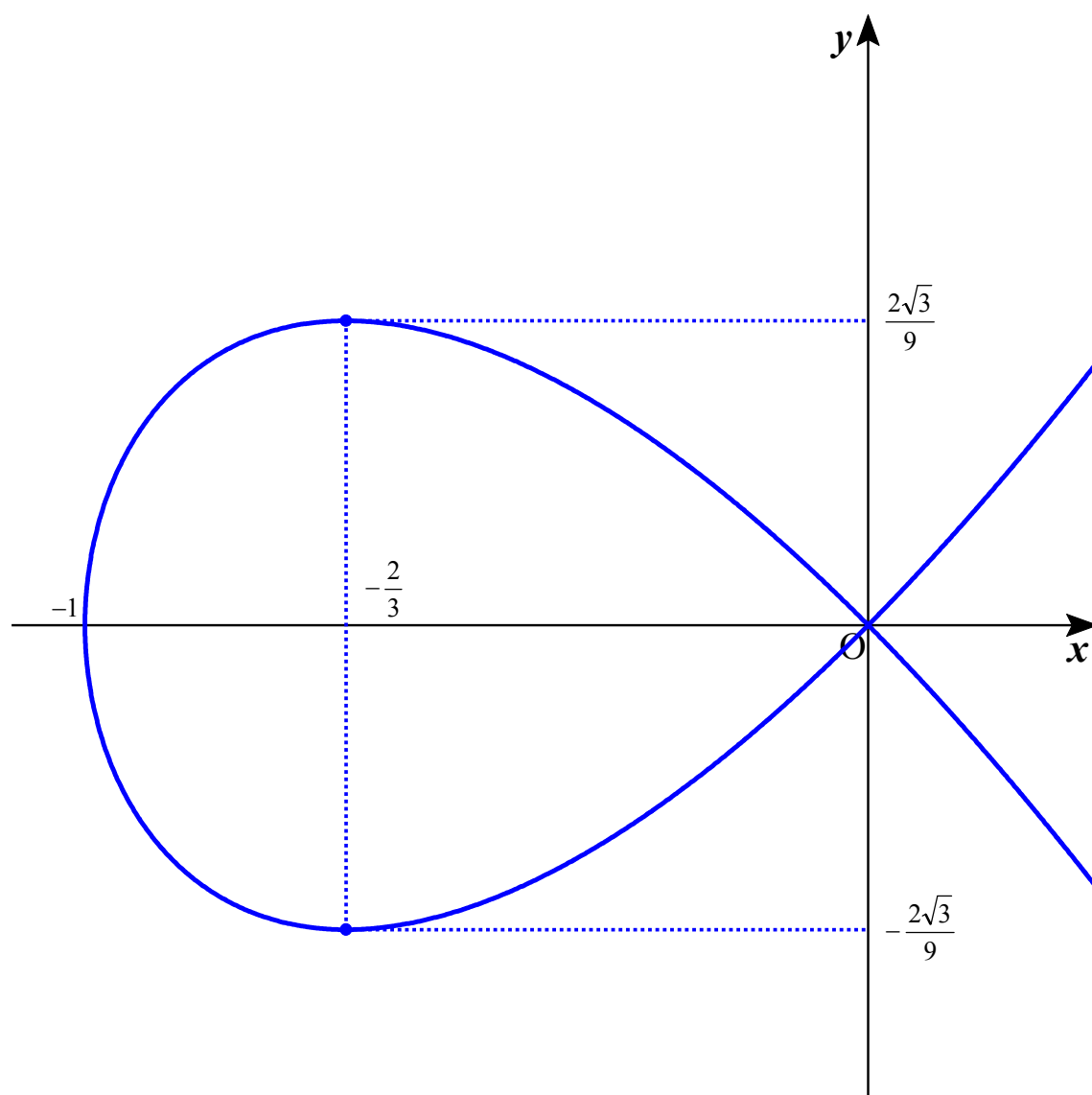
$y = x\sqrt{x+1}$ のグラフの概形について

$$y' = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}, \quad y'' = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}} > 0 \quad (\because x > -1), \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y' = -\infty$$

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...
y'	/	-	0	+
y''	/	+	+	+
y	0	$\downarrow \cup$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\uparrow \cup$

よって, グラフの概形は次のようになる。





346

解法 1

$$x^2 = (e^t - e^{-t})^2 = (e^t + e^{-t})^2 - 4 \quad \therefore (e^t + e^{-t})^2 = x^2 + 4$$

$$e^t + e^{-t} > 0 \text{ より, } e^t + e^{-t} = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\text{これと } y = e^{3t} + e^{-3t} = (e^t + e^{-t})(e^{2t} - 1 + e^{-2t}) = (e^t + e^{-t})\{(e^t + e^{-t})^2 - 3\} \text{ より,}$$

$$y = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$y' = 2x\sqrt{x^2 + 4} + (x^2 + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{3x^3 + 9x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = \frac{(6x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 4} - (3x^3 + 9x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}{x^2 + 4} = \frac{6(x^4 + 6x^2 + 6)}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}} > 0$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	$\downarrow \cup$	2	$\uparrow \cup$

解法 2

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t} > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3e^{3t} - 3e^{-3t} \\ &= 3(e^{3t} - e^{-3t}) \\ &= 3(e^t - e^{-t})(e^{2t} + 1 + e^{-2t}) \\ &= 3(e^t - e^{-t})\{(e^t - e^{-t})^2 + 1\} \end{aligned}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{dt}$	$-$	0	$+$
(x, y)	$(\rightarrow, \downarrow)$	$(0, 2)$	$(\rightarrow, \uparrow)$

