微分法の応用 6　方程式，不等式への応用

e^x と x^n に関する極限

$x>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ （n は 0 以上の整数）の証明

証明

$f(x)=e^x$ とすると，$f(x)$ は x で無限回微分可能だから，

$f(x)=e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots$ とおくと，

$f^{(1)}(x)=e^x=1!a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+n\,a_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$

$f^{(2)}(x)=e^x=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)n\,a_{n+1}x^{n-1}\cdots$

$f^{(3)}(x)=e^x=3!a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+(n+1)n\,(n-1)x^{n-2}\cdots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$

よって，$f(0)=1=a_0$，$f^{(1)}(0)=1=1!a_1$，$f^{(2)}(0)=1=2!a_2$，$f^{(3)}(0)=1=3!a_3$，$\cdots$，
$f^{(n)}(0)=1=n!a_n$

ゆえに，$f(x)=e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\dfrac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots$

これより，$e^x>\dfrac{x^n}{n!}>0$（n は 0 以上の整数）であることが推測でき，

$\dfrac{x^n}{n!}>0$ は問題条件より明らかだから，$e^x>\dfrac{x^n}{n!}$ であることを数学的帰納法で証明する。

つまり，$g_n(x)=e^x-\dfrac{x^n}{n!}$ （$x>0$，n は 0 以上の整数）　・・・①　とおき，

$g_n(x)>0$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

【1】 $n=0$ のとき

$g_1(x)=e^x-1>0$ （$\because x>0$）より，①が成り立つ。

【2】 $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると，$g_k(x)=e^x-\dfrac{x^k}{k!}>0$

$n=k+1$ のとき，$g_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ より，$\{g_{k+1}(x)\}'=e^x-\dfrac{x^k}{k!}=g_k(x)>0$

よって，$g_{k+1}(x)$ は単調増加関数である。

これと $g_{k+1}(0)=1$ より，$x>0$ のとき $g_{k+1}(x)>0$ となり，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

【1】，【2】より，①が成り立つ。

以上より，$e^x>\dfrac{x^n}{n!}>0$（n は 0 以上の整数）が成り立つ。

$e^x>\dfrac{x^n}{n!}>0$ は 0 以上の任意の整数 n で成り立つから $e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}>0$ が成り立つ。

よって，$0<\frac{1}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$ より，$0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

これと $\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ より，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

349

(1)

$f(x)=\sin x-x+\frac{x^2}{2}$ とおくと，

$f'(x)=\cos x-1+x$

$f''(x)=-\sin x+1$

よって，n を整数とすると，

$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき $f''(x)=0$，$x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき $f''(x)>0$

これより $f'(x)$ は単調増加関数であり，

$f''(0)=1>0$，$f'(0)=0$ より，$x>0$ のとき $f'(x)>f'(0)=0$

よって，$x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=0$

ゆえに，$x>0$ のとき，$\sin x>x-\frac{x^2}{2}$

補足

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$\uparrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\uparrow$	

つまり，$x=0$ のとき $f'(x)=0$，$x>0$ のとき $f'(x)>0$

よって，$x\geq 0$ のときの関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\uparrow$

したがって，$x>0$ のとき，$f(x)>0$

ゆえに，$\sin x>x-\frac{x^2}{2}$

(2)

$f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ とおくと

$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$$f''(x)=\frac{3}{4}\left\{1-(1+x)^{-\frac{5}{2}}\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}\right\}$$

$x>0$ のとき，$1<1+x<\sqrt{(1+x)^5}$ より，$0<\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}<\frac{1}{1+x}<1$ $\quad\therefore f''(x)>0$

これと $f'(0)=0$ より，$x>0$ のとき $f'(x)>f'(0)=0$

よって，$x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=0$

ゆえに，$x>0$ のとき，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$ ・・・①

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1+\frac{1}{2}x$ とおくと

$g'(x)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right\}$ より，$x>0$ のとき $g'(x)>0$

よって，$x>0$ のとき，$g(x)>g(0)=0$

ゆえに，$1-\frac{1}{2}x<\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ・・・②

①，②より，$1-\frac{1}{2}x<\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$

350

ポイント

不等式を解くテクニック

1. 適当な 1 つの文字を変数 x に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。
たとえば，a を x に置き換えて適当な関数 $f(x)$ をつくる。

2. 適当な文字式を変数 x に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。
たとえば，ab を x に置き換えて適当な関数 $f(x)$ をつくる。

3. 適当な関数を変数 u に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。
たとえば，与式 $f(x)$ を変形し $h(g(x))$ のような合成関数の形にし，$g(x)=u$ とおき，
$h(u)$ の振る舞いを調べる。

4. 平均値の定理の利用

5. 積分を利用

(1)

解法 1：1 つの文字を変数 x に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。

$f(x)=\log x-\log a-\dfrac{2(x-a)}{x+a}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}$

よって，$x>0$ のとき $f'(x)\geq 0$ より，$x>0$ において $f(x)$ は単調増加する。

これと $f(a)=0$ より，

$x\geq a$ のとき $f(x)\geq f(a)=0$

すなわち，$\log x-\log a\geq\dfrac{2(x-a)}{x+a}$

これと $b\geq a$ より，$\log b-\log a\geq\dfrac{2(b-a)}{b+a}$

解法 2: 適当な文字式を x とおいて，適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。

$$\log b-\log a-\frac{2(b-a)}{b+a}=\log\frac{b}{a}-\frac{2\left(\frac{b}{a}-1\right)}{\frac{b}{a}+1}$$

ここで，$\dfrac{b}{a}=x$ とおき $f(x)=\log x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ とすると $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$ ・・・①

また，$b\geq a>0$ より，$f(x)$ の定義域は $x=\dfrac{b}{a}\geq 1$ ・・・②

よって，①，②より，$f'(x)\geq 0$ であるから，$f(x)$ は単調増加する。

これと $f(1)=0$ より，$f(x)\geq 0$

ゆえに，$\log b-\log a\geq\dfrac{2(b-a)}{b+a}$

解法 3：積分（面積）を利用

【1】$b=a$ のとき

$\log b-\log a=\dfrac{2(b-a)}{b+a}$ が成り立つ

【2】$b\neq a$ のとき

$y=\log x$ とすると，$y''=-\dfrac{1}{x^2}<0$ より，曲線 $y=\log x$ は上に凸である。

したがって，$y=\log x$，$x=b$，$x=a$，$y=\log a$ で囲まれた部分の面積は，
$(a,\ \log a)$，$(b,\ \log a)$，$(b,\ b\log b)$ を頂点とする三角形の面積より大きい。

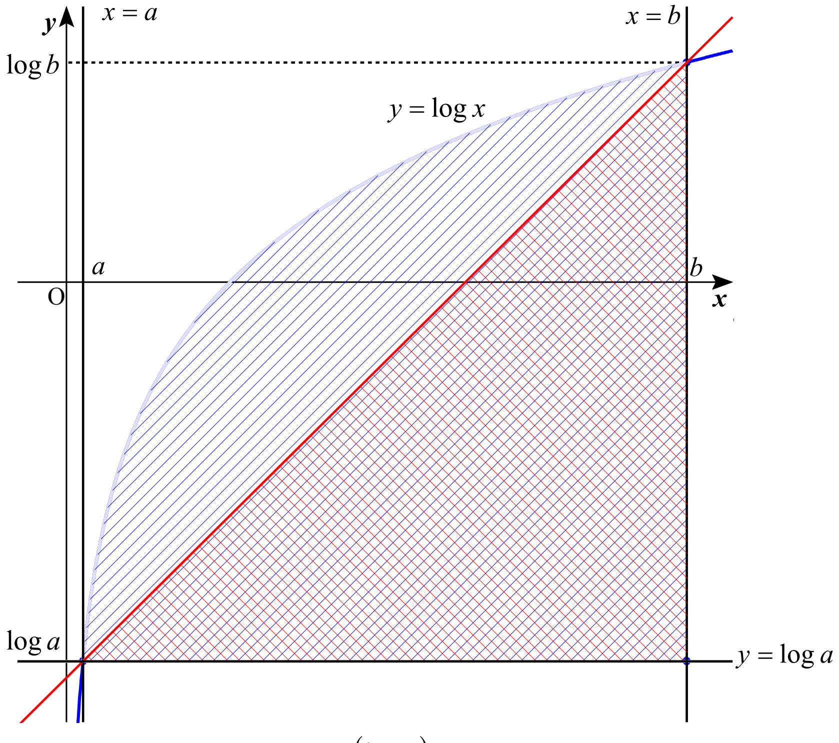
$$\therefore \int_a^b(\log x-\log a)dx>\frac{(\log b-\log a)(b-a)}{2}\Leftrightarrow \left[x(\log x-1)-x\log a\right]_a^b>\frac{(\log b-\log a)(b-a)}{2}$$

$$\Leftrightarrow b\log b-b-b\log a-(a\log a-a-a\log a)>\frac{1}{2}b\log b-\frac{1}{2}a\log b-\frac{1}{2}b\log a+\frac{1}{2}a\log a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b\log b+a\log b-b\log a-a\log a)>b-a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log b-\log a)(b+a)>b-a$$

$$\Leftrightarrow \log b-\log a>\frac{2(b-a)}{b+a}$$



【1】,【2】より，$\log b-\log a\geq\dfrac{2(b-a)}{b+a}$ が成り立つ

(2)

解法 1：1 つの文字を変数 $\boldsymbol{x}$ に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。

$0<\alpha<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ を同値変形すると，$\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$

したがって，$\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$ を証明すればよい。

$f(x)=\beta\sin x-x\sin\beta\ \left(0<x<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$f'(x)=\beta\cos x-\sin\beta$，$f''(x)=-\beta\sin x$

ここで，$0<x<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$f''(x)<0$

よって，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，これと $f(0)=f(\beta)=0$ より，$f(x)>0$

したがって，$0<\alpha<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$f(\alpha)=\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$

解法 2：1 つの文字を変数 $\boldsymbol{x}$ に置き換えて適当な関数をつくり，その振る舞いを調べる。

$0<\alpha<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ を同値変形すると，$\dfrac{\sin\beta}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

したがって，$\dfrac{\sin\beta}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ を証明すればよい。

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

ここで，$g(x)=x\cos x-\sin x\ \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g'(x)=-x\sin x<0$ より，

$g(x)=x\cos x-\sin x\ \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調減少する。

これと，$g(0)=0$ より，$g(x)<0$

$\therefore f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$

ゆえに，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調減少する。

これと，$0<\alpha<\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\sin\beta}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

351

解法 1：log*x* の正負で分類

【1】 $0<x<1$ のとき

$\log x<0$ だから，$\sqrt{x}>a\log x$ が成り立つための条件は $a\geq 0$

【2】 $x=1$ のとき

$\log x=0$ だから，任意の実数 a に対し $\sqrt{x}>a\log x$ が成り立つ。

【3】 $1<x$ のとき

$\log x>0$ だから，$\sqrt{x}>a\log x$ を同値変形すると，$\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}>a$

よって，a の値が $\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$ の最小値より小さければよい。

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$ （$x>1$）とすると，$f'(x)=\dfrac{\log x-2}{2\sqrt{x}(\log x)^2}$ より，

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\downarrow$	$\dfrac{e}{2}$	$\uparrow$

よって，$\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$ の最小値は $\dfrac{e}{2}$

ゆえに，$a<\dfrac{e}{2}$

すべての正の数 x に対し $\sqrt{x}>a\log x$ が成り立つためには，

【1】～【3】が同時に満たされればよいから，

定数 a の範囲は $0\leq a<\dfrac{e}{2}$

解法 2：a の正負で分類

【1】 $a<0$ のとき

$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0$， $\lim_{x\to+0}a\log x=a\lim_{x\to+0}\log x=\infty$ より，不適

【2】 $a=0$ のとき

$\sqrt{x}>0$， $a\log x=0$ より $\sqrt{x}>a\log x$ が成り立つ。

【3】 $0<a$ のとき

$f(x)=\sqrt{x}-a\log x$ とすると， $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2a}{2x}$ より， $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\downarrow$	$2a(1-\log 2a)$	$\uparrow$

すべての正の数 x に対して， $\sqrt{x}>a\log x$ が成り立つためには、
$f(x)$ の最小値 $f(4a^2)=2a(1-\log 2a)$ が正であればよい。
すなわち， $a>0$ より， $1-\log 2a>0$ であればよい。

よって，この不等式を解くことにより， $a<\dfrac{e}{2}$

【1】～【3】より，定数 a の範囲は $0\leq a<\dfrac{e}{2}$

352

$f(x)=e^x-\left(1-x+x^2e^x\right)$ $(0\leq x\leq 1)$ とすると，

$f'(x)=-e^x\left(x^2+2x-1\right)+1$ より， $f''(x)=-e^x\left(x^2+4x+1\right)=-e^x\left\{(x+2)^2-3\right\}$

よって， $0\leq x\leq 1$ において， $f''(x)<0$

これより，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，これと $f(0)=f(1)=0$ より， $f(x)\geq 0$

ゆえに， $1-x+x^2e^x\leq e^x$ ・・・①

$g(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2e^x-e^x$ $(0\leq x\leq 1)$ とすると，

$g'(x)=\dfrac{e^x}{2}\left(x^2+2x-2\right)+1$ より， $g''(x)=\dfrac{x(x+4)e^x}{2}>0$

よって， $0\leq x\leq 1$ において $g'(x)$ は単調増加し，これと $g'(0)=0$ より，

$x=0$ のとき $g'(x)=0$， $0<x\leq 1$ のとき $g'(x)>0$ だから， $g(x)\geq g(0)=0$

ゆえに， $e^x\leq 1+x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$ ・・・②

①，②より， $1-x+x^2e^x\leq e^x\leq 1+x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$

353

(1)

方程式を同値変形すると， $x^3=a(x-2)$

$x=2$ のとき左辺は 8，右辺は 0 だから $x=2$ は方程式の解でない。

よって， $x\neq 2$ より， $x^3=a(x-2)$ を同値変形すると， $\dfrac{x^3}{x-2}=a$

$\dfrac{x^3}{x-2}=a$ の実数解の個数は，曲線 $y=\dfrac{x^3}{x-2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数と等しいから，

その共有点の個数について調べることにする。

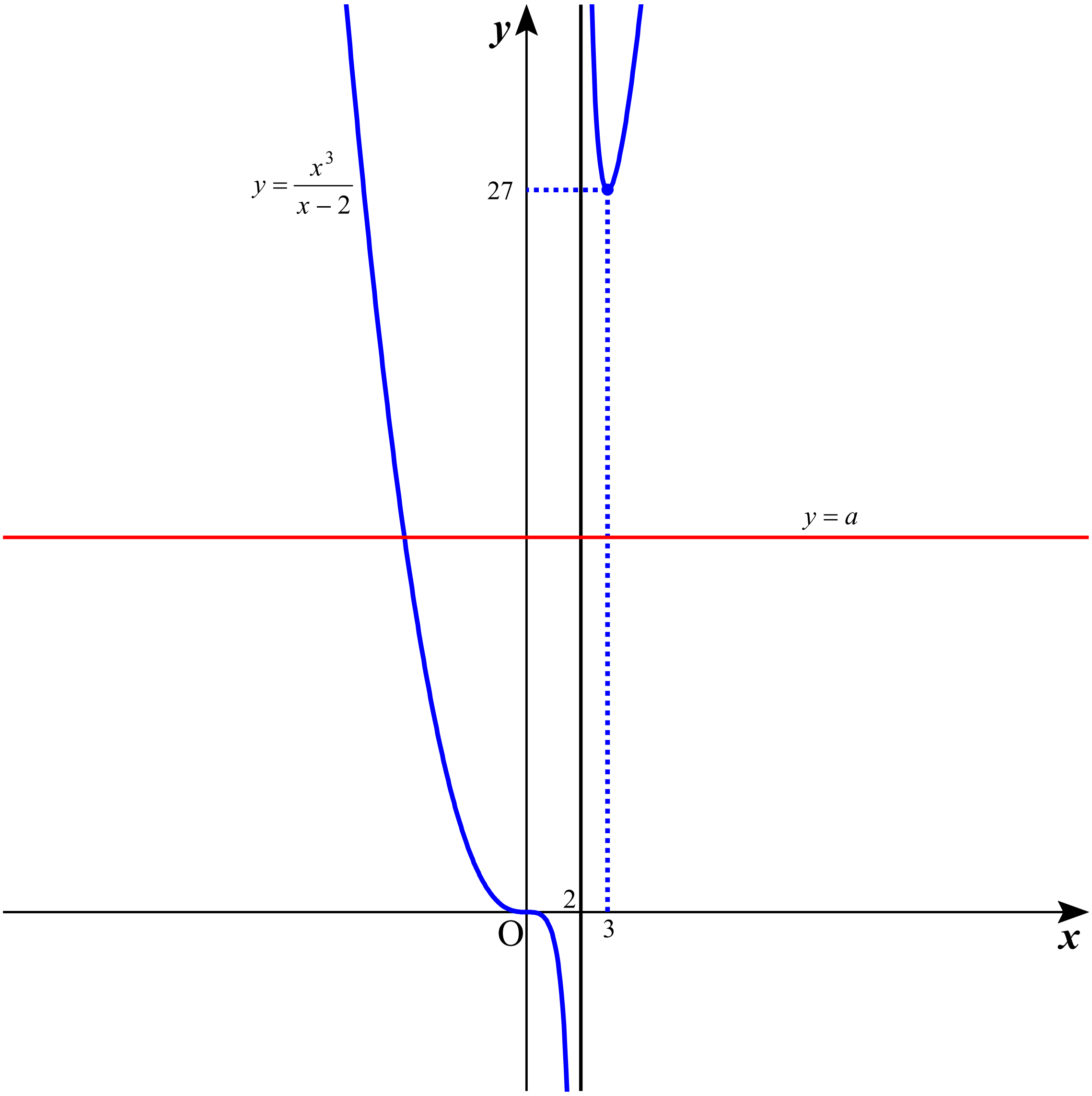
$y=\dfrac{x^3}{x-2}$ について， $y'=\dfrac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$ より，その増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↓	0	↓	/	↓	27	↑

また，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-\frac{2}{x}}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-\frac{2}{x}}=\infty,\quad \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x-2}=\infty$$

よって，$y=\dfrac{x^3}{x-2}$（青色実線）と $y=a$（赤色実線）のグラフは次のようになる。



ゆえに，グラフから，$a<27$ のとき 1 個，$a=27$ のとき 2 個，$a>27$ のとき 3 個

(2)

方程式$2x-1=ae^{-x}$を同値変形すると，$e^x(2x-1)=a$

$2x-1=ae^{-x}$の解の個数は，曲線$y=e^x(2x-1)$と直線$y=a$の共有点の個数と等しいから，その共有点の個数を調べることにする。

$y=e^x(2x-1)$について，$y'=e^x(2x+1)$より，その増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$

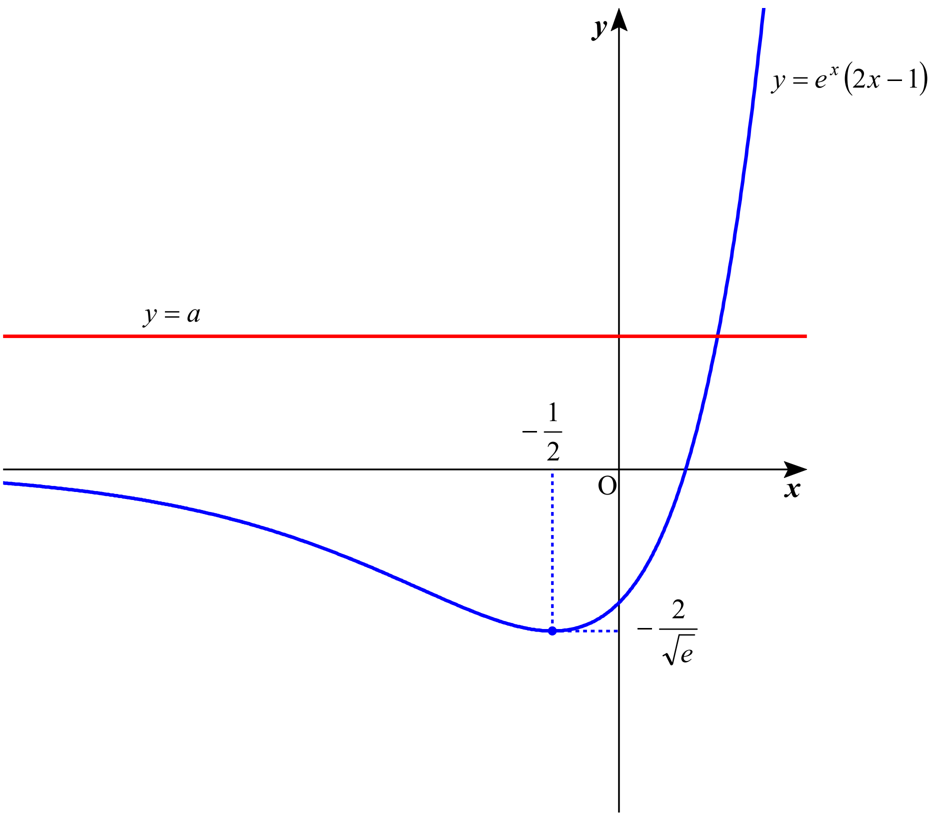
また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{e^x(2x-1)\}$と$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{e^x(2x-1)\}$について，

$$\lim_{x\to\infty}\{e^x(2x-1)\}=\infty$$

$x=-t$とおくと，$x\to-\infty$のとき$t\to\infty$だから，

$$\lim_{x\to-\infty}\{e^x(2x-1)\}=\lim_{t\to\infty}\{e^{-t}(-2t-1)\}=\lim_{t\to\infty}\left(-2\cdot\frac{t}{e^t}-\frac{1}{e^t}\right)=0$$

よって，$y=e^x(2x-1)$（青色実線）と$y=a$（赤色実線）のグラフは次のようになる。



ゆえに，$a<-\frac{2}{\sqrt{e}}$ のとき 0 個，$a=-\frac{2}{\sqrt{e}}$, $a\geq 0$ のとき 1 個，$-\frac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ のとき 2 個

補足

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ の証明

$e^x=t$ とおくと，$x=\log t$ より，$\frac{x}{e^x}=\frac{\log t}{t}$

また，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$

よって，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}$

ここで，$f(t)=2\sqrt{t}-\log t$ とおくと，$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{t}-1}{t}$ より，

$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$
$f(t)$	∞	$\downarrow$	2	$\uparrow$

よって，$f(t)$ の最小値は 2，すなわち正だから，$2\sqrt{t}-\log t>0$ $\therefore \log t<2\sqrt{t}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}$ を考える場合，$t\to\infty$ だから，$t>1$ としてよい。

したがって，不等式 $0<\log t<2\sqrt{t}$ が成り立つ。

$\therefore 0<\frac{\log t}{t}<\frac{2\sqrt{t}}{t}=\frac{2}{\sqrt{t}}$

これと $\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{t}}=0$ より，$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$

ゆえに，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$